
Mein Sohn erinnert mich sehr an meinen Urgroßvater.
−cos x
sin x

Zugänge zum Integral

- Überblick
- Integration als Rekonstruktion von Beständen

Mögliche Zugänge zum Integralbegriff:

1. Bestimmung von (orientierten!) Flächeninhalten bzw. Flächeninhaltsfunktionen unter Funktionsgraphen (Ober- und Untersummen – Riemann-Integral)
2. Bestimmung von Stammfunktionen (Umkehrung des Ableitens)
3. „Rekonstruktion“ von Beständen aus Änderungen

Alle drei Aspekte sind bei der Behandlung der Differentialrechnung von Bedeutung und sollten berücksichtigt werden.
Aber:
In welcher Reihenfolge und mit welcher Gewichtung?

Wie bereits beim Ableitungbegriff wird sich zeigen, dass auch der Integralbegriff einen substanziellen Beitrag zur Integration der drei Grunderfahrungen G1 bis G3 leistet.

„Rekonstruktion“ von Beständen aus Änderungen

Der Weg, der ausgehend von der Existenz des Inhalts die Eigenschaften der Flächeninhaltsfunktion untersucht, findet seit geraumer Zeit zunehmend Beachtung in der Literatur und Schulbuchentwicklung (Grundlage sind Beiträge von A. Kirsch).

„Integrieren heißt Rekonstruieren“

(DANCKWERTS/VOGEL)

- Rekonstruktion von Beständen als Ausgangspunkt für die Herausbildung eines Grundverständnisses vom Integral.

„Rekonstruktion“ von Beständen aus Änderungen

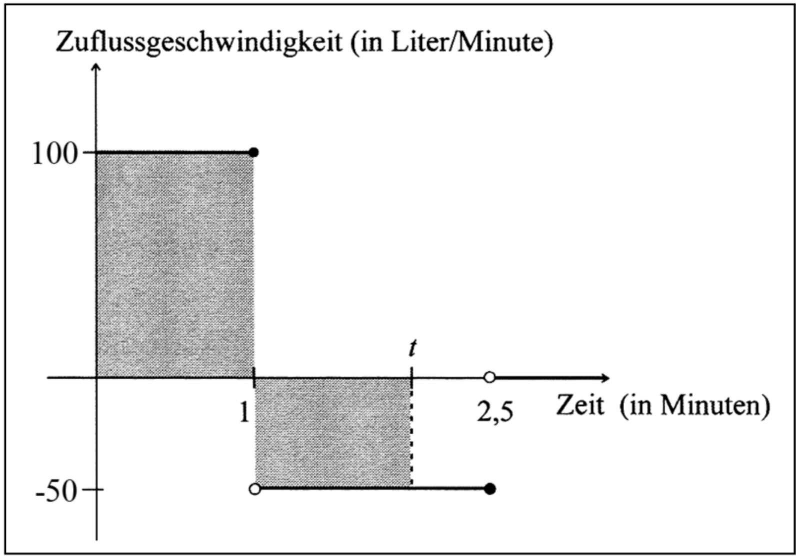
Im bisherigen Gang der Analysis war die Ableitung ein zentraler Begriff, mit deren Hilfe man die momentane Änderungsrate einer Größe bestimmen kann.

Nun wird ein neuer Problemkreis eingeführt, bei dem man umgekehrt von der momentanen Änderungsrate einer Größe auf die Gesamtänderung dieser Größe schließen muss.

Integration als Rekonstruktion von Beständen: Ein Einstiegsbeispiel

In eine leere Badewanne wird eine gewisse Zeit lang Wasser eingelassen, dann die Wasserzufuhr gestoppt, gleichzeitig der Abfluss geöffnet und nach einer Weile wieder geschlossen:

Eine mögliche Modellierung sieht so aus:

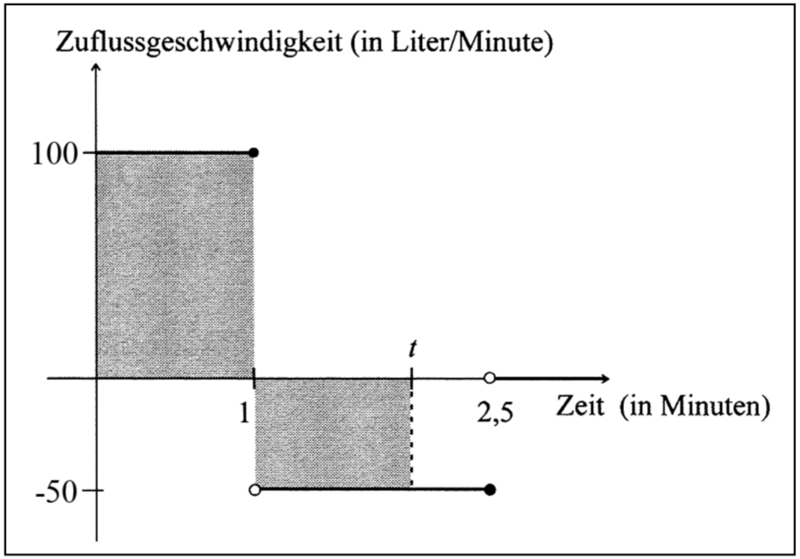


1. Wie viel Wasser befindet sich nach einer beliebigen Zeit t in der Wanne?
2. Stellen Sie die Wassermenge als (stückweise definierte) Funktion in Abhängigkeit von der Zeit t dar und fertigen Sie einen Graphen dieser Funktion an.

