

# Phyllotaxis – Über Zahlen und Pflanzen

## *Teilnehmer:*

Julia Fronicke	Andreas-Oberschule
Stefan Graupner	Andreas-Oberschule
Johannes Meister	Heinrich-Hertz-Oberschule
Lydia Nordheimer	Andreas-Oberschule
Felix Riedel	Heinrich-Hertz-Oberschule
Fernando Santos-Castelar	Heinrich-Hertz-Oberschule
Ricardo Steglich	Andreas-Oberschule

## *Gruppenleiter:*

Heino Hellwig	Humboldt-Universität zu Berlin, Mitglied im DFG-Forschungszentrum MATHEON „Mathematik für Schlüsseltechnologien“
---------------	--

Phyllotaxis nennt man die Anordnung äußerer Blattorgane wie Blätter, Äste, Samen etc., an ihren Wachstumsgründen. Dabei treten häufig Spiralmuster auf, wobei die Anzahl der Spiralarme in bzw. gegen den Uhrzeigersinn durch zwei aufeinander folgende Fibonacci-Zahlen

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

gegeben ist. Wir haben den mathematischen Zusammenhang zwischen den Fibonacci-Zahlen und dem Goldenen Schnitt anhand eines einfachen Modells untersucht.

# 1 Einleitung

Die Lehre von den Blattstellungen (Phyllotaxis) beschäftigt sich u.a. mit zwei Themen. Das erste betrifft den Zusammenhang zwischen den Fibonacci-Zahlen und dem Goldenen Winkel. Das zweite Thema beschäftigt sich mit den kausalen Ursachen der Ausbildung des Goldenen Winkels bei der Pflanze.

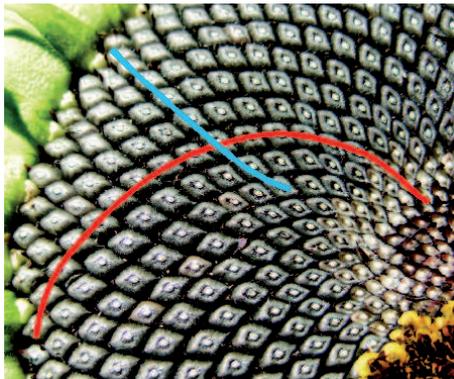


Abbildung 1: Spiralmuster in der Sonnenblume

## 2 Fibonacci-Zahlen

Erstmals tauchten Fibonacci-Zahlen bei einer einfachen Aufgabe über die Kaninchen-Vermehrung auf. Die Voraussetzungen für die Kaninchen-Vermehrung sind:

1. Jedes Kaninchen wird im Alter von 2 Monaten gebärfähig.
2. Jedes Kaninchenpaar bringt vom 2. Monat an jeden Monat ein neues Kaninchenpaar zur Welt.
3. Kaninchen leben unendlich lange.

Wie man in der Skizze erkennen kann, ist die Anzahl der Kaninchenpaare  $A_n$  im  $n$ -ten Monat ein Folgenglied der Fibonacci-Folge. Für die Fibonacci-Zahlen gilt die folgende **rekursive Bildungsvorschrift**:

