

# 1 Wiederholung

Dieses Skript schließt an den vorigen Vortrag *Die Fundamentalgruppe eines topologischen Raumes und ihre allgemeinen Eigenschaften* an. In diesem Abschnitt werden kurz die wichtigsten Begriffe des vergangenen Vortrags zusammengefasst.

Sei  $(X, \tau)$  ein topologischer Raum,  $x \in X$ . Dann bezeichnet

$$\Omega(x) := \{\sigma : [0, 1] \rightarrow X \mid \sigma(0) = \sigma(1) = x\}$$

die Menge aller geschlossenen Wege in  $X$  mit Startpunkt  $x$ . Auf dieser Menge führen wir nun eine Äquivalenzrelation  $\sim$  ein: Für  $\sigma, \tau \in \Omega(x)$  sei

$$\sigma \sim \tau :\Leftrightarrow \text{es existiert eine Homotopie zwischen } \sigma, \tau$$

Dann heißt der Faktorraum  $\pi_1(X, x) := \Omega(x) / \sim$  Fundamentalgruppe des topologischen Raums  $X$  mit Aufhängepunkt  $x$ .

Sei nun  $X$  wegzusammenhängend. Dann gilt:  $\pi_1(X, x) = \pi_1(X, y)$  für alle  $x, y \in X$ . Das heißt die Fundamentalgruppe von  $X$  ist unabhängig vom Aufhängepunkt. Für so einen Raum  $X$  heißt dann  $\pi_1(X) := \pi_1(X, x)$  auch einfach nur die Fundamentalgruppe von  $X$ .

Für die Fundamentalgruppen von zwei topologischen Räumen  $X$  und  $Y$  gilt dann:  $X \simeq Y \Rightarrow \pi_1(X) \simeq \pi_1(Y)$ . Das heißt: Haben  $X$  und  $Y$  nicht-isomorphe Fundamentalgruppen, so sind  $X$  und  $Y$  nicht homöomorph. Um zu überprüfen, ob zwei gegebene topologische Räume homöomorph sind, ist es also ein gutes Hilfsmittel, die Fundamentalgruppen zu bestimmen.

# 2 Überlagerungen

Im Folgenden wollen wir ein möglichst allgemeines Verfahren zur Bestimmung der Fundamentalgruppe angeben.

**Definition 1.** Sei  $(X, \tau_X)$  ein topologischer Raum. Es sei  $(E, \tau_E)$  ein zweiter topologischer Raum und  $\pi : E \rightarrow X$  eine Abbildung mit:

1.  $\pi$  ist stetig

2. Für alle  $x \in X$  existiert eine Umgebung  $U(x)$  von  $x$ , sodass  $\pi^{-1}(U(x)) = \bigcup_{i \in \Lambda} B_i$

Vereinigung von (in  $E$ ) offenen, disjunkten Mengen  $B_i \subset E$  ist, von denen jedes  $B_i$  durch  $\pi$  homöomorph auf  $U(x)$  abgebildet wird.

Dann heißt das Paar  $(E, \pi)$  eine **Überlagerung** von  $X$ . Die  $B_i$  heißen **Blätter über**  $U(x)$ .  $U(x)$  heißt **gleichmäßig überlagert**.

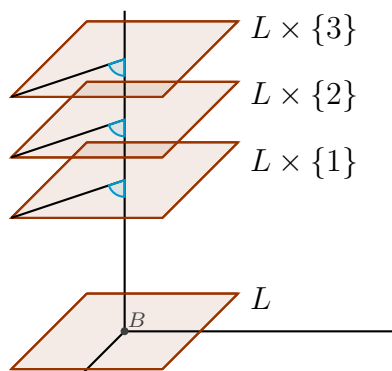
**Beispiele:**

- (A) Sei  $L := \{z \in \mathbb{R}^2 \mid |x|_\infty < 1\}$  ein offenes Quadrat im  $\mathbb{R}^2$  mit Seitenlänge 2. Sei  $\tau_L$  die Standardtopologie auf  $L$ .

Seien  $E := L \times \{1, 2, 3\}$  und

$$\begin{aligned}\pi : E &\rightarrow L \\ (x, k) &\mapsto x\end{aligned}$$

Dann ist  $(E, \pi)$  eine Überlagerung von  $L$ .