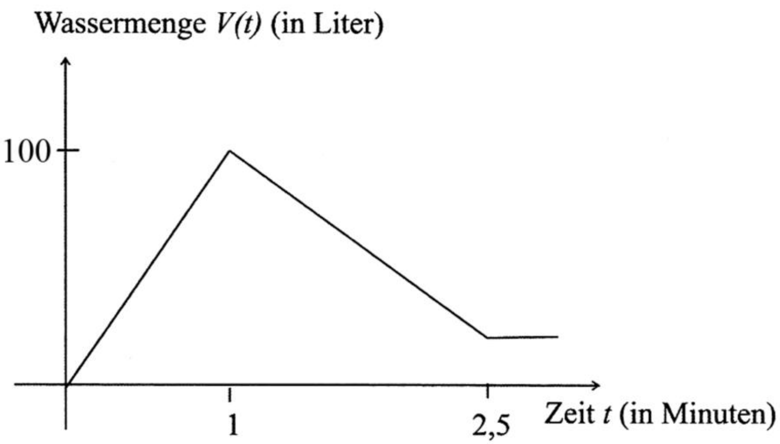
- Innerhalb der ersten Minute nimmt die Wassermenge V zu, in den darauf folgenden eineinhalb Minuten nimmt sie ab, danach ist sie konstant.
- Für $t < 1$ min ist die zugeflossene Wassermenge 100t (Liter).
- Für einen Zeitpunkt t während der Abflussphase ist von den in der ersten Minute zugeflossenen 100 Litern jene Menge abzuziehen,

  die wieder abgeflossen ist:

  100-50(t - 1) Liter.



$$V(t) = \begin{cases} 100t & \text{für } 0 \le t \le 1 \\ 150 - 50t & \text{für } 1 < t \le 2{,}5 \\ 25 & \text{für } t > 2{,}5 \end{cases}$$



- Die Produkte 100t und 50(t – 1) sind Rechteckinhalte.
- In der Gesamtbilanz bis zu einem Zeitpunkt t werden oberhalb der Zeitachse liegende Inhalte positiv und unterhalb liegende negativ gezählt.
- V(t) ist eine Summe vorzeichenbehafteter Rechteckinhalte.

→ orientierter Flächeninhalt

Integration als Rekonstruktion von Beständen

Rekonstruktion:

- Aus der Kenntnis der Zuflussgeschwindigkeit des Wassers zu jedem Zeitpunkt wird auf die Wassermenge in der Wanne zu jedem Zeitpunkt zurückgeschlossen.
- Zuflussgeschwindigkeit:

  Ableitung V‘(t) – momentane Änderungsrate der Wassermenge

  $\rightarrow$ Aus der Änderungsrate V‘ wird die Funktion V wiederhergestellt (rekonstruiert).

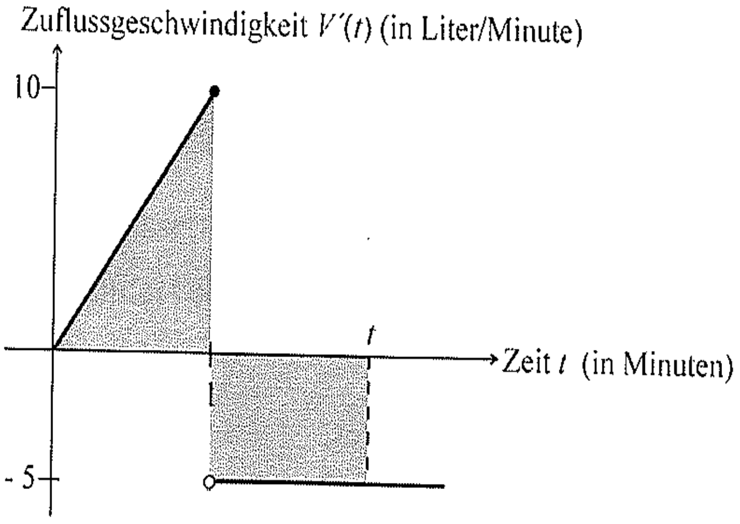
Das lateinische Wort für Wiederherstellen ist „integrare“.

Bedeutung des Beispiels

1. Es öffnet einen Weg für das Grundverständnis vom Integrieren als Rekonstruieren.
2. Es verankert früh die Vorstellung vom Integral als orientiertem Flächeninhalt A.

