

Zöpfe, Knoten und Aufblasungen

Teilnehmer:

Andreas Koher	Heinrich-Hertz-Oberschule
Marek Mandel	Georg-Forster-Oberschule
Max Bender	Heinrich-Hertz-Oberschule
Peter Scholze	Heinrich-Hertz-Oberschule
Philipp Hähnel	Heinrich-Hertz-Oberschule
Tjorven Senska	Herder-Oberschule

Gruppenleiter:

Olaf Teschke	Humboldt-Universität zu Berlin
--------------	--------------------------------

Die Gruppe beschäftigte sich mit globalen und lokalen Eigenschaften ebener algebraischer Kurven. Nach ersten allgemeinen Überlegungen zum Begriff einer Kurve wurde das Schnittverhalten von Kurven untersucht und der Satz von Bézout bewiesen. Die hierzu nötigen Werkzeuge wie der Übergang zu den komplexen Zahlen, der projektive Raum und die Definition der Schnittvielfachheit wurden eingeführt und entwickelt.

Danach wurde, motiviert durch die Cremona-Transformation, eine wichtige Modifikation der Ebene, die sogenannte *Aufblasung*, eingeführt. Sie steht in enger Beziehung zum Studium der lokalen Geometrie der Kurve in besonderen Punkten, den *Singularitäten*. Anhand einiger Beispiele wurde festgestellt, dass sich diese Punkte mit Hilfe wiederholter Aufblasungen glätten lassen. Außerdem haben wir die Geometrie der Umgebung der Singularität untersucht. Dies führte uns zu *Zöpfen* und *Knoten*.



1 Der Begriff einer Kurve

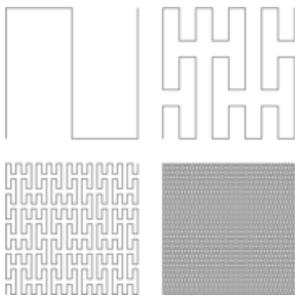
Zuerst haben wir uns dem Begriff einer Kurve angenähert. In naivem Sinne könnte man eine Kurve als eindimensionales zusammenhängendes Objekt verstehen. Wir kennen folgende Beschreibungen von Kurven.

(1) Eine Kurve C wird durch eine Gleichung in zwei Variablen x, y ausgedrückt, d.h. $C = \{x, y \in \mathbb{R} \mid F(x, y) = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$.

Der Einheitskreis ist z.B. durch die Gleichung $x^2 + y^2 = 1$ gegeben. Allerdings: Nicht jedes F beschreibt eine Kurve im naiven Sinne! Zum Beispiel ist die Lösungsmenge der Gleichung $x^2 + y^2 = 0$ nur der Punkt $x = y = 0$. Durch die Gleichung $x^2 + y^2 = -1$ würden wir sogar die leere Menge erhalten. Es können in dieser Form auch sehr komplizierte Kurven auftreten, z.B. der Graph der Funktion $y = \sin(\frac{1}{x})$.

(2) Die Kurve wird durch eine Parametrisierung gegeben, d.h. wir haben eine stetige injektive Abbildung $f : I \subset \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^2$ für ein zusammenhängendes Intervall I . Der Kreis wird etwa parametrisiert durch $f : [0; 2\pi] \hookrightarrow \mathbb{R}^2, f(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$.

Allerdings können auf diese Art sehr seltsame Kurven entstehen, wie z.B. die Peano-Kurve, deren Bild das gesamte Einheitsintervall ist. Sie kann anschaulich als folgender Limes konstruiert werden:



Um so etwas zu vermeiden, werden wir uns im folgenden auf algebraische Kurven beschränken.

2 Ebene algebraische Kurven

Definition 2.1. Eine ebene algebraische Kurve wird gegeben durch ein Polynom $F(x, y) = \sum_{j,k=1}^n a_{j,k} x^j y^k$ in zwei Variablen. Den Grad der Kurve definieren wir durch den Grad $\max\{j + k \mid a_{j,k} \neq 0\}$ des Polynoms.

Als zugrunde liegende Menge der Kurve fassen wir die Nullstellenmenge des Polynoms auf. "Algebraisch" heißt die Kurve, da sie durch ein Polynom gegeben ist; "eben" bezieht sich auf die zwei Variablen. Vertraut sind uns vor allem Polynome mit reellen Koeffizienten. Es gibt aber, wie wir im ersten Abschnitt gesehen haben, pathologische Beispiele wie etwa $x^2 + y^2 = 0$. Später werden wir weitere Gründe dafür sehen, dass es sinnvoll ist, mit komplexen Koeffizienten zu arbeiten.

Ein Polynom (egal in wie viel Variablen) über einem Körper lässt sich nach einem Satz von Gauß immer eindeutig in Primfaktoren (d.h. nicht weiter faktorisierte Polynome) zerlegen. Geometrisch übersetzt sich das darin, dass die Kurve in mehrere Komponenten zerfällt. Zum Beispiel beschreibt das Polynom xy die Vereinigung der zwei Geraden $x = 0$ und $y = 0$. Eine Kurve, die nur aus einer Komponente besteht (d.h. das zugehörige Polynom ist nicht in Faktoren zerlegbar), nennen wir *irreduzibel*.

Auf den folgenden Bildern sehen wir einige Beispiele von irreduziblen Kurven kleinen Grades.

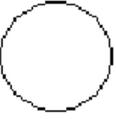
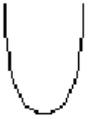
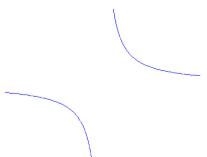
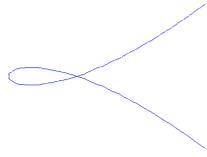
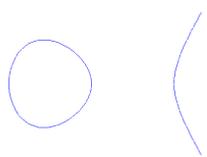
Bild	Name	Gleichung	Grad
	Gerade	$x - y = 0$	1
	Kreis	$x^2 + y^2 = 1$	2
	Parabel	$y - x^2 = 0$	2

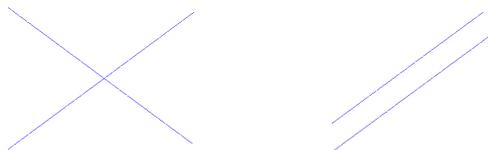
Bild	Name	Gleichung	Grad
	Hyperbel	$xy - 1 = 0$	2
	Neilsche Parabel	$y^2 - x^3 = 0$	3
	Newtonscher Knoten	$y^2 - x^2(x + 1) = 0$	3
	elliptische Kurve	$y^2 - x(x - 1)(x + 1) = 0$	3

Es scheint, dass Hyperbel oder elliptische Kurve aus zwei Komponenten bestehen. Dies erscheint jedoch nur im Reellen so; die Kurven hängen im Komplexen zusammen, was sich an der Unzerlegbarkeit des zugehörigen Polynoms zeigt.