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, n \geq 1,$$

mit

$$F_1 = 1; F_2 = 1.$$

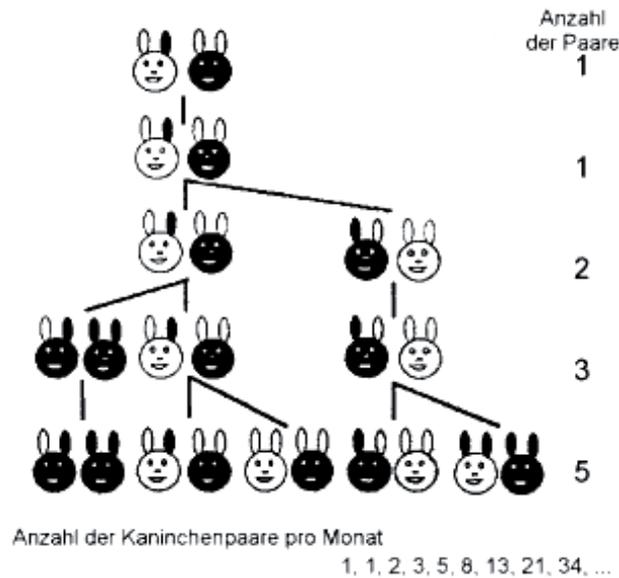


Abbildung 2: Kaninchen-Vermehrung

**Beweis:** (nach vollständiger Induktion)

**IA:**  $A_1 = A_2 = 1$ .

**IS:**  $(k \rightarrow k + 1)$

Im Monat  $k$  leben nach IV  $A_k$  Paare, von denen  $A_{k-1}$  Paare gebärfähig sind. Diese bringen dann  $A_{k-1}$  Junge zur Welt. Im  $(k+1)$ -ten Monat leben also  $A_{k+1} = A_k + A_{k-1}$  Paare.

*q.e.d.*

Im folgenden Koordinatensystem ist die Fibonacci-Folge für  $n \geq 0$  dargestellt. Dem Verlauf der Punkte nach zu urteilen könnte man ein exponentielles Wachstum annehmen. Wir betrachten die Zahlenfolge auch im negativen Bereich, der sich mit der Gleichung  $F_n = F_{n+2} - F_{n+1}$  ermitteln lässt. Wie man erkennen kann, weichen die Werte von geraden und ungeraden  $n$  im II. und III. Quadranten von einander ab. Zur Ermittlung der Basis der Exponentialfunktion wählen wir folgenden **Ansatz:**  $F_n = \lambda^n$ ,  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

**Bedingung:**  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$

Um an dieser Stelle weiterzukommen, unternahmen wir einen kleinen Exkurs zu den Differenzgleichungen.

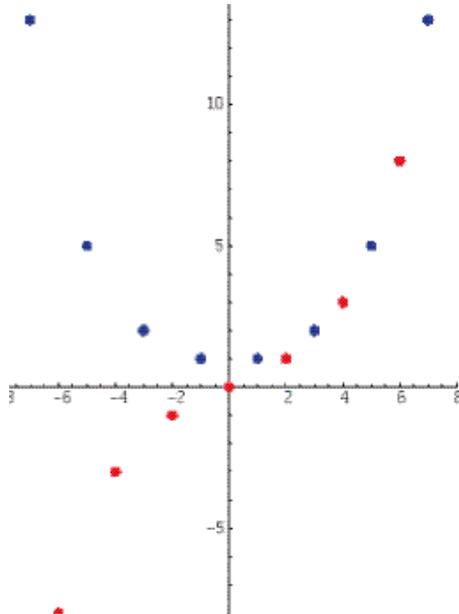


Abbildung 3: Wachstum der Fibonacci-Folge

## 2.1 Differenzgleichungen

### Definition

Eine **homogene lineare Differenzgleichung 2. Ordnung** ist eine rekursive Folge der Form

$$a_{n+2} = c_1 a_{n+1} + c_2 a_n \quad (*)$$

mit  $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ . Eine **Lösung** dieser Differenzgleichung ist eine Folge  $(x_n)$ , für die gilt, dass alle ihre Folgenglieder Lösungen von  $(*)$  sind. Für eine Lösung der Differenzgleichung gilt:

1. Wenn  $(x_n)$  Lösung von  $(*)$  ist, dann ist auch  $c(x_n) = (c \cdot x_n)$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , Lösung von  $(*)$ .
2. Sind  $(x_n)$  und  $(y_n)$  Lösungen von  $(*)$ , so ist auch  $(x_n + y_n)$  Lösung von  $(*)$ .

Man kann zeigen, dass der Lösungsraum von  $a_{n+2} = c_1 a_{n+1} + c_2 a_n$  ein zweidimensionaler Vektorraum ist. Daraus folgt: jede Folge  $(x_n)$ , die Lösung von  $(*)$  ist hat die Form:

$$x_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n,$$

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Insbesondere gilt für die Fibonacci-Folge mit  $F_0 = 0$ :

$$\begin{aligned} 0 &= c_1 + c_2 \\ c_1 &= -c_2 \end{aligned}$$

Somit gilt:

$$F_n = c_1 \lambda_1^n - c_1 \lambda_2^n$$

Für  $F_1 = 1$  gilt:

$$\begin{aligned} 1 &= c_1 \left( \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \right) - c_1 \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \\ 1 &= c_1 \left( \frac{\sqrt{5} + 1 - 1 + \sqrt{5}}{2} \right) \\ 1 &= c_1 \sqrt{5} \\ c_1 &= \frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Somit können wir die explizite Bildungsvorschrift für die Fibonacci-Zahlenfolge aufstellen.