*Beweis.* Für jedes  $x \in L$  ist  $L$  eine Umgebung von  $x$ . Es ist

$$\pi^{-1}(L) = E = L \times \{1\} \cup L \times \{2\} \cup L \times \{3\}$$

Dabei sind  $L \times \{1\}$ ,  $L \times \{2\}$ ,  $L \times \{3\}$  offen in  $E$  und  $\pi$  bildet jede dieser drei Mengen homöomorph auf  $X$  ab.  $\square$

- (B) Sei  $S^1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$  die Kreislinie mit Radius 1 in der komplexen Zahlenebene.

Dann ist

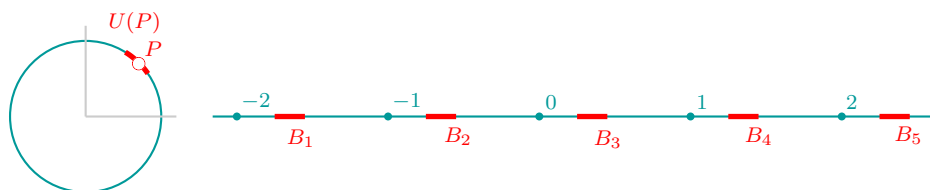
$$(\mathbb{R}, \exp)$$

mit

$$\begin{aligned}\exp : \mathbb{R} &\rightarrow S^1 \\ x &\mapsto e^{2\pi \cdot i \cdot x}\end{aligned}$$

eine Überlagerung von  $S^1$ . [Os]

*Beweis.* Sei  $P \in S^1$  beliebig. Ziel ist nun, eine Umgebung  $U(P)$  von  $P$  zu finden, sodass  $\pi^{-1}(U(P)) = B_1 \cup B_2 \cup \dots$ , sodass die  $B_k$  paarweise disjunkt sind und homöomorph auf  $U(P)$  abgebildet werden:



Fallunterscheidung:

(I) Angenommen,  $P = 1$

Betrachten nun die Umgebung  $U := \{z \in S^1 \mid \operatorname{Re}(z) > 0\}$  von  $P$ .

Dann ist  $\exp^{-1}(U) = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left(k - \frac{1}{4}, k + \frac{1}{4}\right)$  und für jedes  $k \in \mathbb{N}$  ist  $\exp|_{(k-\frac{1}{4}, k+\frac{1}{4})}$  bijektiv und stetig. Um zu zeigen, dass  $\exp$  tatsächlich ein Homöomorphismus ist, betrachten wir die Umkehrfunktion.

Sei also

$$\begin{aligned} \arg : U &\rightarrow \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \\ z &\mapsto \frac{1}{2\pi} \arcsin(\operatorname{Im}(z)/i) \end{aligned}$$

(Dabei ist  $\arcsin$  die Umkehrfunktion von  $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}$ ) Dann gilt:

$$\begin{aligned} \exp(\arg(z)) &= e^{\arcsin(\operatorname{Im}(z)/i)} \\ &= \underbrace{i \cdot \sin(\arcsin(\operatorname{Im}(z)/i))}_{=\operatorname{Im}(z)} + \cos(\arcsin(\operatorname{Im}(z)/i)) \quad (\text{Eulersche Id.}) \\ &= \operatorname{Im}(z) + \sqrt{\cos^2(\arcsin(\operatorname{Im}(z)/i))} \\ &= \operatorname{Im}(z) + \sqrt{1 - \sin^2(\arcsin(\operatorname{Im}(z)/i))} \\ &= \operatorname{Im}(z) + \operatorname{Re}(z) = z \end{aligned} \quad \text{Weil } z \in S^1$$

Folglich ist  $\arg$  die Umkehrfunktion von  $\exp|_{(k-\frac{1}{4}, k+\frac{1}{4})}$ . Wir wissen, dass  $\arg$  als Verknüpfung stetiger Funktionen wieder stetig ist. Folglich ist  $\exp|_{(k-\frac{1}{4}, k+\frac{1}{4})}$  ein Homöomorphismus für alle  $k \in \mathbb{N}$ .

(II) Angenommen,  $P \neq 1$

Betrachten die Umgebung  $U_P := \{z \in S^1 \mid \operatorname{Re}(\overline{P} \cdot z) > 0\}$  von  $P$ . Sei  $\alpha := \arg(P)$ . Sehen wieder, dass  $\exp|_{(\alpha-\frac{1}{4}, \alpha+\frac{1}{4})}$  bijektiv und stetig ist.