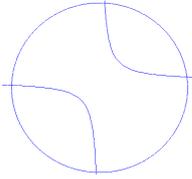
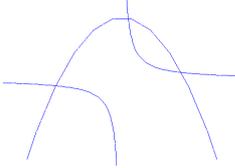
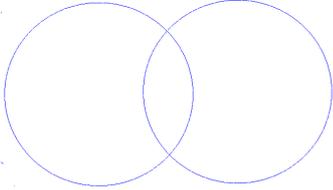
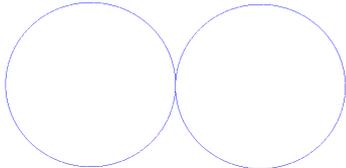
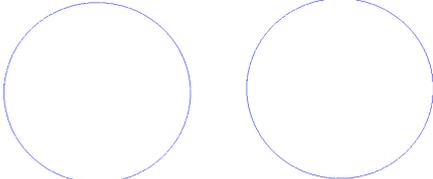
3 Schnitte von algebraischen Kurven

Im folgenden wollen wir das Schnittverhalten von algebraischen Kurven verstehen. Wir betrachten zunächst Beispiele im Fall von Kurven niedrigen Grades.

1. Zwei Geraden schneiden sich in einem Punkt oder sind parallel.



2. Schnittpunkte von Kegelschnitten

Bild	Kurven	Schnittpunkte
	Hyperbel und Kreis	4
	Hyperbel und Parabel	3
	Zwei Kreise	2
	Zwei Kreise	1
	Zwei Kreise	0

Die Anzahl der Schnittpunkte muss nicht einmal unbedingt endlich sein - z.B. haben wir im Falle identischer Kreise offenbar unendlich viele Schnittpunkte.

Im letzten Fall der Kreise ohne reellen Schnittpunkt stellen wir aber fest, dass wir beim Übergang zu den komplexen Zahlen zumindest zwei Schnittpunkte erhalten:

$$(x - 2)^2 + y^2 - 3 = 0$$

$$(x + 2)^2 + y^2 - 3 = 0$$

Wir subtrahieren die beiden Gleichungen und erhalten:

$$8x = 0 \implies x = 0.$$

Nun setzen wir x in die Ausgangsgleichung ein und erhalten:

$$4 + y^2 - 3 = 0$$

$$y^2 = -1$$

y muss also die Wurzel aus -1 sein. Im Reellen kann man diese Gleichung nicht lösen. Wir müssen also die komplexen Zahlen mit einbeziehen. Unter der Voraussetzung $i^2 = -1$ erhalten wir die Lösungen $+i$ und $-i$. Die beiden Kreise schneiden sich also bei $[0; +i]$ und $[0; -i]$.

Etwas ausführlicher diskutieren wir jetzt den Fall des Schnittes einer Kurve mit einer Geraden. O.B.d.A. nehmen wir an, dass die Gerade durch die Gleichung $x = 0$ gegeben ist. Die Schnittpunkte der Kurve mit der Geraden sind dann gerade durch die Nullstellen des Polynoms bestimmt.

Satz 3.1 (Fundamentalsatz der Algebra). *Ein komplexes Polynom vom Grad d hat (mit Vielfachheiten gezählt) genau d Nullstellen.*

Geometrisch würde dies bedeuten, dass sich eine Gerade mit einer Kurve vom Grad d in genau d Punkten schneidet. Eine Gerade hat Grad 1. Dies legt die Vermutung nahe, dass unter günstigen Umständen zwei Kurven vom Grad d_1 und d_2 sich in $d_1 \cdot d_2$ Punkten schneiden. Unsere Diskussion der Schnitte von Quadriken hat aber gezeigt, dass die erwarteten $2 \cdot 2 = 4$ Schnittpunkte nicht immer existieren. Um den sogenannten Satz von Bézout zu formulieren, sind einige Vorüberlegungen nötig.

3.1 Vorüberlegungen zum Satz von Bézout

- 1) Wie unsere Diskussion des Durchschnittes mit einer Geraden zeigte, müssen wir über den komplexen Zahlen arbeiten, da viele Nullstellen nur im Komplexen existieren. Eine ähnliche Situation haben wir für den Durchschnitt zweier Kreise gefunden.
- 2) Die Ebene muss erweitert werden, denn:
 - a) Zwei parallele Geraden haben keinen gemeinsamen Schnittpunkt.
 - b) Diese beiden Kreise aus dem vorigen Abschnitt haben im Reellen keinen Schnittpunkt, im Komplexen immerhin schon zwei. Der Aussage des Satzes zufolge müsste es aber vier Schnittpunkte geben.
- 3) Wir müssen Vielfachheiten von Schnittpunkten verstehen und definieren.
- 4) Die Kurven dürfen keine gemeinsamen Komponenten haben (wie etwa im Falle identischer Kreise oder im Fall der Kurven $xy = 0$ und $(x + 1)y = 0$, die beide die x -Achse gemeinsam haben).

Um die erste Bedingung zu erfüllen, werden wir ab jetzt nur noch Kurven über den komplexen Zahlen betrachten. Der zweite Punkt wird durch den Übergang zum projektiven Raum gewährleistet. Die Vielfachheiten werden wir danach mit Hilfe der Resultanten definieren. Die vierte Bedingung ist offenbar essentiell für den Satz.

3.2 Der projektive Raum

Wir definieren den projektiven Raum $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ bzw. $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ als die Menge aller Geraden durch den Nullpunkt des \mathbb{R}^{n+1} bzw. \mathbb{C}^{n+1} , d.h. die Menge aller Richtungen in diesen Vektorräumen. Man kann diese Räume auch folgendermaßen durch Koordinaten beschreiben:

Definition 3.2.

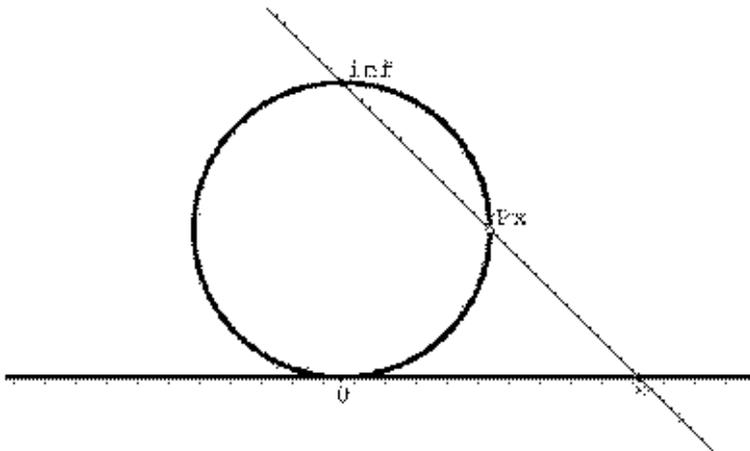
$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R} \text{ bzw. } \mathbb{C}) := \{[z_0 : \dots : z_n] \mid (z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \text{ (bzw. } \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})\} / \sim,$$

wobei $[z_0 : \dots : z_n] \sim [\lambda z_0 : \dots : \lambda z_n]$ für $\lambda \neq 0$.

Um eine ungefähre Vorstellung von der Geometrie dieser Räume zu gewinnen, veranschaulichen wir sie im eindimensionalen Fall.

