Sind 7 Mischungen genug?

Teilnehmer:

Leo Batzke	Herder-Oberschule
Dietmar Funck	Herder-Oberschule
Philipp Kähler	Georg-Forster-Oberschule
Verena Klös	Herder-Oberschule
Christian Renau	Heinrich-Hertz-Oberschule
Jana Schulz	Andreas-Oberschule

Gruppenleiter:

Elke Warmuth	Humboldt-Universität zu Berlin, Mitglied im DFG-Forschungszentrum MATHEON „Mathematik für Schlüsseltechnologien“

Nach wie vielen Mischungen kann ein Kartenspiel mit 52 Karten als „gut gemischt“ gelten? Dieser Frage sind wir auf der Grundlage eines mathematischen Modells für eine verbreitete Form des Mischens nachgegangen. Zufällige Permutationen, kombinatorisches Zählen, Wahrscheinlichkeitsverteilungen und deren Abstände haben dabei eine Rolle gespielt. Als Ausblick haben wir untersucht, was dieses Problem mit Markov-Ketten und deren stationären Zuständen zu tun hat.

1 Der Kartentrick

1.1 Beschreibung des Kartentricks

Jeder hat schon einmal einen Kartentrick vorgeführt bekommen. Wenn man sich mit dem Thema „Mischen von Spielkarten“ beschäftigt, kommt man etwas sehr Interessantem auf die Schliche. Dabei wird ein geordnetes Kartenspiel zunächst zweimal per Riffle Shuffle, wie im weiteren Text beschrieben, gemischt. Anschließend hebt einer der Zuschauer die oberste Karte des Stapels ab, merkt sie sich, ohne sie dem „Magier“ zu zeigen, und schiebt sie in den Stapel. Das geübte Auge erkennt anschließend an der Reihenfolge der Karten, trotz zweimaliger Mischung, die eingeschobene.

1.2 Erklärung des Kartentricks

Um den Kartentrick erklären zu können, muss zuvor der Begriff „aufsteigende Sequenz“ eingeführt werden. Dafür wird ein Beispiel mit acht nummerierten Karten, die mit Hilfe des Riffle Shuffle gemischt werden, verwendet. Eine mögliche Reihenfolge, die durch diesen Mischvorgang entstehen kann, ist: 51263784. In dieser Aufeinanderfolge der Karten gibt es zwei aufsteigende Sequenzen: 1234 und 5678. Man kann hierbei erkennen, dass der Kartenstapel zwischen der vierten und fünften Karten geteilt wurde. Da die Karten in den einzelnen Stapeln noch in ihrer ursprünglichen Reihenfolge vorhanden sind und die Reihenfolge des einen Stapels nur durch die Karten des anderen unterbrochen ist, sind die aufsteigenden Sequenzen noch zu erkennen.
Bei dem Kartentrick benutzt man die Existenz der aufsteigenden Sequenzen nach dem Mischen durch den Riffle Shuffle. Wird die obere Karte vom Stapel genommen und dann in eine beliebige Stelle des Kartenstapels hineingesteckt, passt diese nicht mehr zu den aufsteigenden Sequenzen. Denn nach einem Mischvorgang sind nur maximal zwei aufsteigende Sequenzen im Stapel vorhanden und die hineingesteckte Karte würde dann eine dritte aufsteigende Sequenz, die aus einer einzigen Zahl besteht, bilden. Wenn also bei dem Beispiel die Karte vier von oben in den Stapel gesteckt wird, dann könnte folgende Reihenfolge entstehen: 51264378. Da nun die vier in keine der beiden aufsteigenden Sequenzen hineingehört, kann man sofort erkennen, dass diese Karte gezogen wurde.
Den Kartentrick kann man natürlich noch optimieren, indem man ein vollständiges Skatblatt benutzt und den Stapel dreimal mit Hilfe des Riffle Shuffle mischt. Nach diesem Vorgang können maximal $2^3 = 8$ aufsteigende Sequenzen vorhanden sein.
Die Wahrscheinlichkeit, dass der Kartentrick funktioniert, ist sehr hoch. Es kann

jedoch auch vorkommen, dass man die gesuchte Karte nicht herausfindet.

2 Der Riffle Shuffle

Der Riffle Shuffle ist die gebräuchlichste Art ein Kartendeck zu mischen. Man teilt den vorhandenen Kartenstapel in zwei Teile und verteilt diese auf die linke und die rechte Hand. Nun greift man mit den jeweiligen Daumen an eine Ecke, führt diese Ecken zueinander und zieht die Daumen so nach oben, dass sich die Karten von der linken und der rechten Hand möglichst einzeln ineinander ordnen. Diesen Vorgang kann man beliebig oft wiederholen, bis man glaubt, dass der Kartenstapel ausreichend gemischt ist.