Betrachten dann

$$\begin{aligned} \arg_P : U_P &\rightarrow \left( \alpha - \frac{1}{4}, \alpha + \frac{1}{4} \right) \\ z &\mapsto \alpha + \arg \left( \frac{1}{P} \cdot z \right) \end{aligned}$$

Und wieder ist  $\exp(\arg_P(z)) = z$  für alle  $z \in U_P$ . Folglich ist  $\arg_P$  die Umkehrfunktion von  $\exp_{(\alpha-\frac{1}{4}, \alpha+\frac{1}{4})}$ .  $\arg_P$  ist als Verknüpfung stetiger Funktionen stetig, also ist  $\exp_{(\alpha-\frac{1}{4}, \alpha+\frac{1}{4})}$  Homöomorphismus.

Für alle  $P \in S^1$  haben wir also die gesuchte Umgebung  $U(P)$  gefunden. Folglich ist  $(\mathbb{R}, \exp)$  tatsächlich eine Überlagerung von  $S^1$ .  $\square$

(C) Wir betrachten die Sphäre  $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$  und die Äquivalenzrelation  $\sim$ , die gegenüberliegende Punkte identifiziert:

$$x \sim y \Leftrightarrow x = y \text{ oder } x = -y$$

Für jedes  $x \in S^n$  sei  $[x]$  seine Äquivalenzklasse. Sei  $\pi$  die kanonische Projektion

$$\begin{aligned} \pi : S^n &\rightarrow S^n \mid_{\sim} \\ x &\mapsto [x] \end{aligned}$$

Dann wird der reelle Projektive Raum  $\mathbb{R}P^n := S^n \mid_{\sim}$  überlagert durch  $S^n$ .

*Beweis.* Sei  $[x] = [(x_1, \dots, x_{n+1})] \in S^n$  beliebig. Dann ist eine Koordinate von  $x$  nicht 0, also  $x_k \neq 0$  für ein  $1 \leq k \leq n+1$ . Betrachten nun die Umgebung

$$U := \{[y] \in \mathbb{R}P^n \mid y_k > 0\} = \{[y] \in \mathbb{R}P^n \mid y_k \neq 0\}$$

von  $x$ . Es ist

$$\pi^{-1}(U) = \underbrace{\{y \in S^n \mid y_k > 0\}}_{=: U_1} \cup \underbrace{\{y \in S^n \mid y_k < 0\}}_{=: U_2}$$

Die beiden Mengen  $U_1$  und  $U_2$  sind dabei disjunkt. Weiter gilt:

- Für ein beliebiges  $[y] \in U$  existiert ein Repräsent  $y \in S^n$  mit  $y_k > 0$ , also auch  $y \in U_1$ . Folglich ist  $\pi|_{U_1}$  surjektiv.
- Seien  $y, z \in U_1$  mit  $\pi(y) = \pi(z)$ . Angenommen,  $y$  und  $z$  stimmen in der  $j$ -ten Koordinate nicht überein, das heißt  $y_j \neq z_j$ . Weil  $[y] = [z]$ , ist daher  $y_j = -z_j$ , also  $y = -z$ . Das ist aber ein Widerspruch dazu, dass beide in  $U_1$  lagen! Folglich stimmen  $y$  und  $z$  in allen Koordinaten überein. Also ist  $\pi|_{U_1}$  auch injektiv.

- Wir sehen ohne Beweis, dass  $\pi|_{U_1}$  offene Mengen auf offene Mengen abbildet und die Urbilder offener Mengen offen sind. Folglich sind  $\pi|_{U_1}$  und  $(\pi|_{U_1})^{-1}$  stetig.

Also ist  $\pi|_{U_1}$  ein Homöomorphismus. Analog sehen wir, dass auch  $\pi|_{U_2}$  Homöomorphismus ist. Daraus folgt, dass  $(S^n, \pi)$  eine Überlagerung von  $\mathbb{R}P^n$  ist.  $\square$