1. Der $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \{[z_0 : z_1] \mid (z_0, z_1) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}\}$

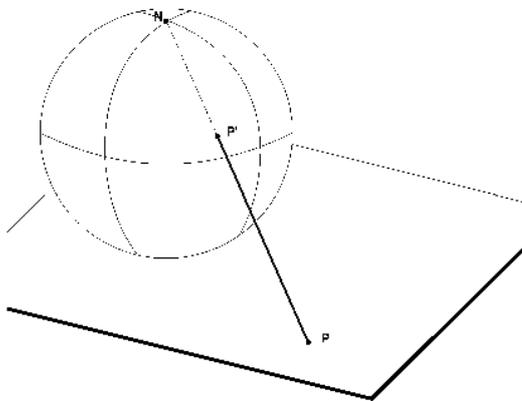
Falls $z_0 \neq 0$ ist, sind die Punkte äquivalent zu $[1 : z]$, also bijektiv zu \mathbb{R}^1 . Hinzu kommt der Punkt $[0 : z]$, der äquivalent zu $[0 : 1]$ ist. Wir nennen ihn den unendlich fernen Punkt. Geometrisch können wir ihn durch die folgende Projektion als Kreislinie verstehen:



Wir sehen, dass die Punkte des Kreises den Richtungen der Geraden entsprechen. Der unendlich ferne Punkt entspricht hierbei der Geraden mit dem Anstieg 0, also seiner Tangente, und kommt zur Ebene hinzu.

2. Der $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \{[z_0 : z_1] \mid (z_0, z_1) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}\}$

In Analogie zum reellen Fall sehen wir, dass der eindimensionale projektive Raum durch Hinzufügen eines Punktes zum \mathbb{C}^1 entsteht. Geometrisch entspricht dies einer Kugeloberfläche:



3.3 Projektive ebene algebraische Kurven

Wir setzen nun unsere ebenen Kurven in den projektiven Raum fort. Dies geschieht durch den Übergang zu homogenen Polynomen.

Definition 3.3. Ein Polynom $P \in \mathbb{C}[z_0, \dots, z_n]$ heißt homogen vom Grad d , wenn $P(\lambda z_0, \dots, \lambda z_n) = \lambda^d P(z_0, \dots, z_n)$ für beliebige $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt.

Bemerkung: Diese Eigenschaft ist äquivalent zu der Tatsache, dass in der Darstellung $P = \sum_{i_0, \dots, i_n} z_0^{i_0} \cdot z_1^{i_1} \cdot \dots \cdot z_n^{i_n}$ für alle Monome gilt: $i_0 + \dots + i_n = d$.

Wir können durch eine leichte Modifikation jedes Polynom aus $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ in eine homogene Form überführen, indem wir einfach in jedem Monom den Grad durch Multiplikation mit Potenzen einer zusätzlichen Variablen auffüllen. Rechnerisch entspricht das dem Ansatz $x_j = \frac{z_j}{z_0}$, $j = 1, \dots, n$. Wir setzen dies ein und entfernen die Nenner durch Multiplikation mit z_0^d .

So wird zum Beispiel aus $3x_1^2 + 4x_1 + 1$ das Polynom $3z_1^2 + 4z_1z_0 + z_0^2$. Offenbar ist diese Zuordnung umkehrbar eindeutig.

Definition 3.4. Eine projektive ebene algebraische Kurve vom Grad d ist gegeben durch ein homogenes Polynom $F(z_0, z_1, z_2)$ vom Grad d .

Wir können jetzt nachrechnen, dass zwei parallele Geraden im projektiven Raum tatsächlich einen Schnittpunkt haben. Nehmen wir die Geraden $x = y$ und $x = y + 1$. Nach der Homogenisierung werden daraus die projektiven Geraden $z_1 = z_2$ und $z_1 = z_2 + z_0$. Offenbar schneiden sie sich im Punkt $[0 : 1 : -1]$.

3.4 Resultante und Vielfachheiten

In diesem Abschnitt werden wir die Vielfachheit eines Schnittpunktes zweier Kurven definieren. Dies erfordert einige technische Überlegungen.

Wir schreiben zunächst die beiden Polynome als $F[z_0, z_1, z_2] = \sum_{j=0}^{d_1} f_j z_0, z_1 z_2^j$ bzw. $G[z_0, z_1, z_2] = \sum_{j=0}^{d_2} g_j z_0, z_1 z_2^j$. Wir nehmen dabei o.B.d.A. an, dass d_1, d_2 die Grade der Kurven sind (das ist genau dann der Fall, wenn der Punkt $[0 : 0 : 1]$ nicht auf beiden Kurven liegt). Hierbei sind die f_j bzw. g_j homogen vom Grad $d - j$.

Definition 3.5. Die Resultante zweier Polynome F, G von obiger Form ist die Determinante folgender $(d_1 + d_2) \times (d_1 + d_2)$ -Matrix:

$$R_{F,G} := \det \begin{pmatrix} a_{d_1} & \dots & a_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{d_1} & \dots & a_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & a_{d_1} & \dots & a_0 \\ b_{d_2} & \dots & b_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{d_2} & \dots & b_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & b_{d_2} & \dots & b_0 \end{pmatrix}$$

Offenbar ist die Resultante ein Polynom in den zwei Variablen z_0, z_1 . Sie hat folgende Eigenschaften:

- Satz 3.6.** (i) $R_{F,G}$ ist ein homogenes Polynom vom Grad $d_1 \cdot d_2$.
(ii) $R_{F,G} = 0$ genau dann, wenn die Polynome einen gemeinsamen nichttrivialen Faktor haben.

Ein homogenes Polynom in zwei Variablen zerfällt nach dem Fundamentalsatz der Algebra über \mathbb{C} in Linearfaktoren. Die Vielfachheiten dieser Nullstellen können wir im folgenden benutzen, um Vielfachheiten von Schnittpunkten zu definieren.

3.5 Der Satz von Bézout

Satz 3.7 (Satz von Bézout). *Seien C_1 und C_2 zwei algebraische ebene projektive Kurven, gegeben durch zwei Polynome $F_1(z_0, z_1, z_2)$ und $F_2(z_0, z_1, z_2)$ vom Grad d_1 bzw. d_2 , die keine gemeinsamen Komponenten besitzen, d.h. F_1 und F_2 haben keinen gemeinsamen Faktor. Dann besteht der Durchschnitt von C_1 und C_2 aus $d_1 \cdot d_2$ Punkten (mit Vielfachheiten).*

Beweis: Wie im vorigen Abschnitt sei o.B.d.A. der Punkt $[0 : 0 : 1]$ auf keiner der Kurven gelegen. Wir betrachten die Geraden durch diesen Punkt und parametrisieren sie durch ihren Schnittpunkt P' mit der Geraden $z_2 = 0$. Wann liegt auf einer dieser Geraden ein gemeinsamer Schnittpunkt der beiden Kurven? Offenbar genau dann, wenn die Einschränkungen von F_1 und F_2 auf diese Gerade eine gemeinsame Nullstelle haben.

Man überlegt sich, dass dies genau dann der Fall ist, wenn die Resultante R_{F_1, F_2} im Punkt P' eine Nullstelle hat; insbesondere sehen wir sofort, dass es nach dem Satz aus dem vorigen Abschnitt höchstens $d_1 \cdot d_2$ Schnittpunkte der beiden Kurven gibt. Es gibt durch diese endlich vielen Schnittpunkte nur endlich viele Geraden, die zwei dieser Schnittpunkte verbinden; damit können wir o.B.d.A. annehmen, dass $P = [0 : 0 : 1]$ so liegt, dass auf jeder Geraden durch P nur ein Schnittpunkt der Kurven liegt.