3 Grundlagen

3.1 Permutationen

Beim Mischen verändert man die Reihenfolge der Karte. Im mathematischen Modell betrachtet man dafür Permutationen.
Was ist das?
Als Permutationen bezeichnet man die Abbildung einer n-elementigen Menge auf sich selbst. Eine Permutation wird durch explizite Angabe von Urbild und Bild beschrieben. Eine häufig verwendete Darstellungsform ist eine zweizeilige und n-spaltige Matrix. Dabei wird das Urbild in die obere Zeile und das Bild in die untere Zeile geschrieben.
Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 1 & 7 & 6 \end{pmatrix}$$

Die Menge aller Permutationen von n Elementen nennt man S_n. Beim Verknüpfen zweier Permutationen $\pi \circ \tau$ wendet man zuerst die rechte Permutation τ und anschließend π auf das Ergebnis an.
Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

S_n ist eine Gruppe, das heißt, dass sie folgende Eigenschaften erfüllt:

1) Die Verknüpfung ist eine innere Komposition. Das Ergebnis der Verknüpfung

ist also ebenfalls ein Element von S_n.
2) Es gibt ein universell neutrales Element, so dass bei der Verknüpfung mit diesem die Permutation nicht verändert wird.
3) Es gibt für jedes Element ein individuell inverses Element, so dass die Verknüpfung eines Elementes mit seinem inversen das neutrale Element ergibt.
4) Das Assoziativgesetz muss gelten.

Am Beispiel von S_3 kann man die Erfüllung dieser Eigenschaften überprüfen:
1) s. obiges Beispiel

2)

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}$$

3)

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$$

4)

$$\begin{aligned}\left(\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\right)\circ\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\circ\left(\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\right) &= \begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Weitere Eigenschaften

- ord $S_n = n!$
- S_n ist nicht kommutativ für $n \geq 3$.

3.2 Wahrscheinlichkeitsverteilungen und Zählungen

Das Mischen der Spielkarten stellt einen Prozess mit (mehr oder weniger) zufälligem Ergebnis dar, es ist daher notwendig, sich mit Wahrscheinlichkeiten zu befassen.
Als Beispiel sei hier ein perfekter Würfel angenommen, der einmal geworfen wird. Seine Ergebnismenge umfasst die möglichen Augenzahlen.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

Jede Teilmenge A von Ω wird als Ereignis bezeichnet.

Beispiele:

1) A: Würfeln einer 3 ($A = \{3\}$)
2) B: Würfeln einer geraden Zahl ($B = \{2, 4, 6\}$)
3) Zweistufiges Zufallsexperiment. C: nacheinander werden 2 und 5 gewürfelt. ($C = \{(2, 5)\}$)
Für das letzte Zufallsexperiment wäre die Ergebnismenge die Menge aller geordneten Paare von $(1, 1)$ bis $(6, 6)$.

Als Wahrscheinlichkeitsverteilung bezeichnet man die Zuordnung der entsprechenden Wahrscheinlichkeiten zu den Elementarereignissen, den Elementen der Ergebnismenge. Für einen perfekten Würfel wäre das:

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Für allgemeine und unbekannte Verteilungen nimmt man üblicherweise $p_1, p_2, ..., p_n$ für die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$, die auch nicht unbedingt gleichgroß sein müssen, womit die Verteilung nicht zwangsläufig eine Gleichverteilung ist.
Aus obenstehender Tabelle ist sofort die Wahrscheinlichkeit für A ersichtlich, nämlich $P(A) = \frac{1}{6}$. Die Wahrscheinlichkeit für B ist, da die einzelnen Elementarereignisse in B einander ausschließen, die Summe der Einzelwahrscheinlichkeiten, mithin $P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$. Allgemein gilt bei Gleichverteilung, d.h. wenn alle Elementarereignisse aus Ω die gleiche Wahrscheinlichkeit haben, und wenn alle Ergebnisse in A paarweise disjunkt sind, also einander ausschließen:

$$P(A) = \frac{\text{ord } A}{\text{ord } \Omega}$$

Wie man mit Hilfe eines Baumdiagramms leicht verdeutlichen kann, ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignis C gerade das Produkt der einzelnen Wahrscheinlichkeiten jedes Wurfs, da beide Würfe voneinander unabhängig sind, also $P(C) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$.