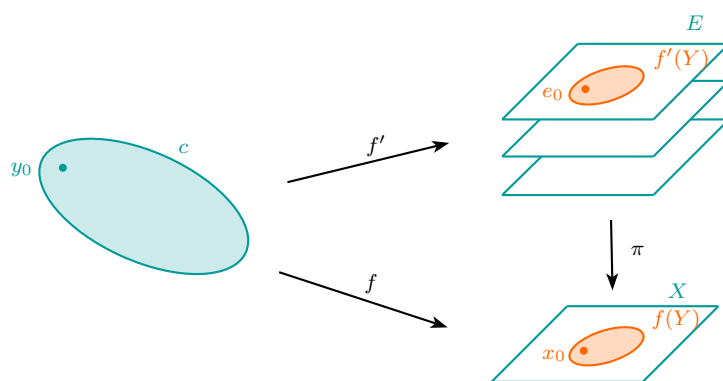
In den vorigen Vorträgen haben wir eine alternative Definition des reellen projektiven Raums kennengelernt. Dass diese zwei Definitionen tatsächlich äquivalent sind, wird hier nicht gezeigt.

Bemerkung: Definiert man auf einem topologischen Raum  $X$  eine Äquivalenzrelation  $\sim$ , so überlagert  $X$  den Raum  $X|_{\sim}$  in vielen Fällen. Dies muss allerdings nicht immer der Fall sein, siehe hierzu zum Beispiel die *Sorgenfrey-Gerade* [Ba2].

Das Ziel ist es jetzt, Wege und Homotopieklassen von Wegen nicht mehr im überlagerten Raum  $X$ , sondern im überlagernden Raum  $E$  zu untersuchen. Wir möchten nun zeigen, dass jeder Weg in  $X$  eindeutig zu einem Weg in  $E$  "hochgehoben" werden kann. Wir zeigen hier eine etwas allgemeinere Aussage nicht nur für Wege, sondern für beliebige Abbildungen aus einem zusammenhängenden Raum.

**Satz 1** (Eindeutigkeit der Hochhebung). *Sei  $X$  ein topologischer Raum und  $(E, \pi)$  eine Überlagerung von  $X$ . Sei  $f : Y \rightarrow X$  eine stetige Abbildung aus einer zusammenhängenden Menge  $Y$  in  $X$ . Seien  $x_0 \in X$ ,  $e_0 \in E$ ,  $y_0$  in  $Y$ . Sei  $f(y_0) = x_0$  und  $\pi(e_0) = x_0$ .*

*Falls nun eine stetige Abbildung  $f' : Y \rightarrow E$  existiert, sodass  $\pi \circ f' = f$  und  $f'(y_0) = e_0$ , dann ist dieses  $f'$  eindeutig bestimmt.*



*Beweis.* Angenommen, es gäbe zusätzlich zu  $f'$  noch ein  $f'' : Y \rightarrow E$  mit  $\pi \circ f'' = f$  und  $f''(y_0) = e_0$ .

Seien

$$A := \{y \in Y \mid f'(y) = f''(y)\}$$

und

$$B := \{y \in Y \mid f'(y) \neq f''(y)\}$$

Wir werden nun zeigen, dass  $B = \emptyset$ , denn dann stimmen  $f'$  und  $f''$  auf ganz  $Y$  überein. Wir zeigen dafür zunächst, dass  $A$  und  $B$  offen sind.

Sei also  $y_1 \in Y$  beliebig. Sei  $U(f(y_1))$  eine gleichmäßig überlagerte Umgebung von  $f(y_1)$ . Betrachten nun zwei möglichen Fälle:

(I) Sei  $y_1 \in A$ :

Betrachten  $\pi^{-1}(U(f(y_1)))$ . Das ist die disjunkte Vereinigung der Blätter  $S_1, \dots, S_n$ . Es sei  $S_k$  dasjenige Blatt mit  $f'(y_1) \in S_k$ . (Damit gilt dann auch  $f''(y_1) \in S_k$ )

Wegen Stetigkeit von  $f'$  und  $f''$  sind  $f'^{-1}(S_k)$  und  $f''^{-1}(S_k)$  offene Mengen in  $Y$ . Folglich ist  $\tilde{U} := f'^{-1}(S_k) \cap f''^{-1}(S_k)$  offen in  $Y$ . Außerdem ist  $y_1 \in \tilde{U}$ .

Zusätzlich ist  $\tilde{U} \subset A$ , denn angenommen, es existiert ein  $z \in \tilde{U}$  mit  $f'(z) \neq f''(z)$ . Nach Konstruktion von  $\tilde{U}$  sind  $f'(z) \in S_k, f''(z) \in S_k$ . Es ist  $\pi|_{S_k}$  bijektiv, also insbesondere injektiv. Also  $\pi(f'(z)) \neq \pi(f''(z))$ , doch nach Voraussetzung ist ja  $\pi(f'(z)) = \pi(f''(z)) = f(z)$ . Widerspruch!