Die Vielfachheit eines solchen Schnittpunktes definieren wir dann einfach als die Vielfachheit der Nullstelle der Resultante R_{F_1, F_2} im Punkt P' . Da die Geraden durch P den gesamten \mathbb{P}^2 überdecken, ist die Anzahl der Schnittpunkte (mit Vielfachheiten) gerade gleich dem Grad der Resultanten, also $d_1 \cdot d_2$.

Bemerkung: Man kann beweisen, dass die verwendete Definition der Vielfachheiten nicht von dem gewählten Punkt P abhängt.

3.6 Folgerungen aus dem Satz von Bézout

Korollar 3.8. *Seien C_1 und C_2 zwei ebene algebraische Kurven in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, jeweils vom Grad d , die sich in d^2 Punkten schneiden. Wenn genau $d \cdot k$ Punkte davon auf einer Kurve C_3 vom Grad k liegen und C_3 irreduzibel ist, dann liegen die restlichen $d \cdot (d - k)$ Punkte auf einer Kurve C_4 vom Grad $(d - k)$.*

Beweis:

F_1 sei die Gleichung von C_1 und F_2 die Gleichung von C_2 . Die Gleichungen $\lambda F_1 + \mu F_2$ und $[\lambda : \mu] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ geben uns eine Familie von Kurven vom Grad d , die alle die d^2 Punkte enthalten.

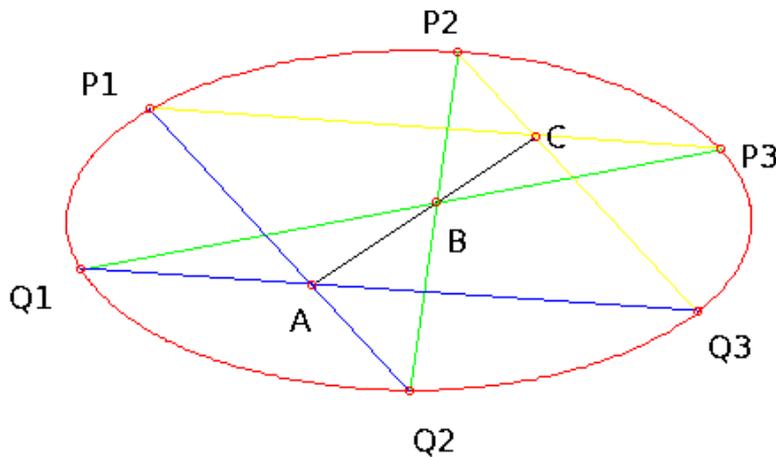
Wir wählen einen Punkt auf C_3 , der nicht einer der $d \cdot k$ Punkte ist. In der gewählten Familie gibt es eine Kurve C_5 , die diesen Zusatzpunkt enthält. Daraus folgt, dass $C_5 \cap C_3 \geq d \cdot k + 1$ Punkte enthält. Da C_5 den Grad d und C_3 den Grad k hat, folgt aus dem Satz von Bézout, dass $C_5 \cap C_3$ $d \cdot k$ Punkte enthält oder C_5 und C_3 eine gemeinsame Komponente haben. Es existieren also gemeinsame Komponenten zwischen C_5 und C_3 . Da C_3 irreduzibel ist, muss die gemeinsame Komponente von C_5 und C_3 gerade C_3 sein.

Damit zerlegt sich C_5 als $C_5 = C_3 \cup C_4$ mit einer weiteren Kurve C_4 vom Grad $\deg(C_4) = \deg(C_5) - \deg(C_3) = d - k$. In Polynomen ausgedrückt haben wir $F_5 = F_4 \cdot F_3$, wobei F_j das Polynom zu C_j ist.

Da die restlichen $d \cdot (d - k)$ Punkte auf C_5 , aber nicht auf C_3 liegen, müssen sie auf den anderen Komponenten von C_5 liegen, also auf C_4 .

Eine schöne geometrische Folgerung daraus ist der Satz von Pascal:

Satz 3.9 (Satz von Pascal). *Seien P_1, P_2, P_3 und Q_1, Q_2, Q_3 sechs Punkte auf einem Kegelschnitt und $L_1 = \overline{P_1Q_2}$, $L_2 = \overline{P_2Q_1}$, $L_3 = \overline{P_1Q_3}$, $L_4 = \overline{P_3Q_1}$, $L_5 = \overline{P_2Q_3}$ und $L_6 = \overline{P_3Q_2}$ Verbindungsgeraden. Dann liegen die Schnittpunkte $A = L_1 \cap L_2$, $B = L_3 \cap L_4$ und $C = L_5 \cap L_6$ auf einer Geraden.*



Der Satz folgt aus dem vorigen Korollar, angewendet auf die Kurven $C_1 = L_1 \cup L_3 \cup L_5$ und $C_2 = L_2 \cup L_4 \cup L_6$ und die Quadrik C_3 - die Gerade ergibt sich als Kurve C_4 , die die Punkte A, B, C enthält.

Eine weitere Anwendung des Satzes auf den Fall von zwei Kurven vom Grad drei ist übrigens eng mit der Kryptographie verbunden (s. auch den Bericht dieser Gruppe). Fall nämlich eine solche Kurve in jedem Punkt eine eindeutig bestimmte Tangente hat (d.h. die Kurve hat keine Singularitäten - mehr dazu s.u.; solche Kurven vom Grad drei heißen *elliptische Kurven*), dann bestimmen zwei beliebige

ge (evtl. auch identische) Punkte auf der Kurve eine Gerade (evtl. Tangente), die die Kurve in genau einem weiteren Punkt schneidet (dies ist der einfache Fall des Satzes von Bézout für eine Gerade). Davon ausgehend können wir eine Gruppenoperation auf den Punkten der Kurve definieren, wobei das Assoziativitätsgesetz gerade mit Hilfe von Korollar 3.8. im Fall $d = 3$ bewiesen werden kann. Die Struktur dieser Gruppenoperation hat zahlreiche Anwendungen, vom Beweis der Fermatschen Vermutung bis hin zur Konstruktion effektiver Verschlüsselungen.

4 Aufblasungen

4.1 Eine quadratische Transformation

Wir betrachten die Abbildung

$$\begin{aligned}\sigma : \mathbb{P}^2 &\rightarrow \mathbb{P}^2 \\ z_0 : z_1 : z_2 &\mapsto [z_1 z_2 : z_0 z_2 : z_0 z_1].\end{aligned}$$

Diese Abbildung heißt auch *Cremona-Transformation*.

Da σ durch homogene Polynome gleichen Grades gegeben ist, ist sie (fast überall) wohldefiniert. Allerdings stellen wir fest, dass die Punkte

$$[1 : 0 : 0], [0 : 1 : 0], [0 : 0 : 1]$$

nicht zum Definitionsbereich gehören, da sie auf $[0 : 0 : 0]$ abbilden würden. Andererseits besteht das Urbild der Punkte

$$[1 : 0 : 0], [0 : 1 : 0] \text{ bzw. } [0 : 0 : 1]$$

aus den Geraden $z_0 = 0, z_1 = 0$ bzw. $z_2 = 0$, d.h. diese Geraden werden auf Punkte kontrahiert. Außerhalb des Fundamentaldreiecks ist die Abbildung jedoch bijektiv - sie ist dort sogar zu sich selbst invers:

$$\sigma \circ \sigma([z_0 : z_1 : z_2]) = [z_0(z_0 z_1 z_2) : z_1(z_0 z_1 z_2) : z_2(z_0 z_1 z_2)],$$

und falls $z_0 z_1 z_2 \neq 0$, dann ist das die Identität.

