

# Hyperbolische Geometrie

## *Teilnehmer:*

Jakob Hoffmann	Heinrich-Hertz-Oberschule
Luise Jungnickel	Georg-Forster-Oberschule
Tim Klose	Heinrich-Hertz-Oberschule
Victor Kojoukhov	Herder-Oberschule
Sascha Kühl	Georg-Forster-Oberschule
Rami Nagi	Herder-Oberschule
Felix Rehn	Heinrich-Hertz-Oberschule

## *Gruppenleiter:*

Thomas Neukirchner	Humboldt-Universität zu Berlin
--------------------	--------------------------------

Ziel des Kurses war, die hyperbolische Geometrie der Ebene aus Sicht ihrer Isometrien zu erkunden. Als Ausgangspunkt haben wir zunächst die abstands- und orientierungserhaltenden Abbildungen der Euklidischen Ebene untersucht, und gezeigt, dass sie sich als Verknüpfung zweier Spiegelungen an Geraden darstellen lassen. Je nachdem, ob die Geraden parallel sind oder sich schneiden, entsteht als Abbildung eine Verschiebung oder Drehung.

Für das Poincaré-Scheiben-Modell der hyperbolischen Geometrie haben wir Geraden und Spiegelungen an ihnen definiert und daraus die Geometrie von hyperbolischen Kreisen und Dreiecken abgeleitet. Das geometrische Werkzeug dafür bestand im Wesentlichen aus der Inversion am Kreis. Abschließend wurde mit den erarbeiteten Mitteln bewiesen, dass der Flächeninhalt eines sphärischen bzw. hyperbolischen Dreiecks sich aus dessen Winkelsumme bestimmt. Diese Tatsache zeigt sich eindrucksvoll in einigen Bildern von M.C.Escher.

Neben der theoretischen Kursarbeit haben sich die Teilnehmer intensiv mit der dynamischen Geometrie Software *Cinderella* beschäftigt, mit der auch alle Illustrationen des vorliegenden Textes erstellt wurden.

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Euklidische Geometrie der Ebene</b>	<b>71</b>
1.1	Parallelen-Axiom . . . . .	71
1.2	Isometrien . . . . .	71
<b>2</b>	<b>Sphärische Geometrie</b>	<b>72</b>
2.1	Winkelsumme eines sphärischen Dreiecks . . . . .	72
<b>3</b>	<b>Inversion am Kreis</b>	<b>74</b>
3.1	Geometrische Konstruktion . . . . .	75
3.2	Kreisverwandtschaft und Winkeltreue . . . . .	76
<b>4</b>	<b>Poincaré-Scheiben-Modell der hyperbolischen Geometrie</b>	<b>78</b>
4.1	$\Omega$ -Geraden und Parallelen . . . . .	78
4.2	Spiegelung und Abstandsbegriff . . . . .	79
<b>5</b>	<b>Steiner's Kreiskette</b>	<b>80</b>
<b>6</b>	<b>Winkelsumme im hyperbolischen Dreieck</b>	<b>82</b>
<b>7</b>	<b>Konstruktionen mit Zirkel und Lineal</b>	<b>85</b>
7.1	$\Omega$ -Gerade durch zwei Punkte $A$ und $B$ . . . . .	85
7.2	$\Omega$ -Kreis durch $A$ mit Mittelpunkt $M$ . . . . .	86
7.3	M.C.Escher . . . . .	86
<b>8</b>	<b>Schlussbetrachtung</b>	<b>87</b>

# 1 Euklidische Geometrie der Ebene

## 1.1 Parallelen-Axiom

Die Euklidische Geometrie befasst sich mit den Eigenschaften von Punkten, Geraden, Kreisen und Winkeln. Ihr axiomatischer Aufbau hat sich über zwei Jahrtausende bewährt, führte aber auch zu einer Frage, auf die lange Zeit keine Antwort gefunden werden konnte: Ist das Parallelenaxiom eine logische Folgerung der anderen Euklidischen Axiome?

**Parallelenaxiom der Euklidischen Geometrie:** Gegeben seien eine Gerade  $l$  und ein Punkt  $P \notin l$ . Dann existiert genau eine Gerade  $m$  durch den Punkt  $P$ , die  $l$  nicht schneidet. Eine solche Gerade wird als Parallele bezeichnet:  $l \parallel m$ .

Heutzutage stehen die analytischen Methoden der Geometrie im Vordergrund, da sie sich wesentlich leichter handhaben lassen als eine aus Axiomen synthetisch aufgebaute Geometrie. Eine wesentliche Rolle spielen dabei Isometrien.

## 1.2 Isometrien

Eine Isometrie ist eine Abbildung der Ebene auf sich selbst, bei der Längen und somit auch Winkel unverändert bleiben. Beispiele für Isometrien sind:

- **Spiegelung:** Die Spiegelung an einer Geraden  $l$  bezeichnen wir mit  $S_l$ . Die Spiegelung kehrt die Orientierung um.
- **Translation:** Sie ist die Verknüpfung  $S_l \circ S_m$  zweier Spiegelungen an parallelen Geraden  $l \parallel m$  und entspricht der Verschiebung längs einer Geraden senkrecht zu  $l, m$ . Die Translation erhält die Orientierung.
- **Rotation:** Sie ist die Verknüpfung  $S_l \circ S_m$  zweier Spiegelungen an nichtparallelen Geraden  $l \not\parallel m$  und entspricht der Drehung um deren Schnittpunkt  $P = l \cap m$ .

Allgemein gilt:

**Satz 1.1.** *Jede Isometrie der Ebene ist die Verknüpfung von 1, 2 oder 3 Spiegelungen an Geraden. Insbesondere ist eine orientierungserhaltende Isometrie entweder eine Translation oder eine Rotation.*

All das führt uns zu der Frage, wie eine Geometrie beschaffen sein müsste, bei der es keine Parallelen bzw. viele Parallelen gibt?