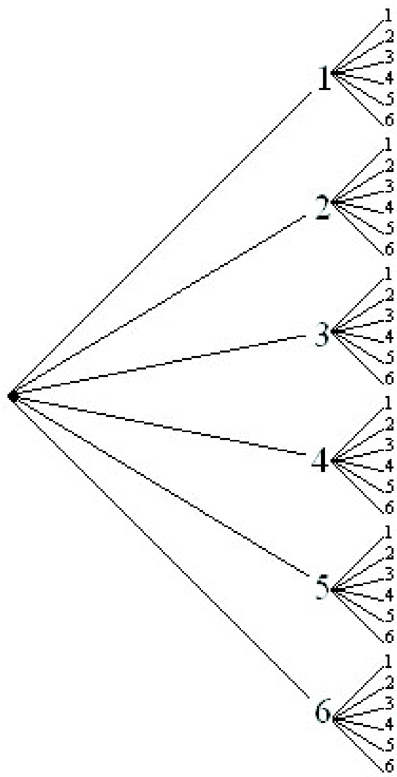

Abbildung 1: Baumdiagramm für zweimaliges Würfeln

Zwei Ereignisse sind, anschaulich gesprochen, dann voneinander unabhängig, wenn das Eintreten des ersten keinen Einfluß auf das Eintreten des zweiten hat. Wie aus Beispiel B ersichtlich ist es für die Berechnung von Wahrscheinlichkeiten unerlässlich ein Zählsystem zu entwickeln. Ein Ansatz ist bereits bei den Permutationen erkennbar. Wir benötigen hier vor allem den sogenannten Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$. Dieser gibt die Anzahl aller k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge an. Dies ergibt sich wie folgt:
Es gibt $n!$ Möglichkeiten n Elemente einer Menge anzuordnen. Es interessieren uns jedoch nur k Elemente, deren Ordnung untereinander, gegeben durch $k!$ egal ist. Genausowenig interessiert uns jedoch die Reihenfolge der verbleibenden $n-k$ Elemente, die sich mit $(n-k)!$ bemisst. Es verbleiben also noch $\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$ mögliche Mengen.

4 Mathematische Modellierung des Mischvorgangs

Man kann einen Mischvorgang an einem Kartenspiel nun als eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über alle möglichen Permutationen des Decks auffassen. Ausgehend vom jungfräulichen, geordneten Deck erhält man je nach Art der Mischung mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit eine bestimmte Kartenfolge. Als Beispiel soll hier der denkbar einfachste Mischvorgang dienen, das Abheben der obersten Karte und das Hineinschieben derselben irgendwo in den Stapel.

Permutation	123	132	213	231	312	321
Kartenfolge	123	132	213	312	231	321
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0

Die drei überhaupt möglichen Anordnungen haben natürlich nur unter der Annahme diese Wahrscheinlichkeit, dass alle drei Möglichkeiten die Karte 1 in den Stapel zurückzuschieben gleichermaßen wahrscheinlich sind. Es ist jedoch eher ungewöhnlich die Karte an ihren ursprünglichen Platz zu legen. Auch unser Modell des Riffle Shuffle weist solche kleinen Mankos auf, doch dazu später mehr. Die verbleibenden beiden können nicht auftreten, da es auch noch notwendig wäre die Karten 2 und 3 zu vertauschen.
Wenden wir uns nun dem Riffle Shuffle zu.
Im ersten Schritt wird der gesamte Kartenstapel mit n Karten in zwei Stapel zu k und $n-k$ Karten geteilt. Auf Basis der Annahme, dass der Mischende sich bemüht mittig zu teilen, erscheint eine Binomialverteilung sinnvoll. Wie sicher bekannt ist, steigen die Werte des Binomialkoeffizienten $\binom{n}{k}$ bis $k = \frac{n}{2}$ bzw. $k = \frac{n-1}{2}$ an und sinken dann wieder ab. (Dies sieht man sehr gut am Pascalschen Dreieck.) Da die Summe $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$ gleich 2^n ist ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{\binom{n}{k}}{2^n}$ für die Teilung des Stapels an der k-ten Stelle. Wie man leicht sieht, ist es in diesem Modell möglich, dass einer der Stapel keine Karten enthält. Realistisch betrachtet ist es eigentlich mehr als ungebräuchlich einen Kartenstapel auf diese Weise zu teilen.
Für das Zusammenschieben der beiden Stapel ergeben sich $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten. Dies kann man sich plausibel machen, indem man sich einen „leeren“ Stapel mit n freien Plätzen vorstellt. Von diesen sucht man sich k aus an die, unter Beibehaltung der internen Reihenfolge, die k Karten des einen Stapels einsortiert werden. Damit sind auch die Plätze der übrigen $n-k$ Karten festgelegt, da auch ihre Reihenfolge nicht geändert wird. Wir nehmen in unserem Modell an, dass alle diese Möglichkeiten dieselbe Wahrscheinlichkeit besitzen.
Da die Teilung und das Zusammenschieben voneinander unabhängig sind kann man die Einzelwahrscheinlichkeiten multiplizieren.

$$\frac{\binom{n}{k}}{2^n} \cdot \frac{1}{\binom{n}{k}} = \frac{1}{2^n}$$

Eine Folge aus einer bestimmten Teilung und einer bestimmten Zusammenschiebung hat also diese Wahrscheinlichkeit. Allerdings ist es möglich, die identische Permutation auf mehreren Wegen zu erreichen, so dass wir uns dies genauer ansehen sollten.
Als anschauliches Beispiel soll hier wieder der Stapel aus drei Karten dienen.

Teilungsposition k	Teilung	Wahrscheinlichkeit	Zusammenschiebung
0	$\|123$	$\frac{1}{8}$	123
1	$1\|23$	$\frac{3}{8}$	$123, 213, 231$
2	$12\|3$	$\frac{3}{8}$	$123, 132, 312$
3	$123\|$	$\frac{1}{8}$	123

Die Kartenreihenfolge umzukehren ist so nicht möglich, da die Reihenfolge der Karten im Stapel nicht geändert wird. Wie leicht erkennbar ist, kann man nun folgende Wahrscheinlichkeitsverteilung aufstellen.