Andererseits passieren auf dem Fundamentaldreieck offenbar signifikante geometrische Veränderungen, wie das Beispiel des Inkreises $z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 + z_0 z_1 + z_0 z_2 + z_1 z_2 = 0$ zeigt: Dessen Urbild ist die Hypozykloide $z_0^2 z_1^2 + z_1^2 z_2^2 + z_0^2 z_2^2 + (z_0 + z_1 + z_2) + z_0 z_1 z_2^2 = 0$, eine Kurve mit drei Spitzen in den drei kritischen Punkten. Ein anderes Beispiel ist der Kreis $z_0^2 + z_1^2 + z_2^2 = 0$, der die Seiten des Fundamentaldreiecks in je zwei Punkten transversal schneidet. Deren Urbild ist eine Kleeblattkurve mit drei Doppelpunkten, gegeben durch $z_0^2 z_1^2 + z_2^2 z_0^2 + z_2^2 z_1^2 = 0$.

Zum Verständnis dieser Vorgänge untersuchen wir das Geschehen in den kritischen Punkten gesondert. Dies führt uns auf den Begriff der *Aufblasung*.

4.2 Definition und Geometrie von Aufblasungen

Definition 4.1. *Es sei $P \in \mathbb{P}^2$ ein Punkt, o.B.d.A. der Punkt $[0 : 0 : 1]$. Die Aufblasung $\text{Bl}_P \mathbb{P}^2$ wird definiert als die Teilmenge des Kreuzproduktes*

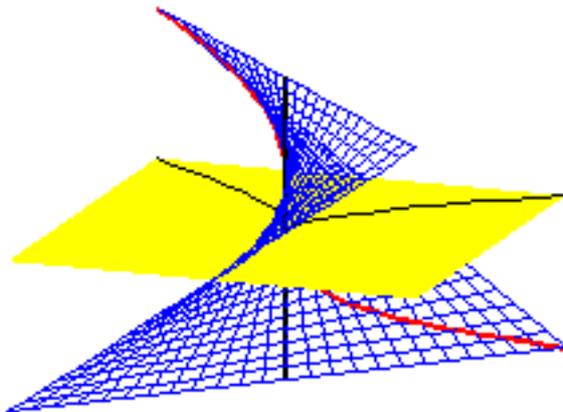
$$\mathbb{P}^2[z_0 : z_1 : z_2] \times \mathbb{P}^1[x_0 : x_1],$$

die die Gleichung $x_0 z_0 = x_1 z_1$ erfüllt.

Wir können dies sehr anschaulich geometrisch interpretieren. Wir bezeichnen mit $\pi : \text{Bl}_P \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ die Einschränkung der Projektion

$$\mathbb{P}^2[z_0 : z_1 : z_2]^2 \times \mathbb{P}^1[x_0 : x_1] \rightarrow \mathbb{P}^2[z_0 : z_1 : z_2]$$

auf die Teilmenge $\text{Bl}_P \mathbb{P}^2$. Das Urbild des Punktes P ist die gesamte Gerade $\{P\} \times \mathbb{P}^1[x_0 : x_1]$, während π außerhalb von P bijektiv ist. Anschaulich gesprochen kleben wir in die Ebene eine Gerade über dem Punkt P ein.



Die Aufblasung ist also quasi eine Girlande mit einer neuen Geraden als Achse. Die Punkte auf der eingeklebten Geraden entsprechen den Anstiegen von Geraden durch den aufgeblasenen Punkt.

Wenn wir daran denken, dass eine komplexe projektive Gerade wie eine Kugeloberfläche aussieht, dann können wir uns das Einkleben vorstellen als das Aufpusten der Ebene mit einem Strohhalm, der in den Punkt gesteckt wird.

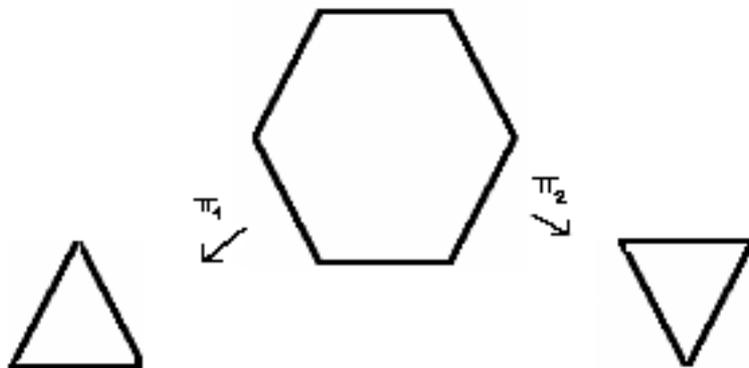
4.3 Zerlegung von Abbildungen mit Aufblasungen

Wir wollen nun die Cremona-Transformation aus 4.1 als Zusammensetzung von Aufblasungen verstehen - dort haben wir ja die Situation, dass über jedem der drei Punkte eine Gerade liegt. Um die Aufblasung in drei Punkten mit Gleichungen zu beschreiben, betrachten wir im Kreuzprodukt $\mathbb{P}^2[z_0 : z_1 : z_2]^2 \times \mathbb{P}^2[x_0 : x_1 :$

$x_2]$ die Teilmenge $\widetilde{\mathbb{P}}$, die durch die Gleichungen $x_0z_1 = x_1z_0 = x_2z_2$ gegeben ist. Die beiden Projektionen auf die Faktoren des Kreuzproduktes liefern uns Abbildungen

$$\mathbb{P}^2[z_0 : z_1 : z_2] \xleftarrow{\pi_1} \widetilde{\mathbb{P}} \xrightarrow{\pi_2} \mathbb{P}^1[x_0 : x_1 : x_2].$$

Wir rechnen leicht nach, dass $\widetilde{\mathbb{P}}$ mit den Abbildungen π_j gerade der Aufblasung der projektiven Ebene in drei Punkten entspricht, und zwar aus Symmetriegründen in beiden Richtungen. Dabei sind die Urbilder der Geraden $z_0 = 0, z_1 = 0, z_2 = 0$ unter π_1 die Geraden, die unter π_2 eingeklebt werden, und umgekehrt. Geometrisch ergibt dies folgendes Bild:



Wir können uns allgemeiner fragen, welche Abbildungen sich so zerlegen lassen. Es gilt der folgende Satz:

Satz 4.2. *Es sei*

$$F : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$$

$$z_0 : z_1 : z_2 \mapsto [F_0(z_0 : z_1 : z_2) : F_1(z_0 : z_1 : z_2) : F_2(z_0 : z_1 : z_2)]$$

eine Abbildung, die durch drei homogene Polynome von gleichem Grad gegeben ist. Weiterhin sei F außerhalb einer Kurve definiert und bijektiv. Dann kann man F wie eben in eine Folge von Auf- und Abblasungen (d.h. umgekehrten Aufblasungen) zerlegen.

Diese Tatsache kann für beliebige Flächen und auf höhere Dimensionen verallgemeinert werden. Speziell für den \mathbb{P}^2 gilt sogar der folgende Sachverhalt:

Satz 4.3. *Es sei $F : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ wie im vorigen Satz. Dann kann man F in eine Folge von Cremona-Transformationen und linearen Automorphismen (letztere sind einfache Koordinatenwechsel) zerlegen.*

Offenbar ist der zweite Satz stärker, da wir ja die Cremona-Transformation weiter in Aufblasungen aufspalten könnten.