**Satz von Binet:**

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

**Folgerung 1:**

Für alle  $n \in \mathbb{N}$  ist die Fibonacci-Zahl  $F_n$  diejenige ganze Zahl, die dem Bruch  $\frac{\phi^n}{\sqrt{5}}$  am nächsten ist, wobei  $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi$  und  $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -\tau = -\frac{1}{\phi}$ :

$$F_n = \left[ \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} \right]$$

**Beweis:**

$$\begin{aligned} \left| F_n - \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} \right| &= \left| \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} - \frac{(-\tau)^n}{\sqrt{5}} - \frac{\phi^n}{\sqrt{5}} \right| \\ &= \left| \frac{(-\tau)^n}{\sqrt{5}} \right| \\ &< \left| \frac{1}{\sqrt{5}} \right| \quad \text{da } |-\tau| = \left| \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right| \approx |-0,618| < 1 \\ &< \frac{1}{2} \end{aligned}$$

**Folgerung 2:**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi.$$

**Beweis:**

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(1 + \sqrt{5})^{n+1}}{2} - \frac{(1 - \sqrt{5})^{n+1}}{2}}{(1 + \sqrt{5})^n - (1 - \sqrt{5})^n} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\frac{(1 + \sqrt{5})}{2} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}}\right)^n * \frac{1 - \sqrt{5}}{2}}{1 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}}\right)^n} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right) = \phi.
 \end{aligned}$$

Somit gilt für große n:  $F_{n+1} \approx F_n \phi$ .

Allerdings trifft diese Aussage auch für alle anderen Fibonacci-artigen Zahlenfolgen ( $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ ,  $F_0$  und  $F_1$  sind gegeben) zu, wie z.B. für die Lukaszahlenfolge ( $F_0 = 1, F_1 = 3$ ).

### 3 Der Goldene Schnitt

Ein besonderes mathematisches Phänomen, das wir an Pflanzen erkennen können, ist der Goldene Schnitt. Man sieht z.B., dass die Anordnung der Blätter sich nach einem konstanten Winkel orientiert: Dem Goldenen Winkel, der sich aus dem Goldenen Schnitt herleiten lässt.

**Definition:** Der **Goldene Schnitt** teilt eine Strecke  $\overline{AC}$  in  $\overline{AB}$  und  $\overline{BC}$ , sodass gilt:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}.$$

Das Teilungsverhältnis ergibt sich aus der Einheitsstrecke 1, die durch x geteilt wird. Der Goldene Schnitt lässt sich folgendermaßen berechnen:



Abbildung 4: Der Goldene Schnitt

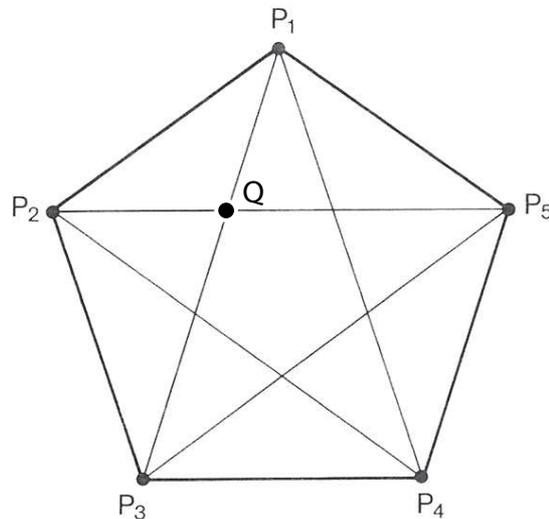
$$\begin{aligned} \frac{1}{x} &= \frac{x}{1-x} \\ 0 &= x^2 + x - 1 \\ x_{1,2} &= -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2} \\ x_1 &= \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = \tau = \frac{1}{\phi} \\ x_2 &= \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} = -\phi \end{aligned}$$

Der Goldene Winkel teilt den Umfang des Einheitskreises im Goldenen Schnitt:  
 $\tau \cdot 360^\circ = 222,49\dots^\circ$

Komplementärwinkel:  $137,5\dots^\circ$

Den Goldenen Schnitt finden wir auch in einem regulären Fünfeck. Hier gilt:

- a) Die Größe jedes Innenwinkels ist  $108^\circ$ .
- b) Alle Diagonalen haben die gleiche Länge.
- c) Jede Seite ist parallel zu der ihr gegenüberliegenden Diagonale (z.B ist  $\overline{P_1P_2} \parallel \overline{P_3P_5}$ ).