Permutation	123	132	213	231	312	321
Kartenfolge	123	132	213	312	231	321
Wahrscheinlichkeit	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0

4.1 a-Shuffle

Um zu sehen, was sich bei einer Hintereinanderausführung von Riffle Shuffles für Wahrscheinlichkeiten ergeben, nimmt man die a-Shuffles zu Hilfe.
Man teile das Kartendeck in a Kartenstapel, wobei sie die Größen (≥ 0) $s_1, ..., s_a$ haben mit $s_1 + s_2 + ... + s_a = n$. Anschließend fügt man die Kartenstapel wieder zu einem Stapel zusammen. Dabei ist lediglich darauf zu achten, dass die relative Ordnung zwischen den Karten eines jeden Kartenstapels erhalten bleibt. Diese Form des Mischen bezeichnen wir als a-Shuffle.
Nun betrachten wir die Wahrscheinlichkeiten. Jede Aufteilung in a Stapel mit den Größen $s_1, ..., s_a$ hat die Wahrscheinlichkeit:

$$\frac{\binom{n}{s_1, ..., s_a}}{a^n}$$

Bei dem Term im Zähler handelt es sich um dem sogenannten Multinomialkoeffizienten. Dieser gibt die Zahl der Möglichkeiten an, eine n-elementige Menge in a Teilmengen mit den jeweiligen Größen $s_1, ..., s_a$ zu teilen.

Von einer beliebigen Aufteilung ausgehend, haben alle Arten des Zusammenfügens der a Kartenstapel die gleiche Wahrscheinlichkeit. Dazu berechnen wir die Anzahl der Möglichkeiten die n-Positionen des Decks auszuwählen. Die Anzahl ist wie folgt gegeben:

$$\binom{n}{s_1, ..., s_a}$$

Wieder nehmen wir an, dass jede dieser Möglichkeiten dieselbe Wahrscheinlichkeit besitzt, also:

$$\frac{1}{\binom{n}{s_1,\ldots,s_a}}$$

Nun ergibt sich die Wahrscheinlichkeit für die Kombination einer Aufteilung und einer Zusammenfügung aus dem Produkt der beiden Einzelwahrscheinlichkeiten:

$$\frac{\binom{n}{s_1,\ldots,s_a}}{a^n} \cdot \frac{1}{\binom{n}{s_1,\ldots,s_a}} = \frac{1}{a^n}$$

Daher ergibt es sich, dass alle Kombinationen die gleiche Wahrscheinlichkeit haben. Dies ist damit genauso wie beim Riffle Shuffle. Betrachtet man das a-Shuffle, stellt man fest, dass der Riffle Shuffle ein Spezialfall des a-Shuffles mit $a = 2$ ist.

Es gibt eine Codierungsmethode, um zu erkennen, wie der a-Shuffle funktioniert. Dazu nimmt man eine Zahl mit n Ziffern zur Basis a. Wir nennen sie A. Als erstes zählt man die Anzahl der Nullen in der Zahl A. Diese Anzahl ist die Größe des ersten Stapels. Danach zählt man die Anzahl der Einsen in der Zahl A und diese Anzahl ist die Größe des zweiten Stapels. So verfährt man mit allen Ziffern der Basis-a-Zahl. Dabei entstehen a Stapel. Nun schreibt man sich die Zahlen von 1 bis n auf und unterteilt sie entsprechend der Stapelgrößen. Danach kommen an die Stellen wo bei A die Nullen sind die Zahlen des ersten Stapels hin. Die Zahlen des zweiten Stapels kommen da hin, wo die Einsen in A sind. So verfährt man mit allen Stapeln. Bei dem Ersetzen ist darauf zu achten, dass die relative Ordnung zwischen den Zahlen eines jeden Stapels erhalten bleibt. Als Ergebnis erhält man das gemischte Kartendeck bezüglich des speziellen Aufteilens und Zusammenfügens bezüglich A. Durch die Codierungsmethode wird allerdings π^{-1} und nicht π beschrieben.

4.2 Das Multiplikationstheorem

Das Multiplikationstheorem besagt, dass ein a-Shuffle gefolgt von einem b-Shuffle das gleiche ist wie ein $a \cdot b$-Shuffle. Zum Beweis lässt sich die eben verwendete Codierungsmethode gebrauchen.

Satz:

- Die durch $A^B\&B$ erzeugten Codes sind n-stellige Basis-ab-Zahlen.
- Die Zuordnung $(A, B) \leftrightarrow A^B\&B$ ist bijektiv.

Beweis:

1) $\begin{array}{l} A^B \; x_1....x_n \mid \cdot b \\ B \; y_1....y_n \end{array}$

An der i-ten Stelle gilt:

$$0 \leq x_i \cdot b + y_i \leq (a-1) \cdot b + b - 1 = a \cdot b - 1$$

2)

$$A^B \& B = \sum_{i=0}^{n-1} (A_i^B \times b + B_i) \times (a \times b)^i$$

Der Beweis ergibt sich durch den Satz über die Division mit Rest.

Beispiel: $a = 3, b = 4, n = 6$
$A = 012210, B = 310100$

A	0	1	2	2	1	0	
A^B	0	2	0	1	1	2	$\mid \cdot b$
B	3	1	0	1	0	0	
$A^B \& B$	3	9	0	5	4	8	
π^{-1} :	2	6	1	4	3	5	

A^B bedeutet die Ziffern von A permutiert gemäß der durch B beschriebenen Permutation π.