4.4 Kubische Flächen

Eine weitere Anwendung von Aufblasungen ist das Studium sogenannter kubischer Flächen, d.h. von Flächen im $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$, die durch eine homogene Gleichung dritten Grades definiert sind. Wir können solche Flächen genau dadurch konstruieren, dass wir sechs geeignete Punkte P_1, \dots, P_6 im $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ aufblasen.

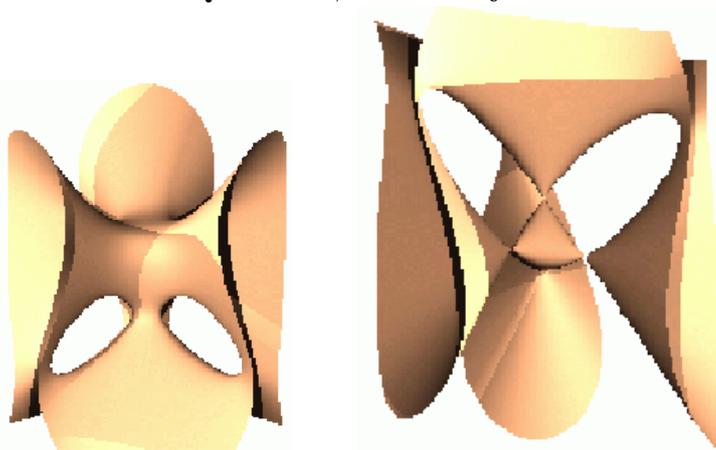
Durch sechs solche Punkte gibt es vier linear unabhängige Kubiken im \mathbb{P}^2 (der Raum der Kubiken ist zehndimensional, und jeder Punkt liefert eine Bedingung, falls die Punkte nicht zu speziell liegen). Diese geben uns eine Abbildung

$$F : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^3$$

$$z_0 : z_1 : z_2 \mapsto [F_0(z_0 : z_1 : z_2) : F_1(z_0 : z_1 : z_2) : F_2(z_0 : z_1 : z_2) : F_3([z_0 : z_1 : z_2])]$$

Man überlegt sich, dass dies eine Abbildung ist, die außerhalb der gemeinsamen Nullstellen von F_0, F_1, F_2, F_3 (also der sechs Punkte) wohldefiniert und injektiv ist. Die Fortsetzung der Abbildung auf die Aufblasung des \mathbb{P}^2 in den sechs Punkten ist sogar überall injektiv. Das Bild dieser Abbildung im \mathbb{P}^3 kann als Nullstellenmenge einer homogenen Gleichung dritten Grades beschrieben werden, daher nennen wir sie *kubische Fläche*. Diese Konstruktion kann dahingehend präzisiert werden, dass man jede kubische Fläche als Aufblasung des \mathbb{P}^2 in solchen sechs Punkten erhält. Sind keine drei dieser Punkte kollinear und liegen die sechs Punkte nicht auf einer Quadrik, dann ist die kubische Fläche sogar glatt (s.u.).

In diesem Fall kann man mit Hilfe der Konstruktion beweisen, dass auf einer solchen Fläche genau 27 Geraden liegen, und zwar die sechs bei der Aufblasung eingeklebten Geraden, die 15 Verbindungsgeraden zwischen den sechs Punkten und die Urbilder der sechs Quadriken, die durch je fünf der Punkte gehen.



Clebsch-Kubik

Cayley-Kubik

Bei speziellerer Lage der Punkte können einige der Geraden zusammenfallen und sogenannte singuläre Punkte entstehen. Wir rechnen hier nur den sehr speziellen

Fall durch, dass die Punkte Schnittpunkte von vier Geraden sind, auf der je drei der Punkte liegen. O.B.d.A. seien dies die Punkte

$$[1 : 0 : 0], [0 : 1 : 0], [0 : 0 : 1], [1 : -1 : 0], [1 : 0 : -1], [0 : 1 : -1];$$

die Geraden sind dann durch $z_0 = 0, z_1 = 0, z_2 = 0$ und $z_0 + z_1 + z_2 = 0$ gegeben. Die Kubiken durch diese Punkte sind dann gerade $z_0 z_1 z_2 = 0, z_0 z_1 (z_0 + z_1 + z_2), z_0 z_2 (z_0 + z_1 + z_2)$ und $z_1 z_2 (z_0 + z_1 + z_2)$.

Das Bild im $\mathbb{P}^3[x_0 : x_1 : x_2 : x_3]$ ist dann die Nullstellenmenge der Gleichung

$$x_0 x_1 x_2 + x_0 x_1 x_3 + x_0 x_2 x_3 - x_1 x_2 x_3 = 0.$$

Diese *Cayley-Kubik* hat vier Doppelpunkte (siehe Bild) und neun Geraden.

5 Singularitäten

Im nächsten Abschnitt beschäftigen wir uns mit der lokalen Theorie von Kurven. Wir haben in den betrachteten Beispielen eine Reihe von Fällen gesehen, in denen es besondere Punkte auf der Kurve gab, z.B. auf der Kurve $xy = 0$ den Schnittpunkt $(0, 0)$ der beiden Geraden oder den Spitzenpunkt auf der Neilschen Parabel $y^2 = x^3$. Wir wollen das Verhalten der Kurven in diesen Punkten näher untersuchen. Wir können ab jetzt wieder auf die projektive Schreibweise verzichten, da uns nur das Verhalten in der Umgebung dieser Punkte interessiert.

Definition 5.1. *Es sei C eine Kurve, die durch ein Polynom $F(x, y)$ gegeben ist. Ein Punkt $P \in C$ heißt *singulär*, falls die partiellen Ableitungen $\partial F/\partial x$ und $\partial F/\partial y$ in P beide verschwinden. Ein Punkt, der nicht *singulär* ist, heißt auch *glatt*.*

Im Beispiel der Neilschen Parabel hätten wir $\partial F/\partial x = 3x^2$ und $\partial F/\partial y = 2y$, beide zusammen verschwinden genau im Nullpunkt.

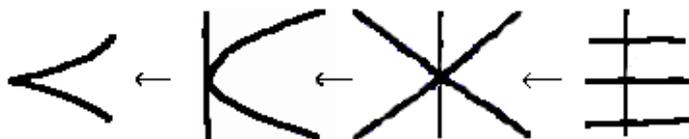
5.1 Auflösung von Singularitäten mit Aufblasungen

Wir untersuchen das Verhalten von Kurven, die in ihrem singulären Punkt aufgeblasen werden. Das Verhalten der Hypozykloide und der Kleeblattkurve unter der Cremona-Transformation legt nahe, dass die Singularitäten sich damit vereinfachen lassen. Als erstes Beispiel betrachten wir die Kurve $y^2 - x^2(x + 1)$ mit einem Doppelpunkt bei $(0, 0)$. Das Urbild dieser Kurve unter der Aufblasung enthält sicher die eingeklebte Gerade. Anschaulich erwarten wir, dass das Urbild außerdem eine glatte Kurve enthält, da die beiden Tangenten der Kurve im Punkt

$(0, 0)$ unterschiedliche Richtungen haben und daher bei der Aufblasung auf der Girlande auseinandergezogen werden. Das lässt sich auch rechnerisch überprüfen:

Die aufgeblasene Kurve ist gegeben durch die Gleichungen $y^2 - x^2(x+1)$ und $yz_0 = xz_1$. Falls $y \neq 0$ ist, sind offenbar auch $x, z_0, z_1 \neq 0$, d.h. wir können $y = xz_1/z_0$ schreiben und erhalten durch Einsetzen die Gleichung $x^2(z_1^2 - (x+1)z_0^2) = 0$, also (da $x \neq 0$) $z_1^2 - (x+1)z_0^2 = 0$ bzw. (da wir $z_0 = 1$ setzen können) $z_1^2 - (x+1) = 0$, also eine schöne glatte Parabel, die die eingeklebte Gerade in zwei verschiedenen Punkten transversal schneidet.