**Satz:**

Der Schnittpunkt  $Q$  teilt die Strecke  $\overline{P_1P_3}$  im Goldenen Schnitt.

**Beweis:**

$$\begin{aligned} |\overline{P_1P_2}| &= |\overline{P_5P_4}| \\ \Rightarrow |\overline{P_1P_2}| &= |\overline{QP_3}|, \end{aligned}$$

da  $QP_3P_4P_5$  ein Parallelogramm ist. Nach Strahlensatz gilt:

$$\begin{aligned} \frac{|P_1P_2|}{|P_3P_5|} &= \frac{|QP_1|}{|QP_3|} \\ \Rightarrow \frac{|QP_3|}{|P_1P_3|} &= \frac{|QP_1|}{|QP_3|} = \frac{1}{\tau} = \phi. \end{aligned}$$

## 4 Beste rationale Approximation reeller Zahlen

Wir wissen, dass irrationale Zahlen  $\alpha$  durch rationale Brüche  $\frac{p}{q}$  mit  $p, q \in \mathbb{Z}$ ,  $q \neq 0$  beliebig genau annähert werden können. Wir konstruieren eine Folge von annähernden Brüchen indem wir  $q$  ab 1 laufen lassen und  $p = [\alpha q]$  berechnen.

**Definition:**  $\frac{p}{q}$  heißt **gute Näherung 1. Art** von  $\alpha$ , wenn für alle  $\frac{p'}{q'}$  mit  $q' < q$  gilt:

$$\left| \alpha - \frac{p}{q} \right| < \left| \alpha - \frac{p'}{q'} \right|.$$

Nun ergibt sich das Problem, dass gut annähernde Brüche schnell sehr kompliziert werden, d.h. dass der Nenner sehr groß wird. Um dem entgegenzuwirken brauchen wir eine andere Definition, die die Größe des Nenners berücksichtigt und bei größerem Nenner nur einen entsprechend kleineren Fehler zulässt.

**Definition:**

$\frac{p}{q}$  ist eine **gute Näherung 2. Art** für  $\alpha \in \mathbb{R}$ , wenn für alle  $\frac{p'}{q'}$  mit  $q' < q$ , gilt:

$$|q\alpha - p| < |q'\alpha - p'|.$$

Ist ein Bruch eine gute Näherung 2. Art für  $\alpha$ , so ist er auch eine gute Näherung 1. Art, der umgekehrte Schluss ist nicht allgemeingültig.

**Beweis** (1. Teil):

Voraussetzung:  $\frac{p}{q}$  nähert  $\alpha$  auf 2. Art an. Somit gilt:

$$\begin{aligned} |q\alpha - p| &< |q'\alpha - p'| \\ \Leftrightarrow \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| &< \left| \frac{q'\alpha - p'}{q} \right| \\ \Leftrightarrow \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| &< \left| \frac{q'\alpha - p'}{q'} \right| \\ \Leftrightarrow \left| \alpha - \frac{p}{q} \right| &< \left| \alpha - \frac{p'}{q'} \right|. \end{aligned}$$

$\frac{p}{q}$  ist also auch gute Näherung 1. Art von  $\alpha$ .

**Beweis** (2. Teil, Gegenbeispiel):

Voraussetzung:  $\frac{1}{3}$  nähert  $\alpha = \frac{1}{5}$  auf 1. Art an, denn es gilt:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right| &= \frac{2}{15} \text{ und} \\ \frac{2}{15} &< \frac{12}{15} = \left| \frac{1}{5} - \frac{1}{1} \right|, \text{ sowie} \\ \frac{2}{15} &< \frac{4,5}{15} = \left| \frac{1}{5} - \frac{1}{2} \right| \end{aligned}$$

Es ist klar, dass für alle  $p > 1$  für die beiden  $q_1 = 1, q_2 = 2$ , die Differenz zu  $\frac{1}{5}$  noch größer wird als  $\frac{12}{15}$  bzw.  $\frac{4,5}{15}$ .