5 Euler-Zahlen

Definition: $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ ist definiert als die Anzahl der Permutationen von $\{1, 2, ..., n\}$, die k Aufstiege haben. Ein Aufstieg ist eine Stelle in einer Permutation mit den Elementen π_i und π_{i+1}, an der $\pi_i < \pi_{i+1}$ gilt. Entsprechend gilt bei einem Abstieg $\pi_i > \pi_{i+1}$.

Beispiel: Alle Permutationen von $\{1, 2, 3, 4\}$, die 2 Aufstiege haben, wir wählen also $n = 4, k = 2$:

$1324, 1423, 2314, 2413, 3412, 1243, 1342, 2341, 2134, 3124$ und 4123.

$$\left\langle {4 \atop 2} \right\rangle \text{ ist also } 11.$$

Es können bei n Elementen höchstens $n-1$ Aufstiege vorkommen, deshalb ist $\left\langle {n \atop n} \right\rangle = 0$ und $\left\langle {n \atop 0} \right\rangle = 1$, weil $\{1, 2, ..., n\}$ genau eine Permutation ohne Aufstieg hat, nämlich die umgekehrte (nicht die inverse!) Permutation: $n...21$

Da die Elemente von $\{1, 2, ..., n\}$ nicht gleich sein können, hat jede Permutation an $n-1$ Stellen entweder einen Aufstieg oder einen Abstieg. Hat eine Permutation k Aufstiege, dann hat sie $n-1-k$ Abstiege.

Bei Umkehrung einer Permutation werden aus Aufstiegen Abstiege und andersrum. Da es genau $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$ Permutationen von $\{1, 2, ..., n\}$ mit k Aufstiegen gibt, gibt es genauso viele mit $n-1-k$ Abstiegen, nämlich genau die Umkehrungen, es gilt also:

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = \left\langle {n \atop n-1-k} \right\rangle$$

Die Euler-Zahlen lassen sich rekursiv berechnen, man definiert daher als Anfang:

$$\left\langle {0 \atop k} \right\rangle = 0 \text{ und } \left\langle {n \atop k} \right\rangle = 0 \text{ für } k < 0$$

Man nimmt sich eine Permutation $\rho = \rho_1 ... \rho_{n-1}$ von $\{1, 2, ..., n-1\}$. Dann stellt man das Element n in allen möglichen Positionen dazu. Stellt man es in Position j, erhält man Permutation $\pi = \rho_1 ... \rho_{j-1} n \rho_j ... \rho_{n-1}$. Die Anzahl der Aufstiege bleibt für $\rho_{j-1} < \rho_j$ und $j = 1$ gleich, bei $\rho_{j-1} > \rho_j$ und $j = n$ erhöht sie sich um 1.

Es gibt k Stellen, an denen $\rho_{j-1} < \rho_j$ gilt und eine für $j = 1$, und das bei allen $\left\langle {n-1 \atop k} \right\rangle$ Permutationen, analog gibt es in allen $\left\langle {n-1 \atop k-1} \right\rangle$ Permutationen $n-1-k$ Abstiege und $j = n$ als Möglichkeit, Permutationen mit k Aufstiegen zu erzeugen. Also erhält man für $\left\langle {n \atop k} \right\rangle$:

$$\left\langle {n \atop k} \right\rangle = (k+1) \left\langle {n-1 \atop k} \right\rangle + (n-k) \left\langle {n-1 \atop k-1} \right\rangle$$

6 Variationsabstand

6.1 Abstände/Metriken

Beispiele für Abstände:

1. $\mathbb{R}^1$, $\quad x, y \in R$, $\quad d(x, y) = |x - y|$ beschreibt einen Abstand zwischen zwei reellen Zahlen.

2.a Euklidische Metrik:
$\mathbb{R}^2$, $\quad P(x_1, y_1) \quad Q(x_2, y_2) \quad d(P, Q) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ beschreibt einen Abstand zwischen zwei Punkten P und Q.

b <u>Taximetrik:</u>
$\mathbb{R}^2, \quad d_1(P,Q) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$ beschreibt ebenfalls einen Abstand zwischen zwei Punkten P und Q.

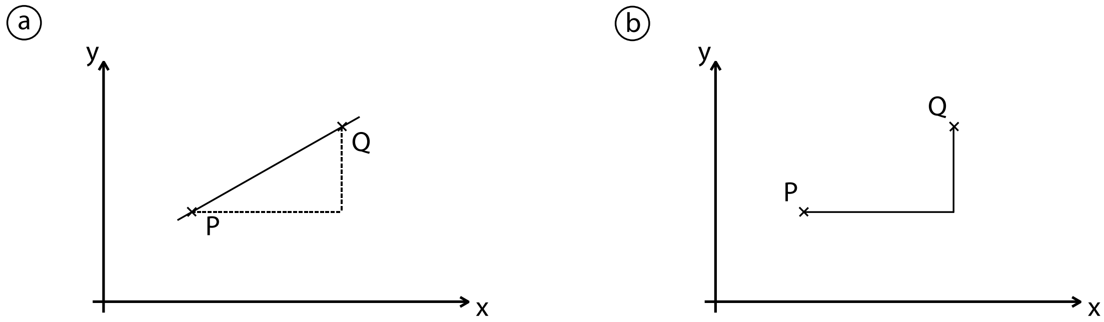

Abbildung 2: a) Euklidische Metrik b)Taximetrik

c <u>diskrete Metrik:</u>
$\mathbb{R}^2 \quad d_2(P,Q) = \begin{cases} 1 & P \neq Q \\ 0 & P = Q \end{cases}$ beschreibt ebenfalls einen Abstand zwischen zwei Punkten P und Q, sagt jedoch nichts über dessen Größe aus.

