Daniel Platt d.platt@web.de

Dualzahlen

Idee

Das Dezimalsystem ist das Zahlensystem, in dem wir normalerweise unsere Zahlen schreiben. Es ist das Zahlensystem, mit dem wir auch in der Schule rechnen. Im Dezimalsystem gibt es 10 verschiedene Ziffern:

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$$

Unser Ziel ist jetzt, ein Zahlensystem zu finden, das mit nur zwei verschiedenen Ziffern auskommt:

$$0, 1$$

Und natürlich wollen wir auch in diesem Zahlensystem alle möglichen Zahlen darstellen können! Es wäre ein großes Problem, wenn wir zum Beispiel die Zahl 10 in unserem neuen Zahlensystem nicht mehr darstellen könnten.

Das Dezimalsystem

Das Dezimalsystem ist ein Stellenwertsystem. Wir betrachten die Zahl 2012: Wir erhalten den Wert der Zahl, indem wir jede einzelne Ziffer mit dem passenden Stellenwert multiplizieren:

$$2012 = 2 \cdot 1000 + 0 \cdot 100 + 1 \cdot 10 + 2 \cdot 1$$

Der Stellenwert der letzten Ziffer ist 1,
der Stellenwert der vorletzten Ziffer ist 10,
der Stellenwert der drittletzten Ziffer ist 10^2,
der Stellenwert der viertletzten Ziffer ist 10^3.

Genauso für die zahl 357:

$$\begin{array}{ccrcrcrcrcrcr} 357 & = & \text{Ziffer} & \cdot & \text{Stellenwert} & + & \text{Ziffer} & \cdot & \text{Stellenwert} & + & \text{Ziffer} & \cdot & \text{Stellenwert} \\ & = & 3 & \cdot & 100 & + & 5 & \cdot & 10 & + & 7 & \cdot & 1 \end{array}$$

Das Dualsystem

Um unser neues Zahlensystem aufzustellen, machen wir nur zwei Änderungen:

- Wir erlauben nur noch die Ziffern 0 und 1.
- Als Stellenwerte nehmen wir nicht 1, 10, 10^2, 10^3, ... Sondern wir nehmen:

$$1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, \ldots$$

Alle Zahlen in diesem Zahlensystem schreiben wir mit einer kleinen "2" unten. Also z.B. 100101_2.

Beispiele:

(a) Wir suchen die Dezimaldarstellung von 101_2. Dazu gehen wir wie vorher vor:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcr} 101_2 & = & \text{Ziffer} & \cdot & \text{Stellenwert} & + & \text{Ziffer} & \cdot & \text{Stellenwert} & + & \text{Ziffer} & \cdot & \text{Stellenwert} \\ & = & 1 & \cdot & 4 & + & 0 & \cdot & 2 & + & 1 & \cdot & 1 \\ & = & 5 \end{array}$$

Die Dualzahl 101_2 entspricht also der Dezimalzahl 5.

(b) Wir suchen die Dezimaldarstellung von 1111_2:

$$\begin{aligned} 1111_2 &= 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \\ &= 15 \end{aligned}$$

(c) Wir suchen die Dezimaldarstellung von 11001100_2:

$$\begin{aligned} 11001100_2 &= 1 \cdot 128 + 1 \cdot 64 + 0 \cdot 32 + 0 \cdot 16 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \\ &= 204 \end{aligned}$$

(d) Wir suchen die Dualdarstellung der Dezimalzahl 8:

Es ist $8 = 2^3$, also hat die gesuchte Dualzahl an der Stelle mit dem Stellenwert 8 die Ziffer 1 und ansonsten nur Nullen. Die gesucht Dualzahl ist also: 1000_2.

(e) Wir suchen die Dualdarstellung der Dezimalzahl 128:

Genau wie im letzten Beispiel sehen wir, dass bei der gesuchten Dualzahl nur an der Stelle mit Stellenwert 128 die Ziffer 1 stehen muss. Alle anderen Ziffern müssen dort 0 sein. Die gesuchte Dualzahl ist also: 10000000_2.

(f) Wir suchen die Dualdarstellung der Dezimalzahl 6:

2^2 ist die größte Zweierpotenz die noch in 6 hineinpasst. Mit Sicherheit sind also die Ziffern mit noch größeren Stellenwerten 0. Wir müssen also nur für die Ziffern mit den Stellenwerten 2^2, 2^1 und 1 überlegen, welche Ziffern dort stehen müssen.

Durch Raten sehen wir, dass die Lösung 110_2 sein muss.

(g) Wir suchen die Dualdarstellung der Dezimalzahl 22:

Zuerst prüfen wir, welche die größte Zweierpotenz ist, die noch in 22 hineinpasst. Das ist $2^4 = 16$. Die nächstgrößere Zweierpotenz 32 passt schon nicht mehr hinein.

Wir schreiben also an die Stelle mit Stellenwert 16 eine 1 und müssen nun mit den restlichen Stellen noch die Zahl 6 bilden. Im vorigen Punkt haben wir gesehen, dass 110_2 die Darstellung von 6 ist.

Also ist

$$\underbrace{1}_{16}\,0\,\underbrace{110}_{6}$$

die gesuchte Dualzahl.

Lösung zu den Hausaufgaben

Aufgabe `H-07042` (ohne Abgabe, Lösungen auf der Website):

(a) Schreibe die gegebenen Dezimalzahlen als Dualzahlen:

$$10_{10},\ 100_{10},\ 1000_{10},\ 55_{10}$$

(b) Berechne die folgende Summe von zwei Dualzahlen

$$11001_2 + 101001_2$$

indem du eine schriftliche Addition im Zweiersystem durchführst.

Lösung:

(a)
- $10 = 8 + 2 = 1010_2$
- $100 = 64 + 32 + 4 = 1100100_2$
- $1000 = 512 + 256 + 128 + 64 + 32 + 8 = 1111101000_2$
- $55 = 110111_2$

(b) Wir rechnen ähnlich wie im Dezimalsystem: (Bei Gelegenheit folgt hier eine ausführlichere Erklärung)

$$\begin{array}{ccccccc} & & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$