## 2 Sphärische Geometrie

Als Modell der sphärischen Geometrie betrachten wir die Oberfläche einer Kugel, auch Sphäre genannt, und definieren:

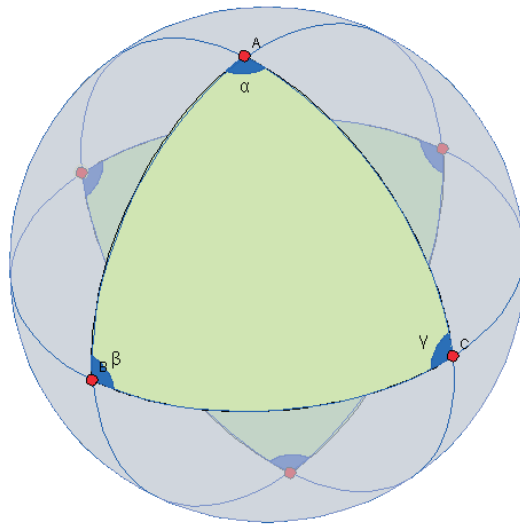
- **S-Geraden** sind Großkreise, d.h. Schnitte der Sphäre mit Ebenen durch den Mittelpunkt.
- **S-Punkte** sind Paare antipodaler, also einander gegenüberliegender Punkte auf einer S-Geraden.
- **S-Winkel** entsprechen den Euklidischen Schnittwinkel von Großkreises, d.h. dem Schnittwinkel der entsprechenden Ebenen.

Anhand dieses Modells wird deutlich, dass sich zwei S-Geraden stets schneiden, es also keine Parallelen geben kann (ein Breitenkreis hat zwar konstanten Abstand zum Äquator, ist aber keine S-Gerade und damit auch kein Kandidat für eine Parallele). Daraus folgt, dass die Verknüpfung zweier Spiegelungen  $S_l \circ S_m$  immer eine Rotation ist um den Schnittpunkt  $l \cap m$  der beiden S-Geraden  $l, m$ . In der sphärischen Geometrie gibt es keine Translationen.

### 2.1 Winkelsumme eines sphärischen Dreiecks

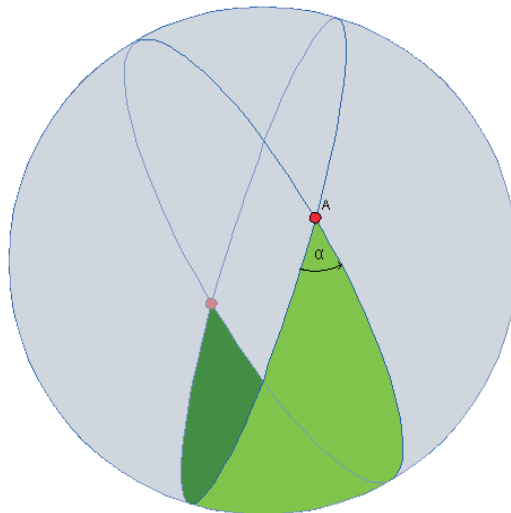
Die Innenwinkelsumme eines Dreiecks in der Ebene beträgt  $2\pi$ . Das sphärische Dreieck ist hingegen gewölbt und hat daher augenscheinlich eine größere Innenwinkelsumme. Insbesondere ist die Innenwinkelsumme nicht konstant und es stellt sich folgende Frage:

Können wir die Innenwinkelsumme eines sphärischen Dreiecks aus dem Verhältnis seines Flächeninhalts gegenüber dem Flächeninhalt der gesamten Sphäre bestimmen?



$A_{\text{Dreieck}}$  und  $A_{\text{Sphäre}}$  sind bekannt.  $\Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = ?$

Eine Sphäre lässt sich mit Hilfe von mehreren S-Geraden durch einen Punkt wie eine Mandarine in Stückchen zerteilen. Diese Stückchen kann man auch als Zweiecke bezeichnen, da sie jeweils zwei gleiche Ecken besitzen, die auf der Sphäre sich genau gegenüber liegen.



Die Fläche eines solchen sphärischen Zweiecks verhält sich zu der Gesamtfläche der Sphäre wie einer seiner beiden Winkel zum Vollwinkel.

$$A_{\text{Zweieck}} = A_{\text{Sphäre}} \cdot \frac{\alpha}{2\pi} \quad (1)$$

Zurück zum sphärischen Dreieck. Das sphärische Dreieck kann als eine Fläche angesehen werden, wo sich drei sphärische Zweiecke überlappen. Somit können wir die Gesamtfläche der Figur, die von diesen drei Zweiecken gebildet wird, bestimmen, indem wir die Flächen der einzelnen sphärischen Zweiecke summieren und zweimal die Fläche des sphärischen Dreiecks abziehen. Schneiden wir diese Figur gedanklich aus der Sphäre aus, so bleibt von der Sphäre eine Figur übrig, die zu unserer Figur kongruent ist. Somit können wir die halbe Fläche der Sphäre mit der Fläche unserer Figur gleichsetzen:

$$\begin{aligned} \frac{A_{\text{Sphäre}}}{2} &\stackrel{(1)}{=} A_{\text{Sphäre}} \cdot \frac{\alpha}{2\pi} + A_{\text{Sphäre}} \cdot \frac{\beta}{2\pi} + A_{\text{Sphäre}} \cdot \frac{\gamma}{2\pi} - 2 \cdot A_{\text{Dreieck}} \\ &= A_{\text{Sphäre}} \cdot \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2\pi} - 2 \cdot A_{\text{Dreieck}} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} &= \frac{\alpha + \beta + \gamma}{2\pi} - 2 \cdot \frac{A_{\text{Dreieck}}}{A_{\text{Sphäre}}} \\ \Leftrightarrow \pi &= \alpha + \beta + \gamma - 4\pi \cdot \frac{A_{\text{Dreieck}}}{A_{\text{Sphäre}}} \end{aligned}$$

und wir erhalten:

**Satz 2.1.** *Der Flächeninhalt eines sphärischen Dreiecks im Verhältnis zur Gesamtfläche der Sphäre bestimmt sich aus der Innenwinkelsumme des Dreiecks durch folgende Gleichung:*

$$4\pi \cdot \frac{A_{\text{Dreieck}}}{A_{\text{Sphäre}}} = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$

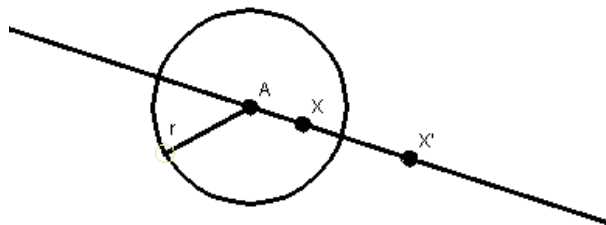
### 3 Inversion am Kreis

Die Inversion am Kreis ist eines der elementaren Hilfsmittel, um später das Poincaré-Modell der hyperbolischen Ebene einführen zu können. Da diese Operation jedoch nicht so geläufig ist und zudem auch Euklidisch gesehen jede Menge interessanter Eigenschaften hat, widmen wir ihr einen eigenen Abschnitt.

**Definition 3.1.** Sei  $\Sigma$  ein Kreis um  $P$  mit Radius  $r$ . Für  $X \neq P$  ist der an  $\Sigma$  invertierte Punkt  $X'$  charakterisiert durch:

$$|PX| \cdot |PX'| = r^2$$

$$\overrightarrow{PX'} = \lambda \cdot \overrightarrow{PX} \quad \text{für ein } \lambda > 0$$



Die Abbildung

$$F_{\Sigma} : \mathbb{R}^2 \setminus \{P\} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{P\}$$

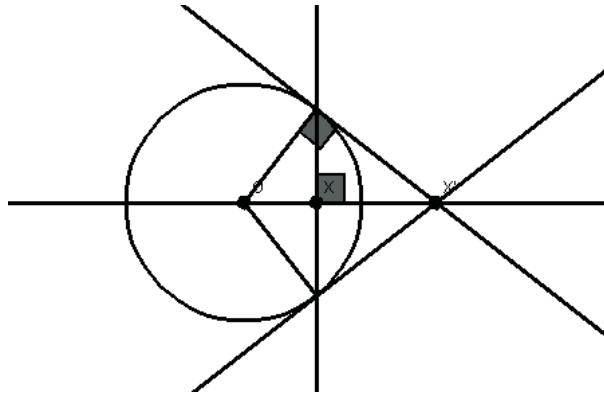
$$X \mapsto X'$$

heißt Inversion am Kreis  $\Sigma$ . Formal setzen wir:

$$F(P) = \infty, \quad F(\infty) = P$$

### 3.1 Geometrische Konstruktion

Es ist möglich, die Inversion am Kreis zu konstruieren, falls  $X$  im Innern des Kreises liegt. Dazu zeichnet man eine Senkrechte zum Strahl  $\overrightarrow{OX}$  Durch  $X$ . An den Schnittpunkten  $P$  der entstandenen Sekante mit der Peripherie legt man Tangenten an den Kreis. Der Schnittpunkt dieser Tangenten ist der gesuchte Bildpunkt  $X'$ .



Will man einen Punkt außerhalb des Kreises invertieren, so muss man diese Schritte in umgekehrter Reihenfolge ausführen.

*Beweis.* Man beachte, dass die Dreiecke  $OXP$  und  $OPX'$  ähnlich sind. Aus  $|OP| = r$  folgt dann:

$$\frac{|OX|}{r} = \frac{r}{|OX'|} \Leftrightarrow |OX| \cdot |OX'| = r^2$$

□

### 3.2 Kreisverwandtschaft und Winkeltreue

Die Inversion am Kreis besitzt viele nützliche Eigenschaften. Einige davon werden wir in diesem Teilabschnitt vorstellen.

**Satz 3.1.** *Sei  $F$  eine Inversion am Kreis mit Zentrum  $O$ . Dann gilt:*

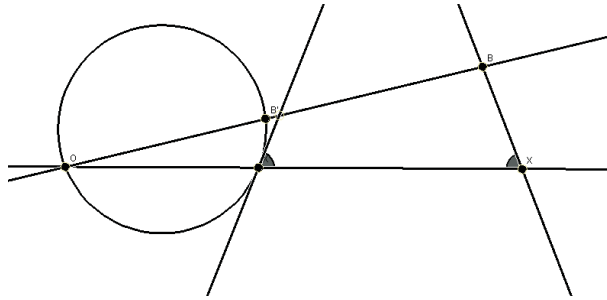
- (i)  *$F$  bildet Kreise, die nicht durch  $O$  gehen, wieder auf solche ab.*
- (ii)  *$F$  bildet Kreise durch  $O$  auf Geraden ab (und umgekehrt).*

Dies zeigt man, indem man dem zu invertierenden Kreis ein rechtwinkliges Dreieck einbeschreibt, dessen Hypotenuse also ein Durchmesser des Kreises ist, und zeigt, dass nun die invertierten Dreiecke ähnlich sind. Auf den genauen Beweis verzichten wir.

**Satz 3.2.** *Die Inversion am Kreis erhält Schnittwinkel von Kurven, d.h. die Inversion am Kreis ist winkeltreu.*

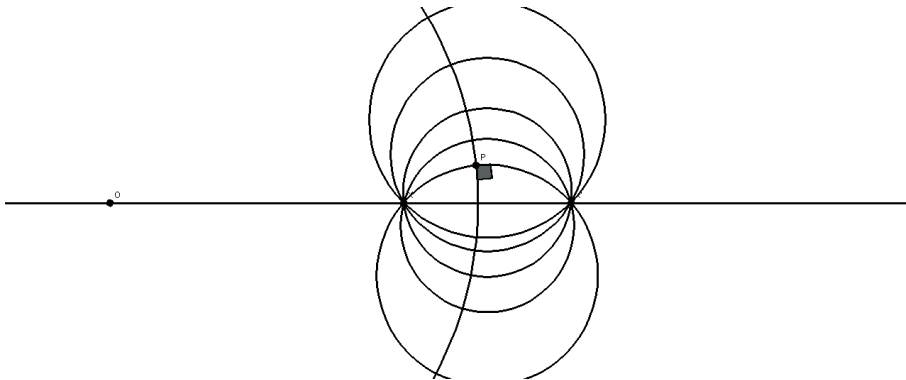


Zum Beweis genügt es zu zeigen, dass der Schnittwinkel eines zentralen Strahls  $\overline{OX}$  mit einer Geraden  $\overline{XB}$  gleich ist dem Schnittwinkel des selben Strahls mit dem Bild der Geraden  $\overline{XB}$  unter Inversion, also dem Kreis durch die Punkte  $OX'B'$ .