$\frac{1}{3}$  ist aber keine gute Näherung 2. Art von  $\frac{1}{5}$ , da  $\left| \frac{3}{5} - 1 \right| > \left| \frac{1}{5} - \frac{0}{1} \right|$ . Dieses Gegenbeispiel reicht aus, um die Allaussage zu widerlegen. Nähert ein rationaler Bruch ein reelles  $\alpha$  auf 1. Art an, nähert er es nicht zwingend auf 2. Art an. Die Annäherung 2. Art ist folglich ein schärferes Kriterium für eine gute Approximation.

## 5 Untersuchung reeller Zahlen mit Hilfe von Drehungen

### 5.1 Das Vogel-Modell

Das Vogel-Modell ist eine mathematische Beschreibung zur Anordnung von Blattanlagen. Dabei wird eine Blattanlage durch einen Kreis mit Radius 1 repräsentiert. Die  $n$ -te Blattanlage hat einen Abstand  $\sqrt{n}$  vom Zentrum, da eine kompakte Anordnung erzeugt werden soll. Der Flächeninhalt der Summe aller Blattanlagen ist deshalb proportional zum Flächeninhalt des Kreises, in dem sie sich befinden.

Es ordnet der  $n$ -ten Blattanlage die Position  $\begin{pmatrix} \omega_n \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n\omega \\ \sqrt{n} \end{pmatrix}$ , wobei  $\omega = 2\pi\lambda$  ist, zu. Nun gibt es mehrere Möglichkeiten für die Belegung von  $\omega$ , durch die verschiedene Muster in der Anordnung der Blattanlagen entstehen, welche wir im folgenden näher betrachten.

1. Möglichkeit:  $\omega$  ist rational, d.h.  $\omega = \frac{p}{q}$ ,  $p, q \in \mathbb{Z}$ ,  $q \neq 0$   
Hier ergeben sich  $q$  Strahlen erstmals nach  $p$  Umläufen.

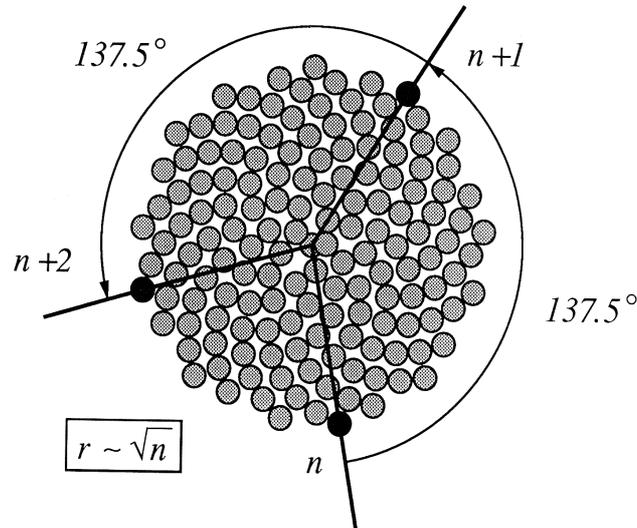


Abbildung 5: Das Vogel-Modell

Begründung:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\omega}{2\pi} \\ \frac{p}{q} &= \frac{\omega}{2\pi} \\ q\omega &= 2\pi p \end{aligned}$$

2. Möglichkeit:  $\omega$  ist irrational.

Es entstehen Spiralen. Die Anzahl können wir durch rationale Approximation des irrationalen Drehwinkels berechnen. Hierfür vereinfachen wir zunächst unser Modell.