3. Sei X die Menge aller stetigen Funktionen auf $[a,b] \quad f,g \in X$

$$d(f,g) = \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$$

beschreibt den größten Abstand zweier Funktionen im Intervall $[a,b]$.

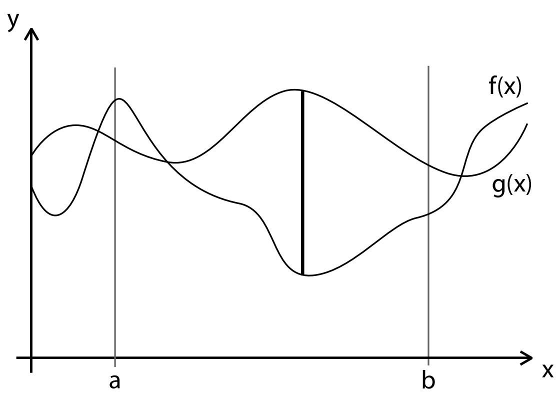

Abbildung 3: Metrik im Funktionenraum

<u>Definition: Metrik</u>
Sei X eine Menge und $x, y \in X$. Dann heißt $d : X \times X \to \mathbb{R}$ Metrik, wenn gilt:

(a) $d(x,y) > 0,$ falls $x \neq y,$ und $d(x,y) = 0,$ falls $x = y$

(b) $d(x,y) = d(y,x)$

(c) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad \forall \quad x,y,z \in X$ (Dreiecksungleichung)

<u>Definition: Metrischer Raum</u>
Die Menge, zwischen deren Punkten man einen Abstand definieren kann, heißt Metrischer Raum.

6.2 Variationsabstand

Es seien:

- W_n Menge aller Wahrscheinlichkeitsverteilungen auf $\{1, ..., n\}$
- $P = (p_1, p_2, ..., p_n) \in W_n$
- $Q = (q_1, q_2, ..., q_n) \in W_n$

dann gilt für den Variationsabstand zwischen P und Q:

$$2 * ||P - Q|| \to 2 * d(P,Q) = |p_1 - q_1| + |p_2 - q_2| + ... + |p_n - q_n|$$

$$||P - Q|| = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} |p_i - q_i| \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(|p_i| + |q_i|) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i = \frac{1+1}{2} = 1$$

$$\boxed{||P - Q|| \leq 1}$$

Mit:

- S_n ist die Gruppe aller Permutationen mit n Elementen
- $\pi \in S_n$
- $R^{(n)}$ ist die Verteilung nach n mal Riffle Shuffle
- R ist die Gleichverteilung auf S_n, d.h.: jede mögliche Permutation hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n!}$.

lässt sich der Variationsabstand nach n-maligem Riffle Shuffle durch

$$||R^{(n)} - R|| = \frac{1}{2}\sum_{\pi \in S_n} \left| R^{(n)}(\pi) - \frac{1}{n!} \right|$$

beschreiben.

<u>Was bedeutet das für unsere Karten?</u>

Um ein Kartendeck als gut gemischt anzusehen, müssen alle Permutationen ungefähr gleich wahrscheinlich sein. Unser Ziel ist es herauszufinden, nach wie vielen Mischungen der Variationsabstand hinreichend klein ist. Man betrachte den Variationsabstand als Funktion von r (Anzahl der aufsteigenden Sequenzen):

$$||R^{(k)} - R|| = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n} \left\langle {n \atop r-1} \right\rangle \left| \frac{\binom{2^k+n-r}{n}}{2^{nk}} - \frac{1}{n!} \right|$$

Jetzt stellt sich nur die Frage, wie man auf diese Funktion kommt:

Bei einem a-Shuffle teilt man den Kartenstapel in a verschiedene Stapel. Man hat den Stapel also $(a-1)$-mal geteilt. Von diesen $a-1$ Teilungen kann man nach dem Mischvorgang $r-1$ Teilungen, aufgrund der aufsteigenden Sequenzen des Kartenstapels erkennen, wobei r die Anzahl der aufsteigenden Sequenzen ist. Die restlichen $a-1-(r-1) = a-r$ Schnitte kann man nach dem Mischen der a Stapel nicht mehr erkennen. Man hat bei dem Zusammenschieben der Karten $\binom{a-r+n}{n}$ Möglichkeiten, n Karten auf $a-r+n$ Plätzen zu verteilen. Die $a-r+n$ Plätze ergeben sich dadurch, dass man jeden dieser Plätze entweder mit einem Schnitt oder einer Karte besetzen kann. Die Wahrscheinlichkeit einer Permutation mit r aufsteigenden Sequenzen ergibt sich aus der Formel $\frac{\binom{a-r+n}{n}}{a^n}$, wobei es a^n Möglichkeiten gibt, die Karten zu mischen.