Auch hier verzichten wir auf einen ausführlichen Beweis.

**Satz 3.3.** *Sei  $X' = F_\Sigma(X)$ ,  $X \neq X'$ . Dann gilt: Jeder Kreis durch  $X, X'$  schneidet  $\Sigma$  orthogonal. Und umgekehrt geht jeder Kreis durch  $X$ , der  $\Sigma$  orthogonal schneidet auch durch  $X'$ .*



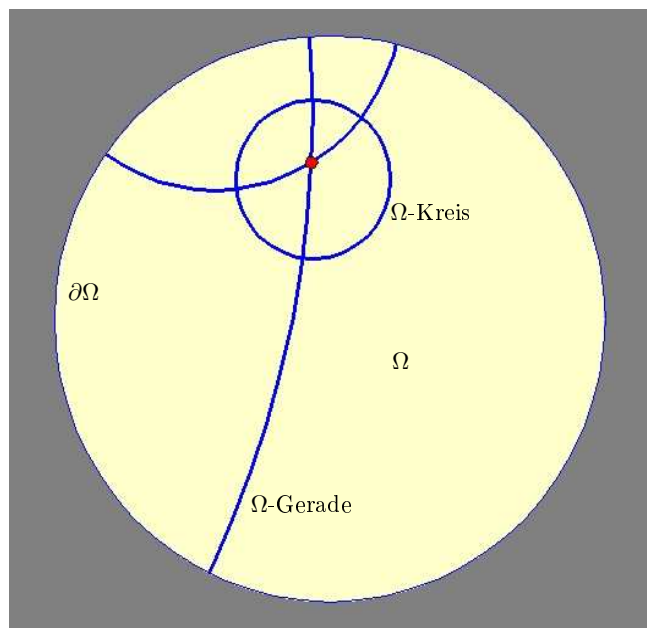
*Beweis.* Sei  $k$  ein Kreis durch  $X, X'$  und bezeichne mit  $P \in \Sigma \cap k$  einen Schnittpunkt mit dem Inversionskreis. Es gilt:

$$F_\Sigma(X) = X', \quad F_\Sigma(X') = X, \quad F_\Sigma(P) = P$$

Aus Satz 3.1 folgt nun  $F_\Sigma(k) = k$  und nach Satz 3.2 vertauschen sich die komplementären Schnittwinkel von  $k$  und  $\Sigma$  unter  $F_\Sigma$  und sind somit rechte Winkel.  $\square$

## 4 Poincaré-Scheiben-Modell der hyperbolischen Geometrie

Da wir nun wissen, was Inversion am Kreis ist, können wir uns an die hyperbolische Geometrie heranwagen. Als Modell betrachten wir eine Kreisscheibe  $\Omega$  und beschreiben nun, was wir in diesen Modell unter  $\Omega$ -Punkten,  $\Omega$ -Geraden,  $\Omega$ -Winkel etc. verstehen wollen:



$\Omega$	Kreisscheibe
$\partial\Omega$	Kreislinie, die $\Omega$ berandet (gehört nicht mit zu $\Omega$ )
$\Omega$ -Punkte	Punkte in der Kreisscheibe
$\Omega$ -Geraden	Kreissegmente, die $\partial\Omega$ senkrecht schneiden
$\Omega$ -Winkel	Euklidischer Winkel
$\Omega$ -Kreise	Durchmesser $\perp$ Tangenten

### 4.1 $\Omega$ -Geraden und Parallelen

$\Omega$ -Geraden teilen grundlegende Eigenschaften mit Geraden der Euklidischen Geometrie, wie hier anhand zweier Beispiele gezeigt werden soll.

(i) **Vor.:** Seien  $A$  und  $B$   $\Omega$ -Punkte.

**Beh.:** Es existiert genau eine  $\Omega$ -Gerade  $g$ , für die gilt  $A, B \in g$ .

**Bew.:** Sei  $g$  eine  $\Omega$ -Gerade durch  $A$  und bezeichne mit  $k$  den ihr zugrunde liegenden Euklidischen Kreis. Da  $k \perp \partial\Omega$ , muss nach Satz 3.3 der Kreis  $k$  auch durch den Punkt  $A'$  gehen, der durch Inversion von  $A$  an  $\partial\Omega$  entsteht. Liegt nun auch  $B$  auf  $g$ , so geht der Kreis  $k$  durch die drei Punkte  $A, B, A'$  und ist damit eindeutig bestimmt.

(ii) **Vor.:** Seien  $g$  und  $h$   $\Omega$ -Geraden.

**Beh.:** Zwei  $\Omega$ -Geraden  $g \neq h$  schneiden sich höchstens in einem Punkt.

**Bew.:** Beweis durch Widerspruch: Würden sie sich in mindestens zwei Punkten  $P, Q$  schneiden, wären  $g, h$  zwei verschiedene  $\Omega$ -Geraden durch diese Punkte. Dies widerspricht der Eigenschaft (i).