## 5.2 Kreisabbildungen

An einem Einheitskreis wird iterativ ein fest gewählter Drehwinkel  $\omega$  abgetragen. Es werden lediglich die Orbitpunkte (Schnittpunkte)  $x_{k+1} = R_\omega(x_k)$  mit dem Kreisbogen betrachtet. Die den Drehwinkel  $\omega = 2\pi\lambda$  eindeutig (*mod*  $2\pi$ ) beschreibende reelle Zahl  $\lambda$  befindet sich im Intervall  $[0; 1[$ . Die der Drehung entsprechende Abtragung auf dem Intervall  $[0; 1[$  berechnet sich zu

$$x_{k+1} = x_k \oplus \omega = (x_k + \lambda) \text{ mod } 1$$

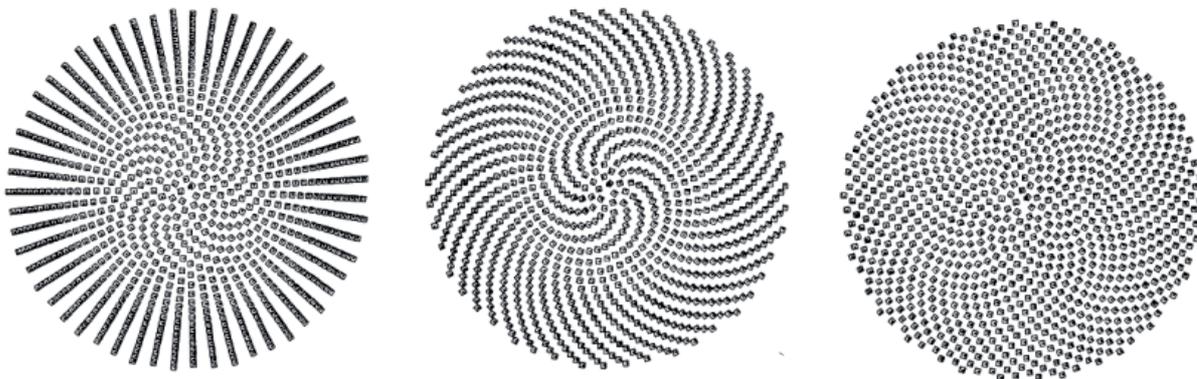


Abbildung 6: Das Vogel-Modell mit rationalem  $\omega$  (links) und irrationalem  $\omega$  (mitte, rechts).

**Satz (Cauchy):**

Ist  $\omega$  irrational, so liegt die Iterations-Folge  $x_k := R_\omega(x_{k-1})$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$  dicht in  $[0;1[$ .

Bei der Iteration um den irrationalen Winkel  $\omega$  entsteht keine Periode, d.h., dass zwei Iterationspunkte niemals aufeinander liegen.

**Definition:**

Ein **linker bzw. rechter Nachbar** von  $x_0$  ist ein  $x_k$ , für das kein  $x_j$  mit  $j < k$  zwischen 0 und  $x_k$  liegt.

**Satz 1:**

Linke Nachbarn approximieren den Drehwinkel  $\omega$  durch eine obere Schranke, rechte Nachbarn approximieren ihn durch eine untere Schranke.

**Satz 2:**

Sind  $x_l$  und  $x_r$  linke bzw. rechte Nachbarn von  $x_0$ , sowie  $p_l$  und  $p_r$  die zugehörigen Umlaufzahlen mit:

$$\begin{aligned} p_r &= \lfloor \omega r \rfloor \\ p_l &= \lfloor \omega l \rfloor + 1, \end{aligned}$$

so gilt:

$$\frac{p_r}{r} < \omega < \frac{p_l}{l}.$$

Sei  $x_n$  nächster Nachbar von 0. Dann gilt  $d(x_n, 0) = |n\omega - p_n|$ . D.h., dass die nächsten Nachbarn von  $x_0$  (linker Nachbar und rechter Nachbar) die besten Approximationen von  $\omega$  sind.

Wir wissen nun also, dass die nächsten Nachbarn von  $x_0$  diesen Wert laut unserer Definition am besten approximieren.