Für einen Riffle Shuffle mit $a = 2$ Stapeln, der k-mal durchgeführt wird (2^k-Shuffle) ergibt sich folgender Variationsabstand:

$$||R^{(k)} - R|| = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n!} \left| R^{(k)}(\pi_i) - \frac{1}{n!} \right| = \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n} A_{nr} \left| \frac{\binom{2^k+n-r}{n}}{2^{nk}} - \frac{1}{n!} \right|$$

A_{nr} ist die Anzahl der Permutationen von n Elementen mit r aufsteigenden Sequenzen und ergibt sich aus der Formel: $A_{nr} = \left\langle {n \atop r-1} \right\rangle$

Das Einsetzen in die Gleichung für den Variationsabstand ergibt:

$$||R^{(k)} - R|| = \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{n} \left\langle {n \atop r-1} \right\rangle \left| \frac{\binom{2^k+n-r}{n}}{2^{nk}} - \frac{1}{n!} \right|$$

Wie man sieht, beträgt der Variationsabstand nach 7 mal Mischen nur noch $\frac{1}{2}$. Um eine noch bessere Mischung zu erhalten, sollte man noch 2 bis 3 mal mehr mischen.

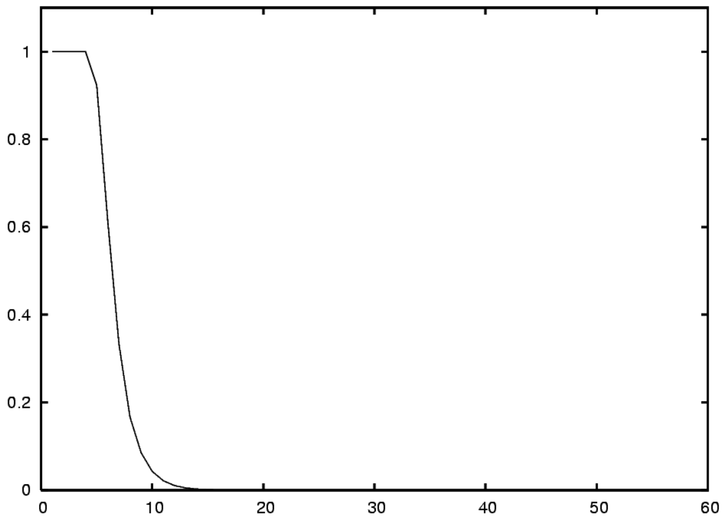

Abbildung 4: Variationsabstand nach k mal Mischen von 52 Karten

7 Modellierung mit Markov-Ketten

$T = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ sei eine Menge von diskreten Zeitpunkten und $I = \{1, 2, 3, ..., n\}$ eine endliche Menge diskreter Zustände. Dann heiße der Zustand des Systems zum Zeitpunkt k X_k. Außerdem sei $P(X_0 = j)$ mit $j \in I$ die Wahrscheinlichkeit, dass das System im Zustand j startet. (Man kann eine Markov-Kette auch für eine stetige Zeit bilden, aber für diskrete ist sie einfacher zu berechnen und zu erklären.)
Der zufällige Prozess (X_t), also die Folge von Einzelzuständen im Verlaufe der Zeit, heißt markovscher Prozess, falls für alle t_i und $j_0, j_1, \ldots, j_i$ gilt:

$$P(X_{t_i} = j_i | X_0 = j_0, X_1 = j_1, ..., X_{t_{i-1}} = j_{i-1}) = P(X_{t_i} = j_i | X_{t_{i-1}} = j_{i-1})$$

Anschaulich bedeutet das, dass es für den folgenden Schritt nicht wichtig ist, was in sämtlichen vorhergehenden Schritten geschehen ist, sondern lediglich, was im letzten Schritt passiert ist. Man benötigt also lediglich die Anfangsverteilung $P(X_0 = j)_{j=1,2,3,...,n}$ und die Übergangsverteilungen $P(X_{t+1} = j | X_t = i)_{i,j=1,2,3,...,n}$ für alle Zeitpunkte t. Man kann weiter vereinfachen, indem man, was beim Mischen ja auch der Fall ist, annimmt, dass diese Übergangswahrscheinlichkeiten zeitunabhängig sind, also es lediglich vom Ausgangspunkt und nicht von der aktuellen Zeit abhängt, wohin man als nächstes geht: $P(X_{s+1} = j | X_s = i) = p_{i,j}$ mit $i, j = 1, 2, 3, ..., n$ und beliebigen $s \in T$. Dies liest man: $p_{i,j}$ ist die Wahrscheinlichkeit vom Zustand i in den Zustand j zu wechseln.