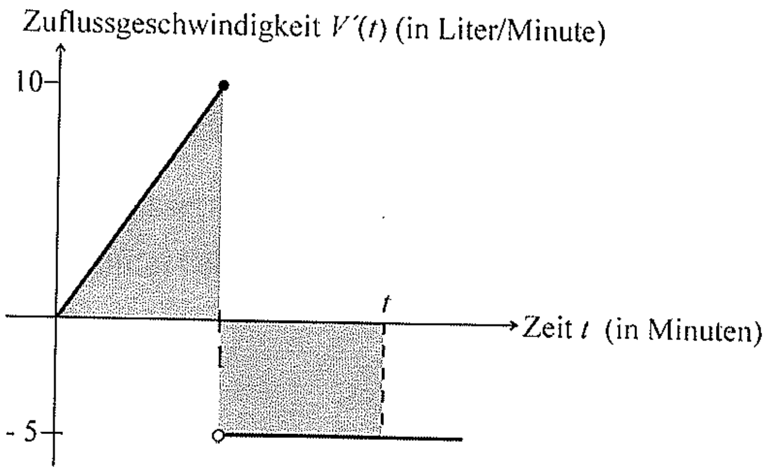
Die Variation des Beispiels führt zu einer vertieften Auseinandersetzung des Rekonstruktionsaspekts:

Die Zuflussgeschwindigkeit V‘(t) des Wassers ist nichtmehr stückweise konstant, sondern verläuft im ersten Zeitabschnitt linear und streng monoton steigend.
(mögliche Deutung: Wasserhahn wird gleichmäßig immer weiter geöffnet)

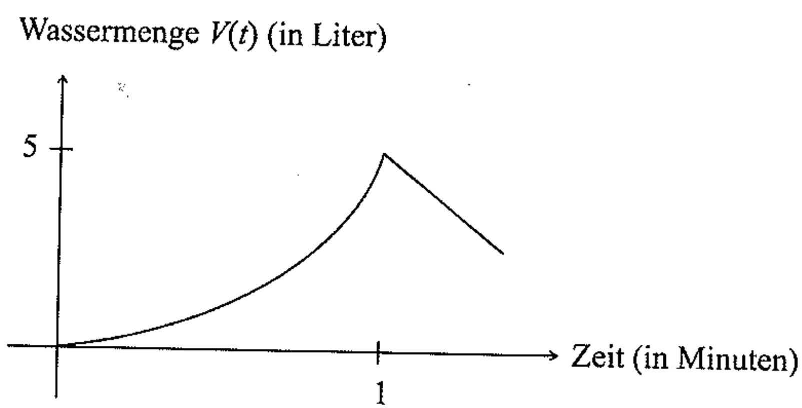


Nichtkonstanter Zufluss

Variation des Beispiels



Nichtkonstanter Zufluss



Wasserstand

Zur Rekonstruktion wird der orientierte Flächeninhalt bis zum Zeitpunkt t berechnet:

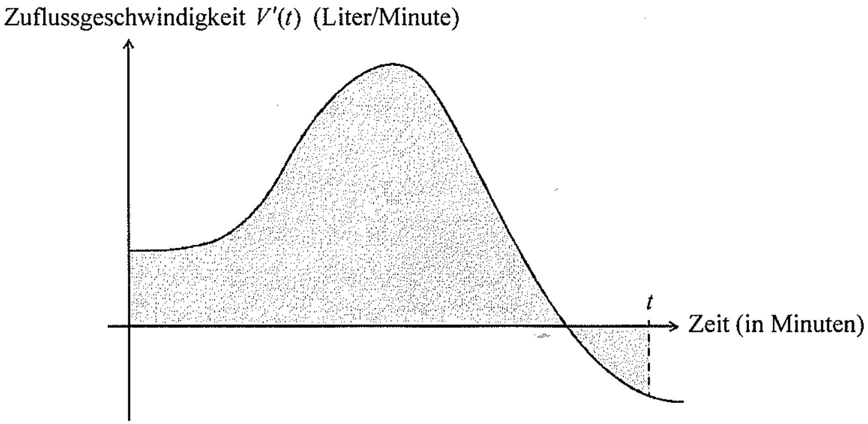
$$V(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot t \cdot 10t & \text{für } 0 \le t \le 1 \\ \frac{1}{2} \cdot 10 - (t-1) \cdot 5 & \text{für } t > 1 \end{cases}$$

Variation des Beispiels

- Es wurde eben wie im Fall konstanter Zuflussgeschwindigkeit verfahren.

  Wie ist das zu rechtfertigen?

Dazu folgender allgemeiner Fall:



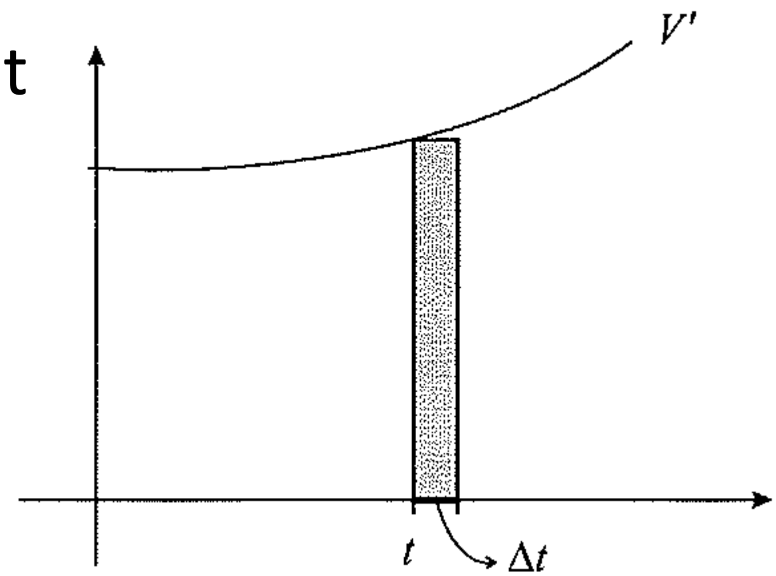
Nichtlinearer Zufluss

Variation des Beispiels

Typische Idee der Analysis:

- Die Zuflussgeschwindigkeit wird in genügend kleinen Zeitintervallen betrachtet.
- In jedem dieser Intervalle kann man wie zu Beginn verfahren.

$$V'(t) \approx \frac{\Delta V}{\Delta t} \text{ also } \Delta V \approx V'(t) \cdot \Delta t$$



V' ist im Kleinen nahezu konstant.

Rekonstruktion der Wassermenge zu einem beliebigen Zeitpunkt t:

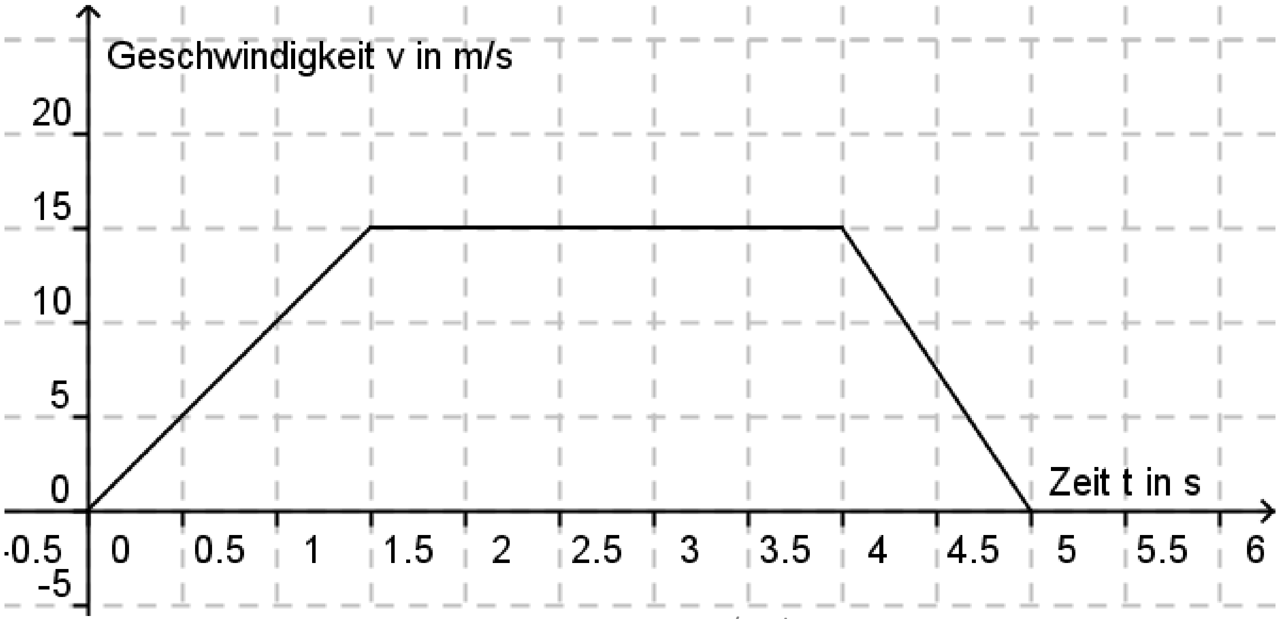
- Die Zuwächse längs aller Teilintervalle , in die das Intervall [0, t] zerlegt gedacht war, sind aufzusummieren.
- geometrische Deutung als Summe aller kleinen orientierten Rechteckinhalte
- Man berechnet also den orientierten Flächeninhalt, den V‘ mit der Zeitachse zwischen 0 und t einschließt.

- Durch diese Erstbegegnung mit dem Integralbegriff wird das heuristische Arbeiten gestärkt (Grunderfahrung G3)
- Sie enthält den Keim für eine analytische Fundierung des Integralbegriffs.