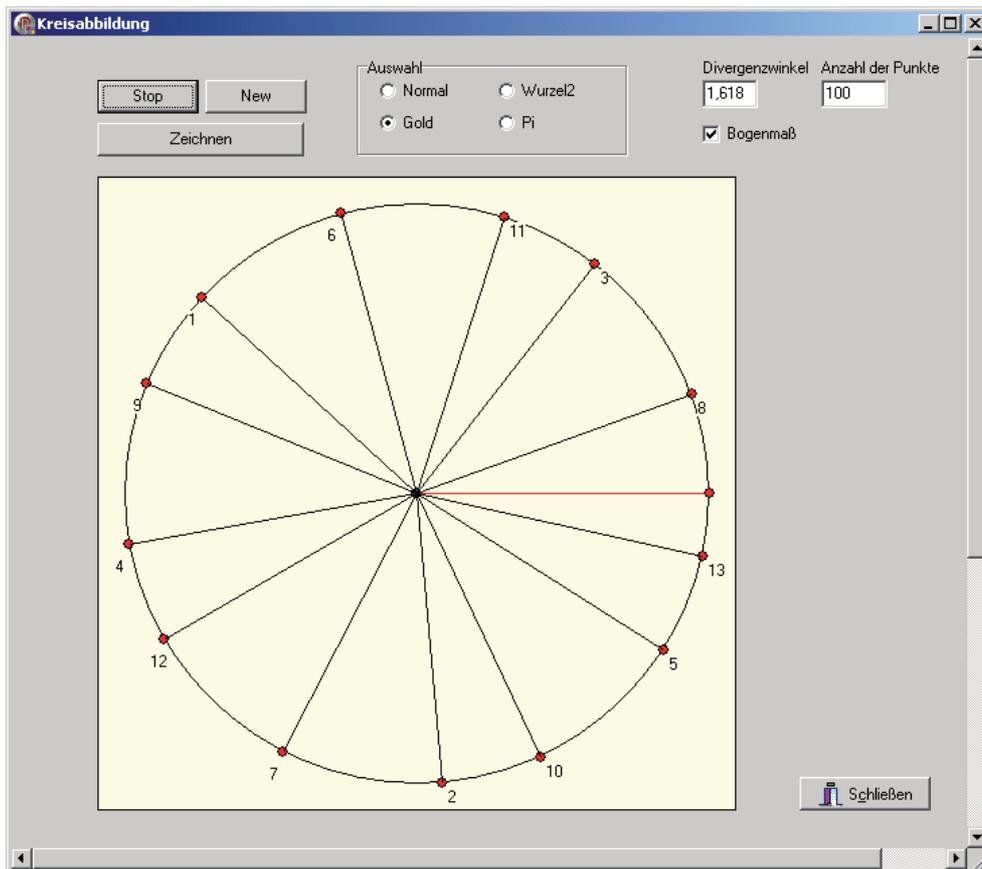


Abbildung 7: Programm zur Untersuchung von Kreisabbildungen

## 6 Kettenbrüche

Eine andere Möglichkeit irrationale Zahlen zu approximieren besteht darin, sie als Kettenbrüche darzustellen. Diese entwickeln sich aus dem Euklidischen Algorithmus.

### 6.1 Der Euklidische Algorithmus

Dieser Algorithmus ermittelt den größten gemeinsamen Teiler (ggT) zweier natürlicher Zahlen  $m$  und  $n$  mit  $m, n > 0$ .

$$\begin{aligned}
m &= a_0 n + r_1 \\
n &= a_1 r_1 + r_2 \\
r_1 &= a_2 r_2 + r_3 \\
&\dots \\
r_{k-1} &= a_k r_k
\end{aligned}$$

Dabei gilt für alle  $r_k$ :  $0 \leq r_k < r_{k-1}$ .

Die entstehende Folge  $(r_k)$  ist streng monoton fallend. Damit ist der Algorithmus in endlich vielen Schritten beendet und  $r_k$  als ggT von  $m$  und  $n$  identifiziert.

## 6.2 Kettenbruchentwicklung

Umstellung des Euklidischen Algorithmus ergibt:

$$\begin{aligned}
\frac{m}{n} &= a_0 + \frac{r_1}{n} \\
\frac{n}{r_1} &= a_1 + \frac{r_2}{r_1} \\
\frac{r_1}{r_2} &= a_2 + \frac{r_3}{r_2} \\
&\dots \\
\frac{r_{k-1}}{r_k} &= a_k
\end{aligned}$$

Durch einfaches Einsetzen entsteht der Kettenbruch:

$$\frac{m}{n} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{\dots a_{k-1} + \frac{1}{a_k}}} =: [a_0; a_1, a_2, \dots, a_k]$$

Irrationale Zahlen werden auf diese Weise durch unendliche Kettenbrüche dargestellt.