Das Parallelenaxiom der Euklidischen Geometrie ist hingegen nicht erfüllt. Anstelle dessen gilt:

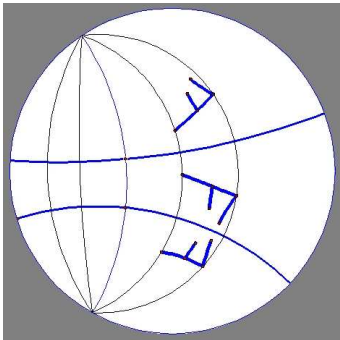
**Parallelenaxiom der hyperbolischen Geometrie:** Sei  $g$  eine  $\Omega$ -Gerade und  $P$  ein  $\Omega$ -Punkt, der nicht auf  $g$  liegt. Dann gibt es unendlich viele  $\Omega$ -Geraden durch  $P$ , die  $g$  nicht schneiden. Solche Geraden  $l$  werden als Parallele bezeichnet.

## 4.2 Spiegelung und Abstandsbegriff

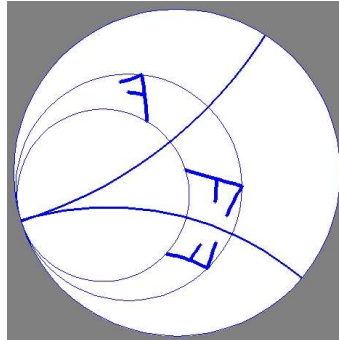
Da wir den Abstand in der hyperbolischen Geometrie nicht einfach mit konventionellen Werkzeugen (Lineal, Maßband, etc. ..) ausmessen können und die Berechnung nicht trivial ist, brauchen wir andere Mittel, um uns unter Abständen in der hyperbolischen Geometrie etwas vorstellen zu können.

**Definition 4.1.** Die Spiegelung  $S_g$  an einer  $\Omega$ -Geraden  $g$  sei die Inversion  $F_k$  an dem  $g$  zugrunde liegenden Kreis  $k$ . Diese bildet  $\Omega$  auf sich selbst ab.

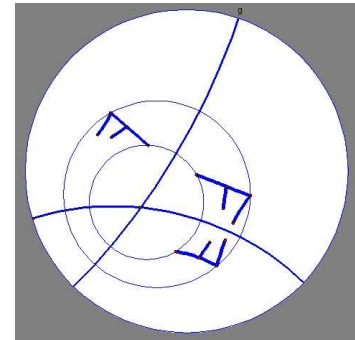
Wir fordern also von unseren Spiegelungen an  $\Omega$ -Geraden, dass sie abstandserhaltend sind, und können auf diese Weise Strecken mit einander vergleichen. Insbesondere erhalten wir 3 verschiedene Typen von Isometrien der Form  $S_m \circ S_l$ :



Translation:  
 $l, m$  ultraparallel



Horozyklus-Rotation:  
 $l, m$  asymptotisch



Rotation:  
 $l, m$  schneiden sich

## 5 Steiner's Kreiskette

Steiner's Kreiskette (engl. *porism*) ist eine schöne Anwendung und Veranschaulichung der hyperbolischen Geometrie. Es handelt sich hier um einen Sachverhalt, der aus Euklidischer Sicht sehr erstaunlich ist, im Poincaré-Modell der hyperbolischen Geometrie jedoch fast trivial.

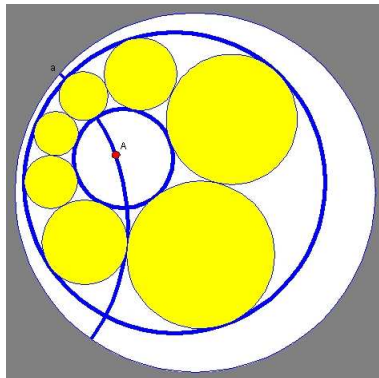


Abb.1

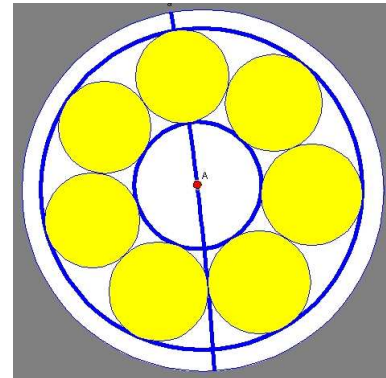


Abb.2

Wir betrachten einen äußeren Kreis  $k_1$  und darin enthalten einen inneren Kreis  $k_2$ . Wir können nun das Größenverhältnis dieser beiden Kreise so wählen, dass ihr Zwischenraum von einer Kreiskette ausgefüllt wird. Es gilt nun:

**Satz 5.1.** *Sind die Kreise  $k_1, k_2$  so gewählt, dass es **eine** geschlossene Kreiskette gibt, so schließt sich **jede** Kreiskette zwischen  $k_1$  und  $k_2$ .*

*Beweis.* Für konzentrische Kreise  $k_1$  und  $k_2$  (Abb.2) ist die Aussage von Steiner offensichtlich. Seien nun die Kreise  $k_1, k_2$  in beliebiger Lage. Bei

entsprechender Betrachtungsweise dieser Kreise im Poincaré-Modell der hyperbolischen Geometrie können diese immer noch als konzentrisch betrachtet werden, d.h. alle Kreise der Kette sind - hyperbolisch gesehen - gleich groß. Um dies nun auch Euklidisch zu verstehen, müssen wir durch eine geeignete (hyperbolische) Isometrie die Figur so überführen, dass die Kreise auch Euklidisch gleich groß sind. Dies ist genau dann der Fall, wenn der (hyperbolische) Mittelpunkt der Kreise  $k_1$  und  $k_2$  mit dem Mittelpunkt der Kreisscheibe  $\Omega$  übereinstimmt. Wir zeigen:

Für zwei disjunkte Kreise  $k_1$  und  $k_2$  existiert ein Inversionskreis  $\Sigma$  derart, dass  $F_\Sigma(k_1)$  und  $F_\Sigma(k_2)$  konzentrische Kreise sind.

Da  $F_\Sigma$  Kreise stets auf Kreise abbildet und dabei Schnittwinkel (und die dazugehörigen Schnittpunkte) erhalten werden, kann also jede Kreiskonfiguration wie in Abb.1 auf eine entsprechende symmetrische wie in Abb.2 abgebildet werden. Der Beweis kann auf zwei Arten erfolgen: analytisch oder geometrisch, wobei bei beiden Methoden die Konstruktion des Inversionskreises das Ziel ist.