Der Fall der Neilschen Parabel ist schon deutlich komplizierter. Mit analogen Rechnungen erhält man nach einer Aufblasung eine Parabel, die die eingeklebte Gerade E_1 in einem Punkt berührt (s. das Bild der Aufblasung auf Seite 68; dort sind die Neilsche Parabel und ihr Urbild eingezeichnet). Die neue Kurve hat zwar zwei glatte Komponenten, die sich aber nicht transversal schneiden, sondern berühren (die entsprechenden Rechnungen sind analog zum obigen Fall). Dies können wir durch erneutes Aufblasen beheben: Danach haben wir drei Geraden, die sich in einem Punkt schneiden - die neue eingeklebte Gerade E_2 , das Urbild von E_1 und das Urbild der Kurve. Um diese noch zu trennen, können wir erneut aufblasen und erhalten endlich eine Konfiguration von vier Geraden, die sich transversal in verschiedenen Punkten schneiden. Insgesamt erhalten wir also folgendes Bild:



Diesen Sachverhalt kann man auf beliebige Singularitäten verallgemeinern:

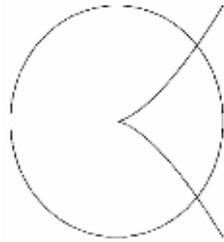
Satz 5.2. *Es sei P ein singulärer Punkt einer algebraischen Kurve, die außerhalb von P glatt ist. Dann gibt es eine endliche Folge von Aufblasungen, so dass das Urbild der Kurve aus endlich vielen glatten Kurven besteht, die sich transversal schneiden.*

Wir beweisen den Satz hier nicht, die Beweisidee ist aber durch die obigen Beispiele gut illustriert. Man sieht, dass durch die Aufblasungen die Kompliziertheit der Kurve reduziert wird - in der Gleichung spaltet man die zusätzlichen Geraden ab (die sich durch weiteres Aufblasen auch in der Richtung von der Restkurve trennen lassen), die verbleibende Kurve hat einen kleineren Grad und/oder eine einfachere Singularität.

Dieser Satz gilt offenbar auch für Kurven mit endlich vielen singulären Punkten. Er lässt sich sogar auf höhere Dimensionen verallgemeinern.

5.2 Zöpfe und Knoten von Singularitäten

Wir haben uns weiterhin die Frage gestellt, welche Form die Kurve in einer Umgebung eines singulären Punktes hat.



Wenn wir die Kurve (reell 2-dimensional) mit einer kleinen Kugel im \mathbb{C}^2 (reell dreidimensional im reell vierdimensionalen \mathbb{C}^2) schneiden, dann entsteht ein reell eindimensionales Objekt, das wir als sogenannten Knoten identifizieren. Eine Möglichkeit der Beschreibung ist z.B. die folgende:

Die Parametrisierung der Neilschen Parabel $y^2 = x^3$ mittels $t \mapsto (t^3, t^2)$ gibt uns eine Abbildung von \mathbb{C} auf die Kurve, die offenbar bijektiv und außerhalb von $(0, 0)$ auch umkehrbar differenzierbar ist. Wie finden wir die Umgebung der Singularität wieder? In \mathbb{C} ist bekanntlich ein Kreis um $(0, 0)$ durch $\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$ mit $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ gegeben. Wenn wir das Bild dieses Weges in der Kurve verfolgen, können wir es uns als *Zopf* veranschaulichen:

Wir können die beiden Lösungen $y_1 = x^{3/2}$ und $y_2 = -x^{3/2}$, die stetig von φ abhängen, graphisch als Aufwicklung von zwei Kurven auf einem Zylinder vorstellen, deren Punkte immer antipodal zueinander sind. Die Höhe des Zylinders entspricht dann gerade dem durchlaufenen Winkel.

Wenn wir dies in die Ebene projizieren, kann die Geometrie dieser Wege folgendermaßen veranschaulicht werden:



Dies ist ein (2-strängiger) Zopf. Zöpfe bilden übrigens mit der Verknüpfung eine Gruppe und haben eine Reihe von interessanten Anwendungen.

Da sich der Kreis am Ende schließt, müssen wir die Enden des Zopfes zusam-

menkleben. Es entsteht ein *Knoten*, die sogenannte *Kleeblattschlinge*.



Ein solcher Knoten ist eine Einbettung der Kreislinie in den Raum. Offenbar ist die Kleeblattschlinge nicht aufknotbar und kann somit genutzt werden, um die Geometrie der Umgebung der Singularität von der Umgebung eines glatten Punkts (also einer Kreislinie) zu unterscheiden.

Im allgemeinen muss durch diese Konstruktion nicht unbedingt ein einzelner Knoten entstehen, da sich Zöpfe nicht immer zu einer einzelnen Kurve zusammenbinden. Im Falle eines Doppelpunktes $x^2 = y^2$ erhalten wir z.B. zwei ineinander verschränkte Kreise, eine sogenannte *Verschlingung*.



Daher hat die Singularität der Neilschen Parabel (die *Spitze*) einen anderen Typ als der Doppelpunkt.

5.3 Einfache Singularitäten

Zum Abschluß haben wir uns mit einer speziellen Klasse von Singularitäten beschäftigt, die sich besonders gut klassifizieren läßt. Unter Klassifikation verstehen wir, dass wir den singulären Punkten einen bestimmten Typ zuordnen, zu dem sie bezüglich einer natürlichen Relation äquivalent sind.

Seien $F(x, y)$ und $F'(x, y)$ zwei Kurven mit singulärem Punkt $(0, 0)$. Wenn es eine Abbildung $G : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ mit $G(0, 0) = (0, 0)$ gibt, so dass G durch Potenzreihen gegeben, in einer Umgebung von $(0, 0)$ umkehrbar ist und F dort in F' überführt,

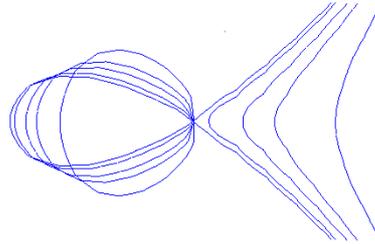
dann heißen die Singularitäten äquivalent.

Beispiel 5.3. Der Doppelpunkt der Kurve $y^2 = x^2(x+1)$ und der Kurve $y^2 = x^2$ sind äquivalent. Dies spiegelt sich übrigens auch darin wider, dass beide dieselbe Verschlingung besitzen.