Ein weiteres Beispiel

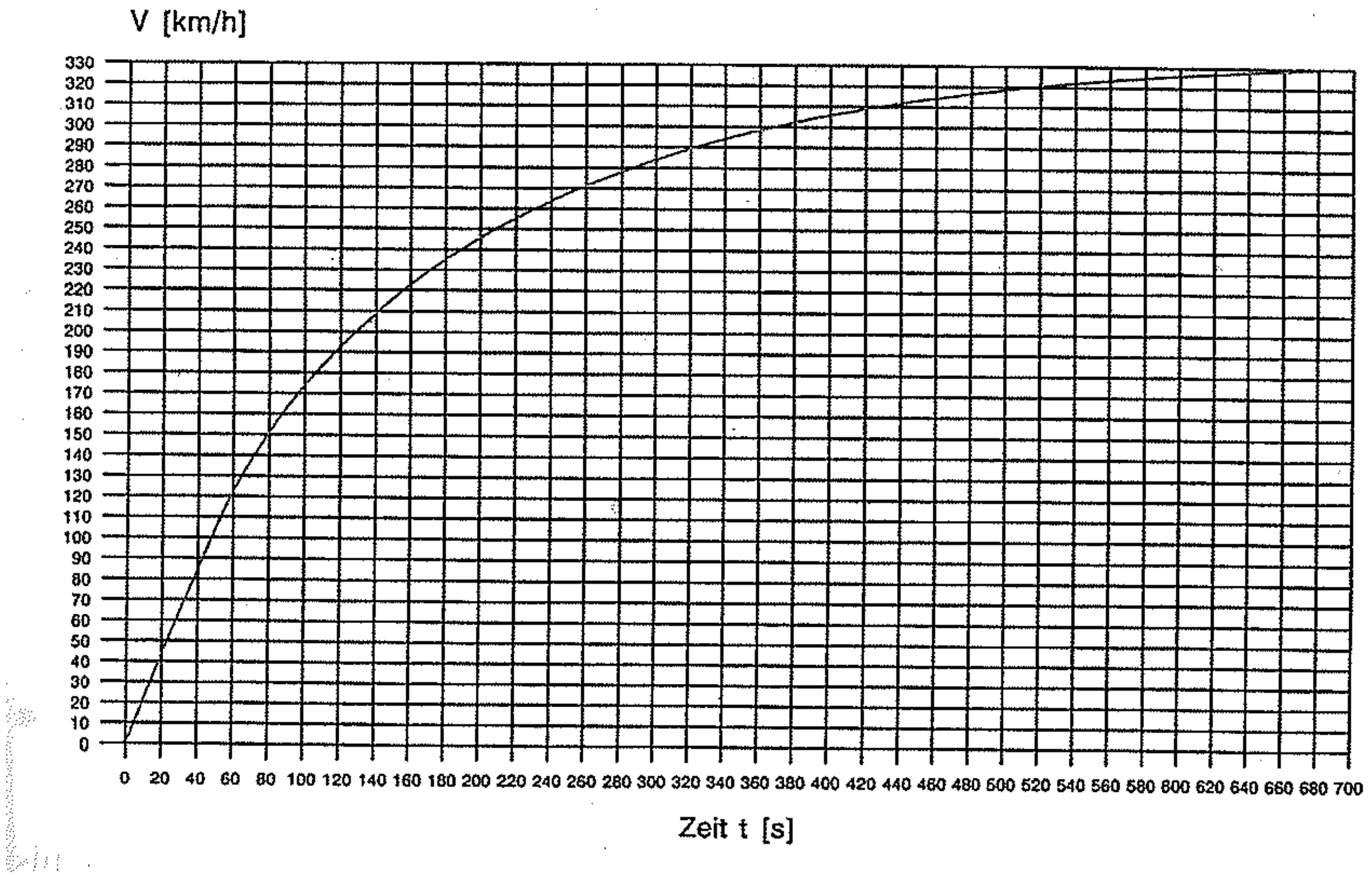
Ein Wagen fährt eine geneigte Ebene hinab, anschließend bewegt er sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf einer Waagerechten, bevor er eine andere geneigte Ebene hinauffährt, bis er zum Stillstand kommt. (Alle Bewegungen werden als reibungslos angenommen.)

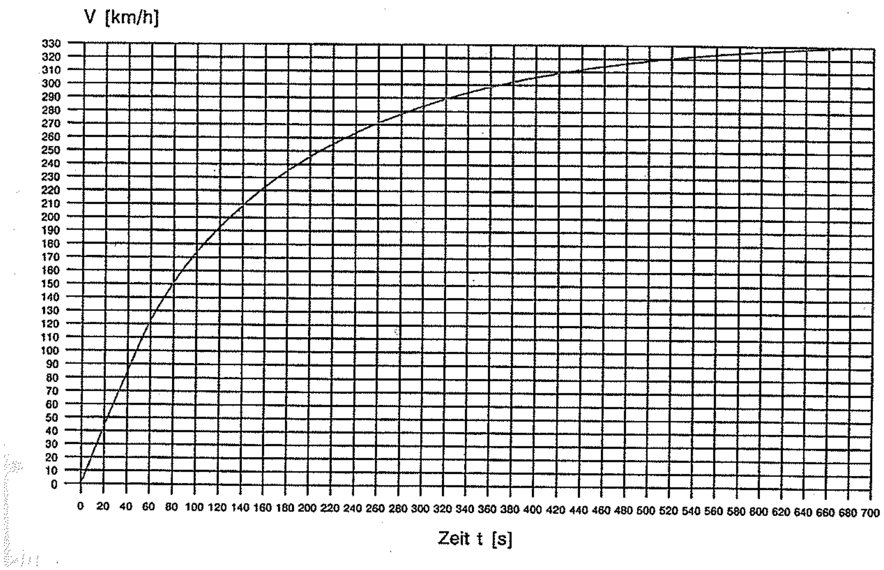
Die Abbildung unten zeigt das v-t-Diagramm der Bewegung.



- Welchen Weg hat der Wagen insgesamt (auf der ersten geneigte Ebene, in der Waagerechten, auf der zweiten geneigte Ebene) zurück gelegt?
- Skizzieren Sie ein s-t-Diagramm für die Bewegung des Wagens.