Analytisch betrachten wir einen Strahl durch die Mittelpunkte der Kreise  $k_1, k_2$ , bezüglich dessen wir den Schnittpunkten mit  $k_1$  und  $k_2$  die Parameter  $a, b$  und  $c, d$ , dem gesuchten Mittelpunkt von  $\Sigma$  die Variable  $m$  und dem Radius von  $\Sigma$  die Variable  $r$  zuordnen. Für die an  $\Sigma$  gespiegelten Schnittpunkte gilt dann:

$$a' - m = \frac{r^2}{a - m}; \quad b' - m = \frac{r^2}{b - m}; \quad c' - m = \frac{r^2}{a - m}; \quad d' - m = \frac{r^2}{b - m}$$

Die Forderung, dass die invertierten Kreise konzentrisch sind, ist äquivalent zu:

$$\frac{a' + b'}{2} = \frac{c' + d'}{2}$$

Setzen wir die ersten vier Gleichungen in die letzte ein, so erhalten wir

$$\frac{r^2}{a - m} + \frac{r^2}{b - m} = \frac{r^2}{c - m} + \frac{r^2}{d - m}$$

und Auflösen nach  $m$  ergibt:

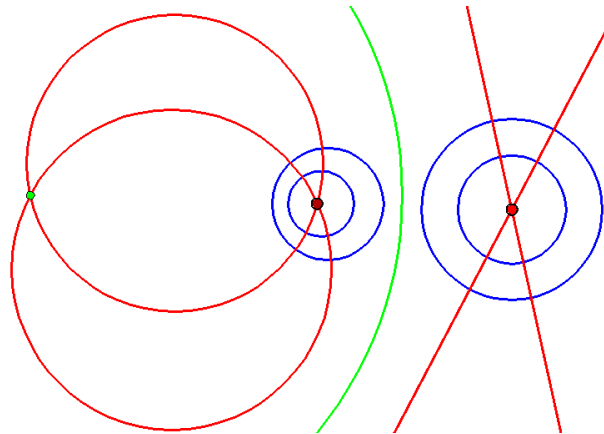
$$m = \frac{ac - bd \pm \sqrt{(a - c)(a - d)(b - c)(b - d)}}{a + b - c - d}$$

Für den Radius  $r$  können wir einen beliebigen Wert wählen. Damit haben wir konstruktiv die Existenz eines (bzw. im Normalfall zweier) solcher möglicher Mittelpunkte für Inversionskreise gezeigt.

Der geometrische Beweis beruht auf der Tatsache, dass die Inversion am Kreis eine Involution ist, d.h.

$$F_{\Sigma} = F_{\Sigma}^{-1}$$

Daher betrachten wir nun die Konstruktion rückwärts und gehen von zwei konzentrischen Kreisen  $k_1$  und  $k_2$  aus, durch deren gemeinsamen Mittelpunkt wir noch zwei Geraden  $g_1$  und  $g_2$  legen. Dieses Konstrukt invertieren wir nun an einem Kreis  $\Sigma$ , der allerdings nicht zu  $k_1$  und  $k_2$  konzentrisch sein soll (sonst bleiben diese Kreise konzentrisch) noch durch deren gemeinsamen Mittelpunkt gehen darf, da wir sonst Geraden erhalten.



Dabei gehen die konzentrischen Kreise  $k_1, k_2$  über in disjunkte Kreise  $k'_1 = F_{\sigma}(k_1)$  und  $k'_2 = F_{\sigma}(k_2)$ , während aus den Geraden  $g_1, g_2$  zwei sich schneidende Kreise  $g'_1 = F_{\sigma}(g_1)$  und  $g'_2 = F_{\sigma}(g_2)$  werden (Erhalt von Schnittpunkten), die auch weiterhin  $k'_1$  und  $k'_2$  im rechten Winkel schneiden (Erhalt von Schnittwinkeln).

In umgekehrter Reihenfolge bleibt also die Aufgabe zu lösen, zu zwei gegebenen Kreisen ein Paar sich schneidender, orthogonaler Kreise zu finden. Dies kann man durch Tangentenkonstruktionen erreichen.  $\square$

## 6 Winkelsumme im hyperbolischen Dreieck

Ziel dieses Abschnitts ist es das Gegenstück zum Satz 2.1 über sphärische Dreiecke in der hyperbolischen Geometrie zu beweisen:

**Satz 6.1.** *Der Flächeninhalt eines hyperbolischen Dreiecks mit Innenwinkeln  $\alpha, \beta, \gamma$  ist proportional zu  $\pi - \alpha - \beta - \gamma$ . Insbesondere gilt  $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ .*

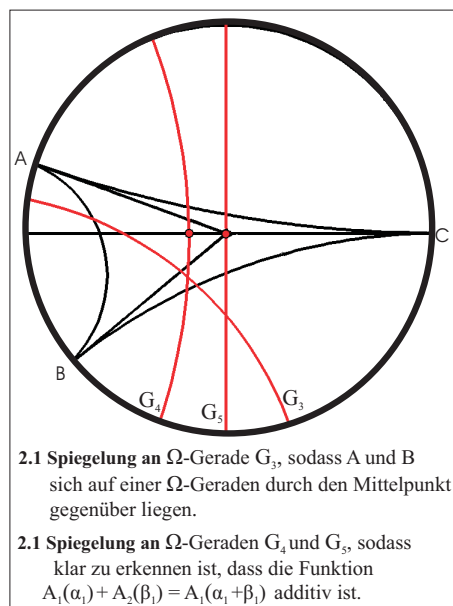
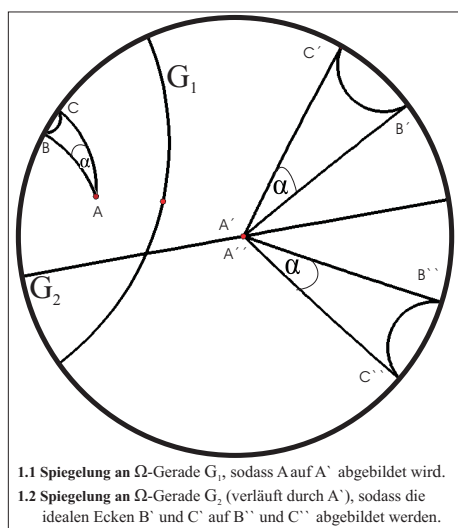
Der Beweis gliedert sich in mehrere Schritte:

**1. Schritt:** Alle hyperbolischen Dreiecke mit 2 idealen Ecken und gleichem Winkel sind kongruent.

Dabei bezeichnet man eine Ecke als *ideal*, wenn sie auf dem Rand  $\partial\Omega$  liegt. Wir betrachten also zwei solche Dreiecke  $ABC$  und  $A''B''C''$ , die bei  $A$  den gleichen Winkel  $\alpha$  einschließen. Dann findet man zwei Spiegelungen, die die Dreiecke ineinander überführt.

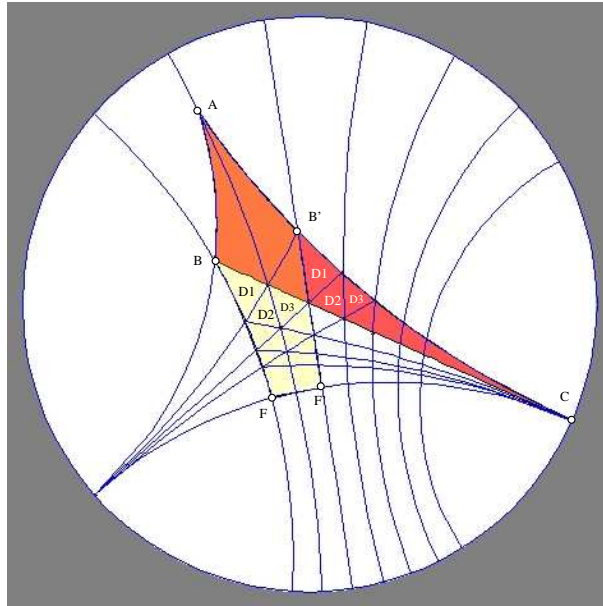
**2. Schritt:** Bezeichne  $A(\alpha_1)$  den Flächeninhalt eines Dreiecks mit 2 idealen Ecken und Außenwinkel  $\alpha_1$ . Nach Schritt 1 sind diese alle kongruent. Dann gilt:

$$A(\alpha_1) + A(\beta_1) = A(\alpha_1 + \beta_1) \quad (2)$$



**3. Schritt:** Ein Dreieck mit einer idealen Ecke hat einen endlichen Flächeninhalt.

In der Skizze hat das Dreieck  $ABC$  eine ideale Ecke bei  $C$ . Dieses lässt sich nun so in Dreiecke  $D_k$  zerlegen, die nach Spiegelungen ganz im 5-Eck  $B'ABFF'$  Platz finden, dessen Flächeninhalt endlich ist. Dabei entsteht  $B'$  durch Spiegelung an der Winkelhalbierenden bei  $A$  und so fort.



**4. Schritt:** Alle Dreiecke mit 3 idealen Ecken haben den selben endlichen Flächeninhalt  $A_{\text{ideal}}$ .

Ein solches ideales Dreieck lässt sich in 3 Dreiecke mit jeweils 2 idealen Ecken zerlegen. Jedes davon zerlegt sich wiederum in 2 Dreiecke mit nur einer idealen Ecke, von denen wir im Schritt 3 gezeigt haben, dass sie endlichen Flächeninhalt haben. Dass der Flächeninhalt immer derselbe ist für ein ideales Dreieck, lässt sich nun leicht mit (2) zeigen.

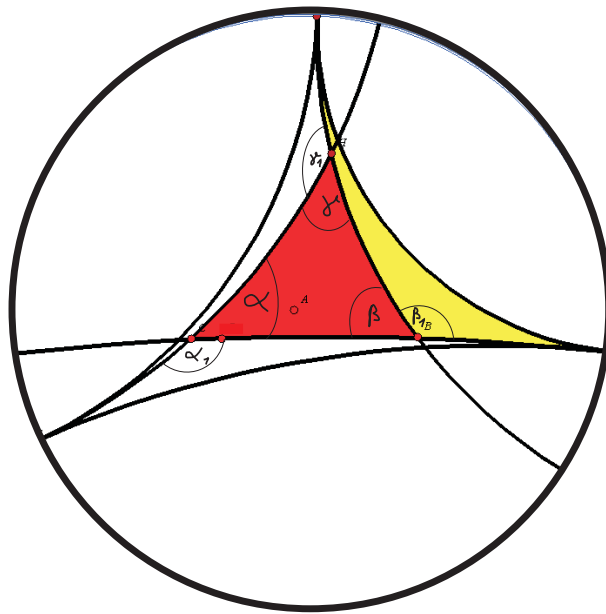
**5. Schritt:** Es gilt  $A(0) = 0$ , sowie  $A(\pi) = A_{\text{ideal}}$ . Nach Schritt 2 ist  $A(\varphi)$  additiv und - wenn man  $A$  als stetige Funktion voraussetzt - damit linear:  $A(\varphi) = m \cdot \varphi$ . Für die Steigung  $m$  gilt also  $m = \frac{A_{\text{ideal}}}{\pi}$ , d.h.

$$A(\varphi) = A_{\text{ideal}} \cdot \frac{\varphi}{\pi} \quad (3)$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} A_{\Delta} &= A_{\text{ideal}} - A(\alpha) - A(\beta) - A(\gamma) \\ &\stackrel{(3)}{=} A_{\text{ideal}} - A_{\text{ideal}} \cdot \frac{\alpha}{\pi} - A_{\text{ideal}} \cdot \frac{\beta}{\pi} - A_{\text{ideal}} \cdot \frac{\gamma}{\pi} \\ &= \frac{A_{\text{ideal}}}{\pi} (\pi - \alpha - \beta - \gamma) \end{aligned}$$