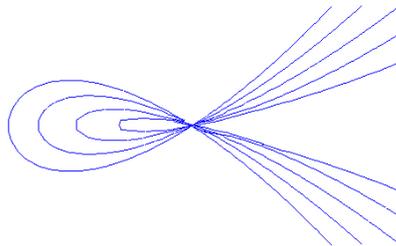
Nun stellen wir uns die Frage, ob zwei Singularitäten äquivalent sind, wenn man die Gleichung der Kurve leicht verändert, d.h. einen zusätzlichen Parameter in die Gleichung einführt ("Familien" von Singularitäten). In einigen Beispielen erhalten wir dadurch glatte Kurven, z.B. im Falle

$$F(x, y, t) = y^2 - x(x+t)(x-t).$$

Falls $t = 0$ ist, haben wir einen Doppelpunkt, für $t \neq 0$ ist es eine glatte Kurve.



In anderen Fällen entsteht eine andere Singularität, z.B. kann aus einer Spitze ein Doppelpunkt werden, wie man anhand der Kurven $F(x, y, t) = y^2 - x^2(x+t)$ sieht:

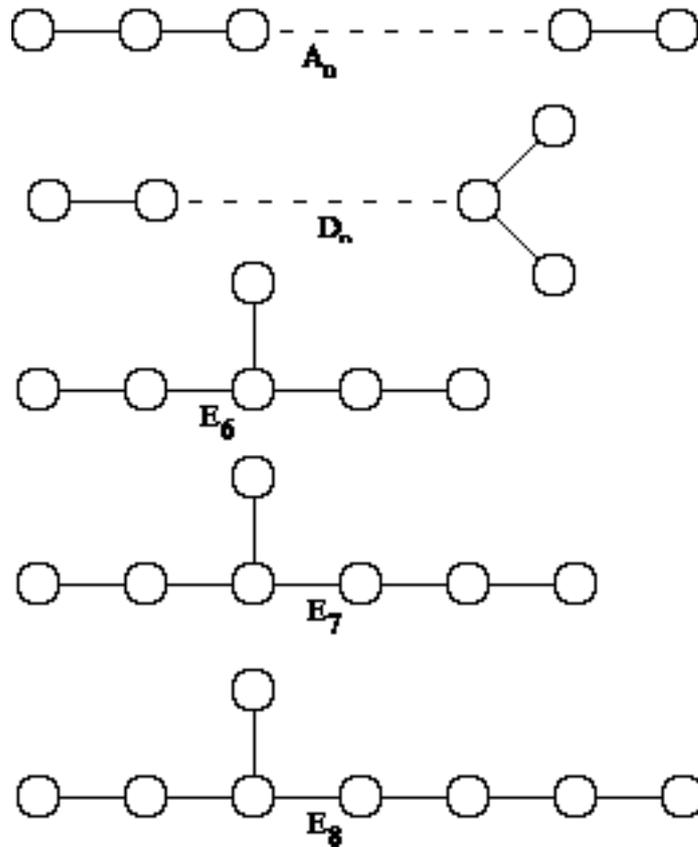


Einfache Singularitäten definieren wir als solche, in deren Familien bis auf Äquivalenz nur endlich viele Typen von Singularitäten vorkommen. Es gilt die folgende erstaunliche Tatsache:

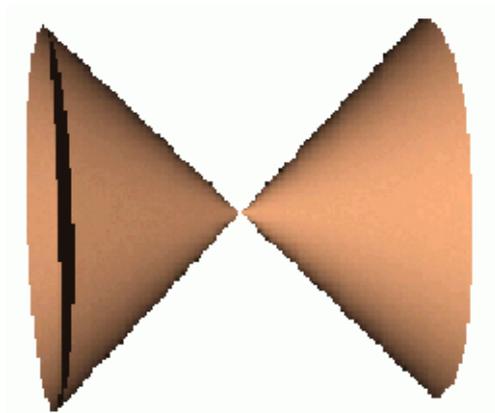
Satz 5.4. *Eine einfache Singularität ist äquivalent zu einem der folgenden Typen:*

$$\begin{array}{ll} x^{k+1} + y^2 \text{ mit } k \geq 1 & (A_k) \\ y(x^2 + y^{k-2}) \text{ mit } k \geq 4 & (D_k) \\ x^3 + y^4 & (E_6) \\ x(x^2 + y^3) & (E_7) \\ x^3 + y^5 & (E_8) \end{array}$$

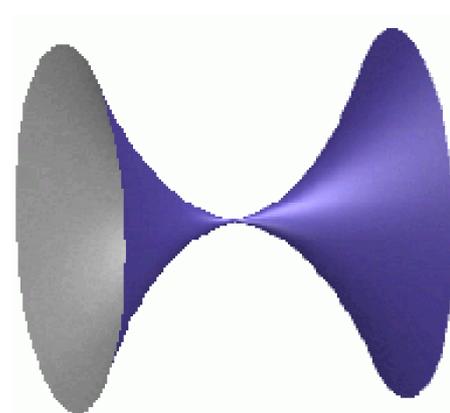
Die Auflösungen dieser Singularitäten lassen sich durch die folgenden Graphen veranschaulichen (hierbei veranschaulichen die Punkte die bei Aufblasungen eingeklebten Geraden, sie sind verbunden, wenn sich diese Geraden schneiden):



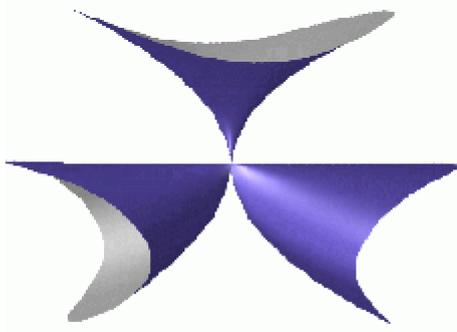
Diese Graphen tauchen übrigens in anderem Zusammenhang in der Mathematik auf, z.B. als Dynkin-Diagramme von Lie-Algebren. Das Zustandekommen dieser Liste kann auch dadurch veranschaulicht werden, dass solche Singularitäten als Flächensingularitäten auftreten, und zwar als Quotienten des \mathbb{C}^2 nach einer endlichen Untergruppe der unitären 2×2 -Matrizen.



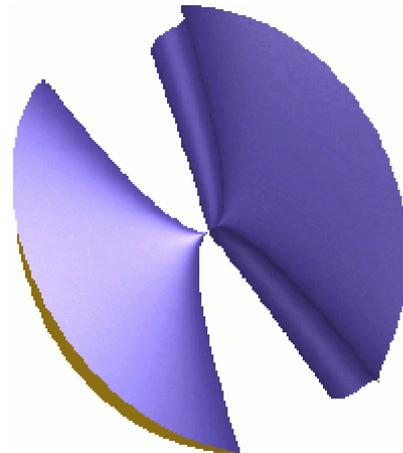
A_1 -Singularität



A_3 -Singularität



D_6 -Singularität



E_7 -Singularität

In der Arbeitsgruppe “Polyeder” (siehe dort) wurden diese Gruppen in einem etwas anderen Zusammenhang betrachtet, nämlich als Untergruppen der orthogonalen Abbildungen des \mathbb{R}^3 . Die Gruppenordnungen unterscheiden sich um den Faktor zwei, jedoch stimmen die Listen strukturell überein. Dabei entspricht gerade

A_k der zyklischen Gruppe, D_k der Diedergruppe, E_6 der Tetraedergruppe, E_7 der Oktaedergruppe und E_8 der Ikosaedergruppe.