Beispiel: Geschwindigkeit- Zeit- Diagramm eines ICE (Schornstein (2003), S. 147)
Rekonstruktion von Wegen aus den Geschwindigkeiten

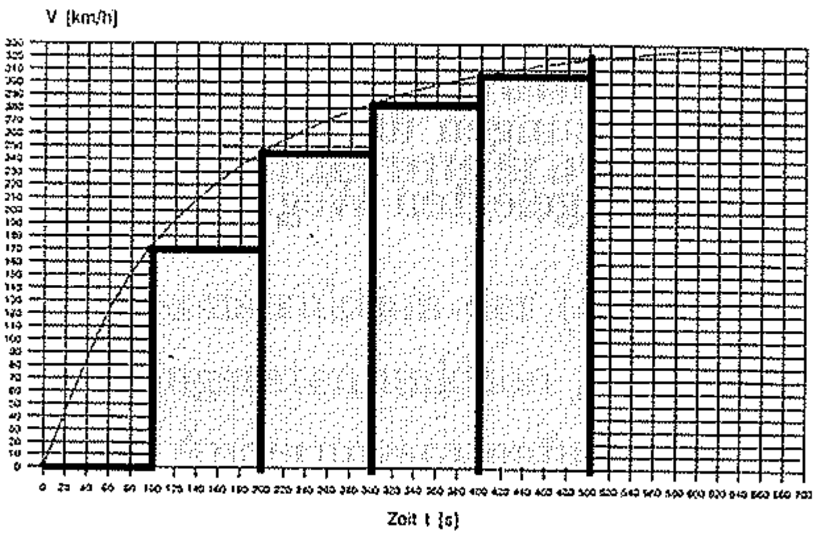


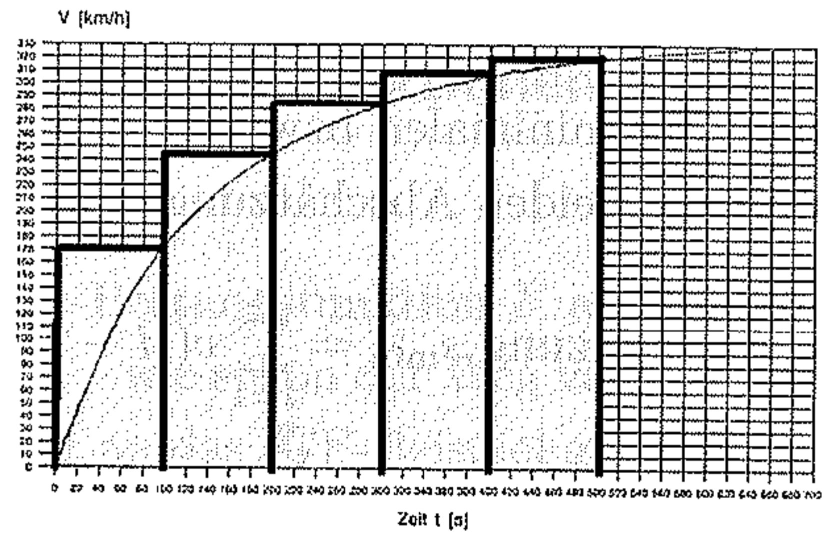


Tab. 3.2: Abschätzung des in 500 Sekunden zurückgelegten Weges mit $\Delta t = 100\,\mathrm{s}$

Zeit t in s	Untere Abschätzung		Obere Abschätzung	
	v in km/h	s in m	v in km/h	s in m
0 - 100	0	0	173	4806
100 - 200	173	4806	245	6806
200 - 300	245	6806	285	7917
300 - 400	285	7917	305	8472
400 - 500	305	8472	319	8861
	Gesamtweg	28001		36862

Graphische Veranschaulichung der Terme $s = v \cdot \Delta t$ durch Rechtecke, die den Wegzuwachs in Zeitschritten Δt angeben





Potenzial des Beispiels:

- Herstellung des Bezugs zu Flächeninhalten, ohne dass dies unmittelbar in dem Kontext der Aufgabe gegeben war
- Betrachtung von Ober- und Untersummen
- Annäherung an die Idee des Grenzübergangs: „Verfeinerung“ führt zu genaueren Werten, „ideal“ wäre $\Delta t \to 0$
- Vorbereitung einer (späteren)exakten Einführung des Integrals $s(t) = \int_0^t v(t)dt = \lim_{\Delta t \to 0} U_n = \lim_{\Delta t \to 0} O_n$
- Ist Beispiel ist aus der Differentialrechnung bekannt, so wird der Bezug zwischen Ableitung und Integral sichtbar

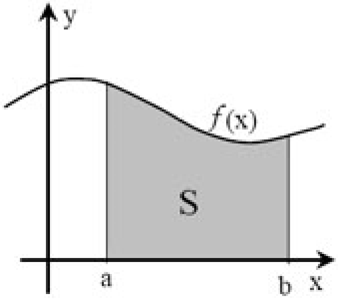
Integration als Rekonstruktion von Beständen

Weitere Beispielaufgaben:

Handreichung des Lisum:

Integralrechnung-

Rekonstruktion von Beständen



http://bildungsserver.berlin-brandenburg.de/fileadmin/bbb/unterricht/rahmenlehrplaene_und_curriculare_materialien/sekundarstufe_I/Anderes/HR_Integralrechnung_2009.pdf

Erkenntnis:

- Kennt man die momentane Änderungsrate einer Größe (Funktion) in einem Intervall, so lassen sich dort die Werte der Funktion rekonstruieren. Die rekonstruierten Funktionswerte sind interpretierbar und berechenbar als orientierte Flächeninhalte.
- Deshalb sucht man nach Methoden zur Bestimmung solcher Flächeninhalte.