## 6.3 Eigenschaften von Kettenbrüchen

### 6.3.1 Definition

Sei  $x \in \mathbb{R}$  als Kettenbruch dargestellt mit

$$x = [a_0; a_1, a_2, \dots] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}}$$

Dabei heißt  $\frac{P_i}{Q_i} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_i]$  die  $i$ -te **Konvergente** und  $a_i$  der  $i$ -te **Teilnenner** von  $x$ .

Die Konvergenten haben folgende wichtige Eigenschaften:

### 1. Hauptsatz

1. Für  $k \geq 1$  gilt:

$$\begin{cases} P_{k+1} = a_k \cdot P_k + P_{k-1} \\ Q_{k+1} = a_k \cdot Q_k + Q_{k-1}. \end{cases}$$

2. Für  $k \geq 0$  gilt:

$$\frac{P_{2k}}{Q_{2k}} < x < \frac{P_{2k+1}}{Q_{2k+1}}$$

Anmerkung: Der Beweis kann induktiv geführt werden.

### 2. Hauptsatz

Eine reelle Zahl  $x$  habe die Kettenbruchentwicklung  $x = [a_0, a_1, \dots]$ . Dann sind alle Konvergenten  $\frac{P_k}{Q_k}$  für  $k \geq 1$  jeweils beste Näherung zweiter Art von  $x$ .

## 6.4 Betrachtung von $\tau$

$\tau = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$  hat die Kettenbruchentwicklung

$$\tau = 0 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}} = [0; \bar{1}]$$

und die Konvergenten:

$$\frac{P_0}{Q_0} = \frac{0}{1}, \quad \frac{P_1}{Q_1} = \frac{1}{1}, \quad \frac{P_2}{Q_2} = \frac{1}{2}, \dots$$

$$\frac{P_{k+1}}{Q_{k+1}} = \frac{P_k + P_{k-1}}{Q_k + Q_{k-1}} = \frac{F_{k+1}}{F_{k+2}}$$

Dieses gilt, weil  $a_k = 1$  für alle  $k \in \mathbb{N}, k > 0$ .

## 6.5 Zusammenhang

Mit dem 2. Hauptsatz der Kettenbruchlehre sind die Konvergenten  $\frac{F_{k+1}}{F_{k+2}}$  beste Approximationen zweiter Art von  $\tau$ . Die Zahlen der Fibonacci-Folge treten sowohl im Nenner als auch im Zähler auf. Weiterhin nähern sich diese  $\tau$  folgendermaßen an:

$$\frac{F_{2k}}{F_{2k+1}} < \tau < \frac{F_{2k+1}}{F_{2k+2}}$$

Die nächsten Nachbarn von  $\tau$  sind Approximationen zweiter Art, genauso wie es die Konvergenten des Kettenbruches von  $\tau$  sind. Da diese als Quotient zweier Fibonacci-Zahlen dargestellt werden und die Definition der Approximation zweiter Art eindeutig ist, müssen die Näherungsbrüche für  $\tau$ , die aus den nächsten Nachbarn hervorgehen, mit diesen Konvergenten übereinstimmen.

Damit ist das Auftreten der Fibonacci-Zahlen in der Anzahl der Spiralen einer Pflanze, bei der die Blattanlagen im goldenen Winkel  $2\pi\tau$  gebildet werden, mathematisch erwiesen.

## 7 Zusammenfassung

Mit Hilfe der Kettenbrüche konnten wir einen Zusammenhang zwischen den Fibonacci-Zahlen und dem Goldenen Winkel aufzeigen und mit den Kreisiterationen visualisieren. Die Frage, wie die Natur den Goldenen Schnitt realisiert, ist dabei unbeantwortet geblieben und ist noch heute eine offene Frage in der Forschung.

## 8 Quellen

Beutelspacher, A.; Petri, B., 1995. *Der Goldene Schnitt*. BI Wissenschaftsverlag.

Khinchin, A.Ya., 1964. *Continued Fractions*. Chicago.

Prusinkiewicz, P.; Lindenmayer, A., 1990. *The Algorithmic Beauty of Plants*. Springer Verlag.

Vogel, H., 1979. A better way to construct the sunflower head. *Math. Biosci.* 44. 179-189.

Worobjow, N.N., 1971. *Die Fibonaccischen Zahlen*. Verlag der Wissenschaft, Berlin.