Nun kann man eine Übergangsmatrix $\mathcal{P}$ definieren:

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix}$$

Die Verteilung im m-ten Schritt p_m errechnet sich nach der folgenden Formel: $p_m = p_0 \cdot \mathcal{P}$, wobei p_0 die Anfangsverteilung darstellt. p_m wird hierbei als n-elementiger Vektor aufgefasst. Wie Folgendes, welchselbiges man sich wiederum anhand eines Baumdiagramms plausibel machen kann, zeigt, entspricht dies auch der erwarteten Formel.

$$\begin{aligned}
(P(X_1 = j) &= \sum_{i=0}^{n} P(X_0 = i) \cdot P(X_1 = j | X_0 = i))_{j=1,2,3,\ldots,n} \\
(P(X_2 = j) &= \sum_{i=0}^{n} P(X_1 = i) \cdot P(X_2 = j | X_1 = i))_{j=1,2,3,\ldots,n} \\
(P(X_3 = j) &= \sum_{i=0}^{n} P(X_2 = i) \cdot P(X_3 = j | X_2 = i))_{j=1,2,3,\ldots,n} \\
\ldots \\
(P(X_{t+1} = j) &= \sum_{i=0}^{n} P(X_t = i) \cdot P(X_{t+1} = j | X_t = i))_{j=1,2,3,\ldots,n}
\end{aligned}$$

Obenstehendes sind Wahrscheinlichkeitsverteilungen, wobei die jeweilige Formel bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit zum Zeitpunkt $t+1$ im Ort j zu sein, die Summe der Wahrscheinlichkeiten von jedem der möglichen vorangegangen Orte i nach j zu kommen, die jeweils mit der Wahrscheinlichkeit, zum vorangegangenen Zeitpunkt am Ort i gewesen zu sein, gewichtet wird.

Beispiel

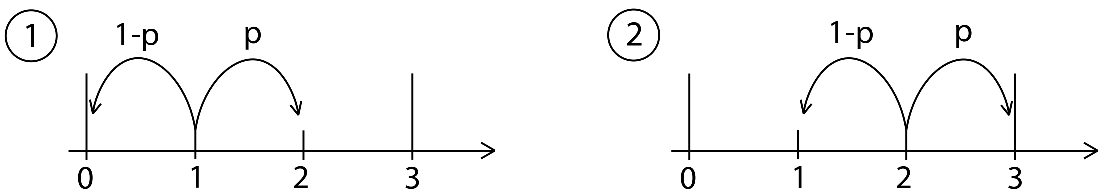

Abbildung 5: Irrfahrt mit reflektierenden Wänden

Anhand des obenstehenden Beispiels lässt sich eine einfache Markov-Kette darstellen. Als Anfangsverteilung sei $p_a = \{0, 1, 0, 0\}$. Wir starten also im Punkt

(1). Die Übergangswahrscheinlichkeiten hängen nur vom Ort ab, an dem wir uns befinden.

$$p_0 = \{0,1,0,0\}, p_1 = \{1-p,0,p,0\}, p_2 = \{0,1-p,0,p\}, p_3 = \{0,0,1,0\}$$

Es ist nicht möglich, innerhalb eines Schrittes am selben Ort zu verharren. Da bei (0) und (3) reflektierende Wände stehen, ist man gezwungen, von dort aus zum Herkunftsort zurückzukehren.

Die Formel $p_m = p_{m-1} \cdot \mathcal{P}$ mit p_0 lässt sich als Fixpunktproblem betrachten und mit den entsprechenden Verfahren lösen.
Allgemein lässt sich beweisen, dass für eine sogenannte stochastische Matrix (einer Matrix wie obenstehendes $\mathcal{P}$ mit den Eigenschaften $0 \le p_{i,j} \le 1$ und $\sum_{j=0}^{n} p_{ij} = 1$ für alle i, j bzw. i), dass wenn sie nach der Erhebung in eine ausreichend hohe Potenz nur noch positive Elemente aufweist, das zugehörige System einen sogenannten stationären Zustand besitzt, was einem Fixpunkt der linearen Abbildung entspricht.

Für das obenstehende Beispiel existiert ein solcher stationärer Zustand mit $p^* = \{\frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\}$

Zur Anwendung auf den Riffle Shuffle mit drei Karten gehen wir von einer Anfangsverteilung aus, die der identischen Permutation eine Wahrscheinlichkeit von 1 zuweist (was aber im Prinzip irrelevant ist), und benötigen nun noch die Übergangsmatrix $\mathcal{P}$.

Permutation	j	123	132	321	312	213	231
i	Kartenfolge	123	132	321	231	213	312
123	123	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
132	132	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
321	321	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
312	231	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
213	213	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	0
231	312	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{2}$

Wie man leicht überprüfen kann, hat bereits $\mathcal{P}^2$ nur noch positive Elemente, was bedeutet, dass es einen stationären Zustand gibt. Durch Lösung des Gleichungssystems $p^* = p^* \cdot \mathcal{P}$ lässt sich dieser ermitteln und stellt sich auch wirklich als die Gleichverteilung heraus.

Mit Hilfe des Variationsabstands ergibt sich für sieben Mischungen mit dem Riffle Shuffle bei einem Deck von 52 Karten ein Abstand von etwa $0,5$ von der Gleichverteilung, für zehn Mischungen rund $0,04$, wie es sich auch schon durch Betrachtung der Funktion ergab.