„Auf dem Weg“ zur Integralfunktion

Übergang von der Ausgangsfunktion g‘

zur Rekonstruierten g (Funktionswerte von g sind orientierte Flächeninhalte, die g‘ mit der x-Achse vom Startwert bis zur Stelle x einschließt)

bzw.

Übergang von der Ausgangsfunktion f

zur Rekonstruierten I_a (Integralfunktion)

Integralfunktion:

Zu einer Berandung f: [a, b] $\rightarrow \Re$ *gehört die Integralfunktion* I_a*, die jedem x aus [a, b] den orientierten Inhalt der Fläche zuordnet, die f mit der x-Achse zwischen a und x einschließt.*

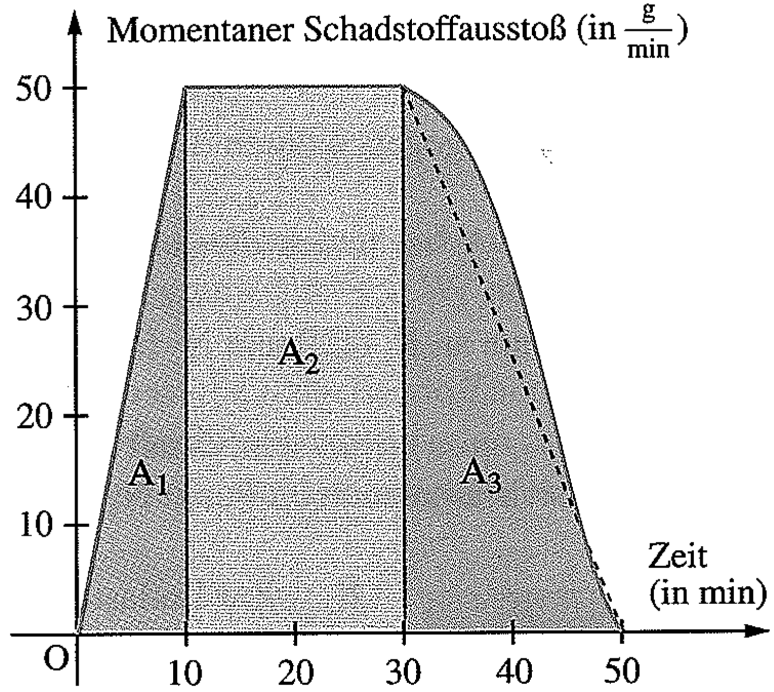
Die Funktionswerte der Integralfunktion heißen *Integrale*.

- beruht auf der Annahme, dass die Existenz und Eindeutigkeit des Inhalts der betrachteten Flächen unproblematisch und gesichert ist
- Zusammenhang $I_a' = \text{Berandung} = f$

Lehrbuchbeispiele, die zur Integralrechnung führen

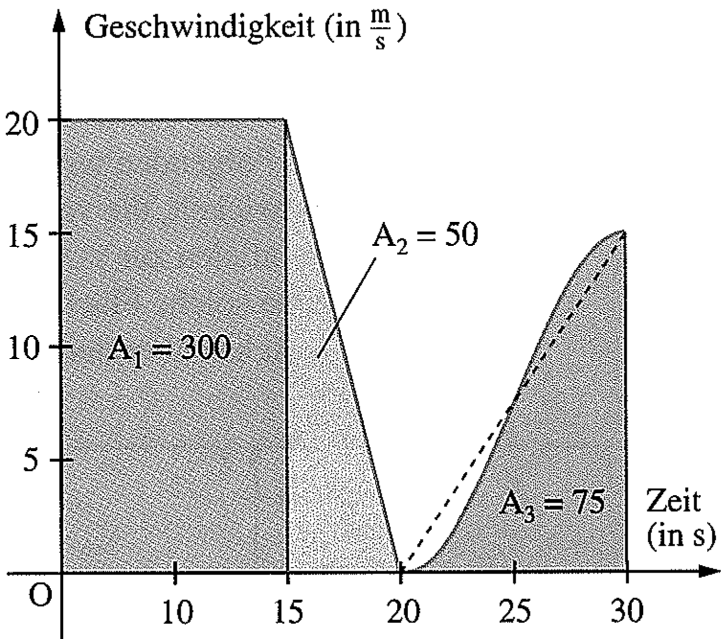
(Lambacher Schweizer, Analysis, LK Gesamtband, Klett)

1. Im Kamin eines Kraftwerkes wird ständig die in der Abluft enthaltene Menge eines Schadstoffs gemessen. Das Bild zeigt ein zugehöriges Messdiagramm. Aus einem solchen Diagramm kann man die Gesamtmenge des ausgetretenen Schadstoffs bestimmen.