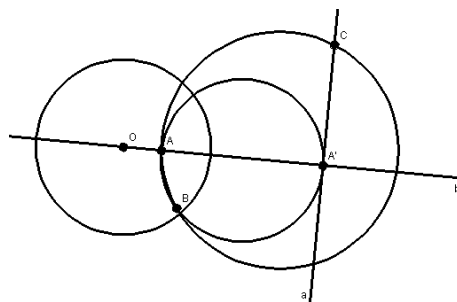




## 7 Konstruktionen mit Zirkel und Lineal

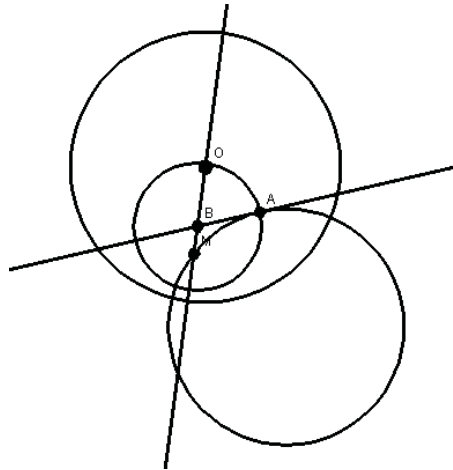
In Abschnitt 4 haben wir die hyperbolischen Entsprechungen für Kreis und Gerade in der Poincaré-Kreisscheibe gefunden. In diesem Abschnitt soll es nun um deren Konstruktion mit Euklidischen Mitteln gehen.

### 7.1 $\Omega$ -Gerade durch zwei Punkte $A$ und $B$



Wir invertieren einen der Punkte an  $\partial\Omega$ , z.B.  $A \rightarrow A'$  (siehe Abschnitt 3.1). Der Kreis durch  $A, B, A'$  liefert dann die gewünschte  $\Omega$ -Gerade durch  $A, B$ .

## 7.2 $\Omega$ -Kreis durch $A$ mit Mittelpunkt $M$

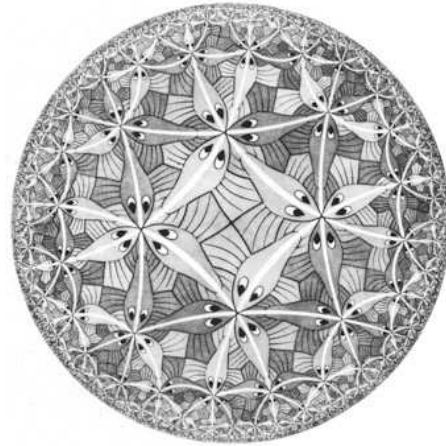


Wir wissen, dass ein  $\Omega$ -Kreis  $k$  einem Euklidischen Kreis entspricht. Sei  $M$  dessen hyperbolischer und  $B$  dessen Euklidischer Mittelpunkt. Dann liegt  $B$  auf der Geraden  $\overline{OM}$ . Ferner schneidet die  $\Omega$ -Gerade durch  $A$  und  $M$  als Durchmesser den Kreis  $k$  orthogonal. Daher konstruieren wir eine Tangente an die  $\Omega$ -Gerade durch  $A, M$  (vgl. Abschnitt 7.1) in  $A$  und setzen den gesuchten Mittelpunkt auf den Schnittpunkt dieser mit der Geraden  $\overline{OM}$ .

Aus Satz 3.3 wissen wir, dass die Mittelpunkte von Kreisen durch einen Punkt  $A$  und senkrecht zu  $\partial\Omega$  alle auf der Mittelsenkrechten zu  $\overline{AA'}$  liegen, außerhalb von  $\Omega$ . Diese Gerade nennt man *Polare  $a$*  zum Punkt  $A$ . Umgekehrt entspricht einer  $\Omega$ -Geraden  $m$  ein Punkt außerhalb von  $\Omega$ , nämlich der Mittelpunkt  $M$  des zugrundeliegenden Euklidischen Kreises.  $M$  wird auch als *Pol* zur  $\Omega$ -Geraden  $m$  bezeichnet.

## 7.3 M.C.Escher

Allein mit Zirkel, Lineal und viel Geduld ausgestattet schuf der Künstler M.C.Escher um 1960 mittels Dreiecksparkettierung in der hyperbolischen Ebene phantastische Grafiken in seiner Reihe "Circle Limits". Vom Grundprinzip her werden spezielle, am Mittelpunkt der Poincaré-Kreisscheibe regelmäßig angeordnete Dreiecke immer wieder an ihren Seiten (d.h.  $\Omega$ -Geraden) gespiegelt. Dabei muss für die Winkel  $\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{r}$  im Ausgangsdreieck gelten, dass  $p, q, r$  natürliche Zahlen sind, sowie  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$  wegen Satz 6.1.



"There is no end of possibilities. It is wonderfully satisfying to make these pictures by hand, with pencil and paper, compass and straightedge. I encourage you to test this theorem for yourself!"

Chaim Goodman-Strauss 2001

## 8 Schlussbetrachtung

Der geneigte Leser wird, nachdem er bis an dieses Stelle gekommen ist, wohl ermüdet sein von der hyperbolischen Welt. Das wollen wir ihm nicht übelnehmen, sondern vielmehr nach weiteren Anwendungsmöglichkeiten suchen. Tatsächlich lassen sich auch kosmologische Phänomene mittels hyperbolischer Vorstellung zwar nicht unbedingt einfacher lösen, so aber doch geometrischer verstehen. Wir als Seminarteilnehmer haben zumindest gelernt, dass hyperbolische Ameisen beim Betrachten von Eschers Bildern nicht unbedingt zu beneiden sind und die anscheinend Euklidische Welt vielleicht hyperbolisch besser verständlich wäre.