Lehrbuchbeispiele, die zur Integralrechnung führen

(Lambacher Schweizer, Analysis, LK Gesamtband, Klett)



2. Geschwindigkeit und zurückgelegte Strecke

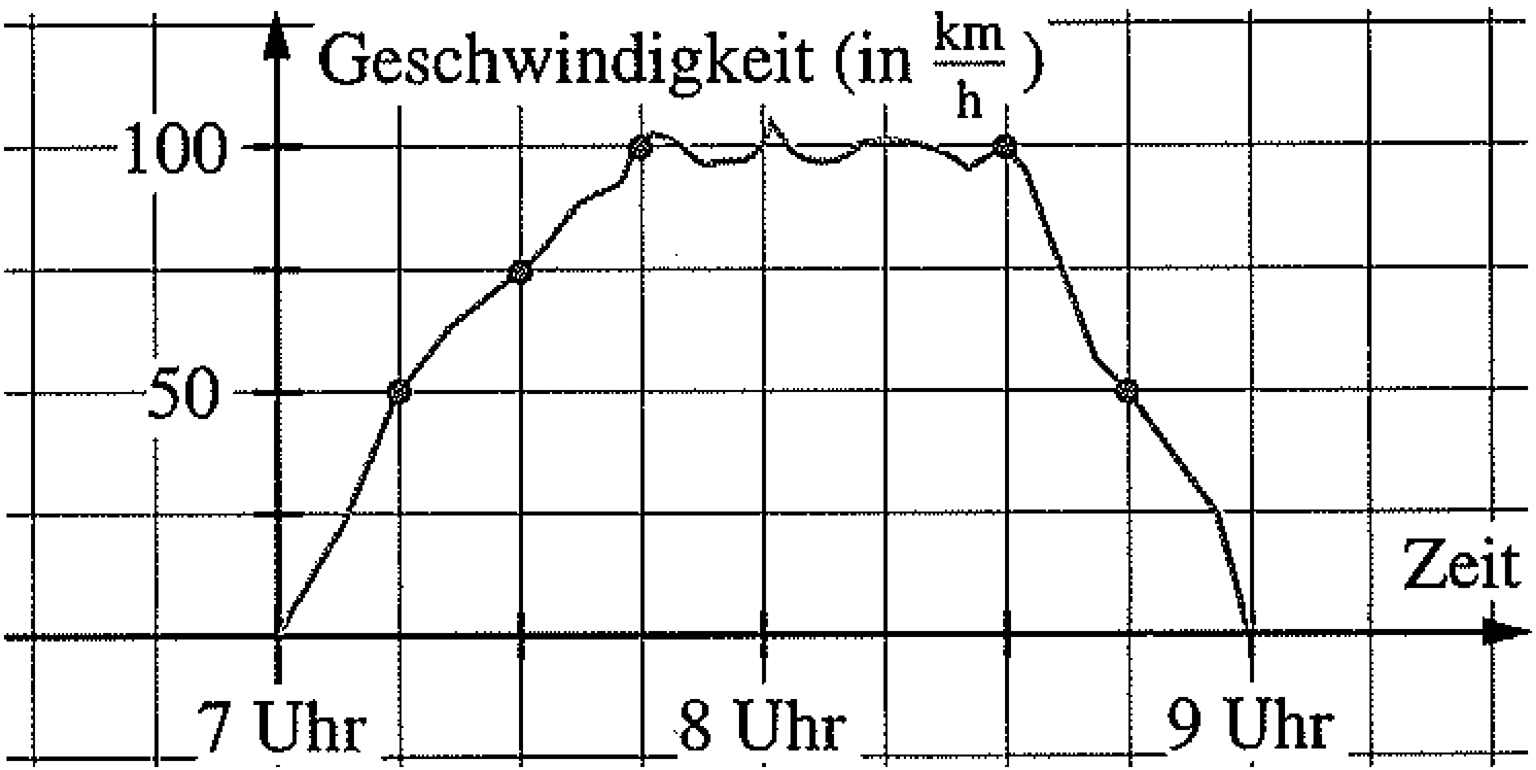
a) Berechnen Sie anhand des v-t-Diagramms die im Zeitraum von 0s bis 20s zurückgelegte Strecke s.

b) Bestimmen Sie näherungsweise die im Zeitraum von 20s bis 30 s zurückgelegte Strecke.

(Lambacher Schweizer, Analysis, LK Gesamtband, Klett)

3. Aufgabe:

Bestimmen Sie näherungsweise die von 7 Uhr bis 9 Uhr zurückgelegte Strecke.



- Lehrbuchbeispiele führen schnell auf den Zusammenhang rekonstruierte Größe und Fläche unter der Kurve, die die Änderungsrate dieser Größe beschreibt
- Graph der rekonstruierten Größe wird nicht betrachtet
- es erfolgt ein schneller Übergang zur Fragestellung: beliebige Funktion f, Fläche unter dem Graphen im Intervall [a, b] und

  die Anwendung der Methode der Zerlegung in Teilintervalle, Bestimmung von Ober- bzw. Untersummen