Folglich ist  $A$  offen.

(II)  $y_1 \in B$ :

Sehr ähnlich sehen wir, dass auch  $B$  offen ist: Es seien  $S_1$  und  $S_2$  die Blätter mit  $f'(y_1) \in S_1$  und  $f''(y_1) \in S_2$ . Dann ist  $f'^{-1}(S_1) \cap f''^{-1}(S_2) \subset B$  eine Umgebung von  $y_1$ , also ist auch  $B$  offen.

Nach Annahme gilt  $f'(y_0) = f''(y_0)$ , also ist  $A$  nicht-leer. Es ist  $Y$  die disjunkte Vereinigung der offenen Mengen  $A$  und  $B$ . Weil  $Y$  zusammenhängend ist und  $A \neq \emptyset$ , folgt damit, dass  $B = \emptyset$ .

□

Wir haben nun noch zu zeigen, dass tatsächlich jeder Weg in  $X$  auch mindestens eine Hochhebung nach  $E$  hat. Wir zeigen zunächst einen Hilfssatz. Im Spezialfall, dass  $X$  ein metrischer Raum ist, ist der Satz ein Spezialfall des *Lemmas von Lebesgue* oder *Lemmas von der Existenz der Lebesguezahl* [En].

**Satz 2.** Sei  $(X, \tau)$  ein topologischer Raum. Sei  $\sigma : [0, 1] \rightarrow X$  ein Weg in  $X$ . Sei  $\mathfrak{U} = (U_1, U_2, \dots, U_n)$  eine endliche, offene Überdeckung von  $\sigma([0, 1])$ .

Dann existiert eine Unterteilung  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = 1$  von  $[0, 1]$ , sodass

$$\sigma([t_{i-1}, t_i]) \subset U_j$$

für ein  $1 \leq j \leq n$  für alle  $1 \leq i \leq k$ .

*Beweis.* Sei  $U_j \in \mathfrak{U}$  beliebig.  $\sigma$  ist stetig, folglich ist  $\sigma^{-1}(U_j)$  offen. Es seien  $C_1^{(j)}, \dots, C_{m(j)}^{(j)}$  die Zusammenhangskomponenten von  $\sigma^{-1}(U_j)$ . Dann ist

$$\bigcup_{j=1}^n \bigcup_{p=1}^{m(j)} C_p^{(j)} \supset [0, 1]$$

offene Überdeckung von  $[0, 1]$ . Sei  $C_1 \cup \dots \cup C_m$  eine endliche Teilüberdeckung davon, die  $C_i$  sind also beschränkte, offene Intervalle.

Betrachten nun zwei Intervalle  $C_i$  und  $C_j$ , deren Schnitt nicht leer ist. Für alle  $1 \leq i, j \leq m$  sei  $t_{i,j} \in C_i \cap C_j$  beliebig. Es sei  $T := \{t_{i,j} \mid 1 \leq i, j \leq m\}$ . Dann ist  $T$  gerade die gesuchte Zerlegung.

Seien nämlich  $t_1, \dots, t_l$  die Elemente aus  $T$  der Größe nach sortiert. Dann ist für alle  $i$  mit  $1 \leq i \leq l$  gerade  $[t_{i-1}, t_i] \subset C_q$  für ein  $1 \leq q \leq m$  und damit  $\sigma([t_{i-1}, t_i]) \subset \sigma(C_q) \subset U_j$  für ein  $1 \leq j \leq n$ .  $\square$

**Satz 3** (Hochhebung eines Weges). Sei  $X$  ein topologischer Raum,  $(E, \pi)$  eine Überlagerung von  $X$  mit  $\pi(e_0) = x_0$  für ein  $x_0 \in X$ ,  $e_0 \in E$ . Es sei weiter

$$\sigma : [0, 1] \rightarrow X$$

ein Weg in  $X$  mit  $\sigma(0) = x_0$ .

Dann existiert ein Weg  $\sigma'_{e_0} : [0, 1] \rightarrow E$  mit  $\sigma'_{e_0}(0) = e_0$  und  $\pi \circ \sigma'_{e_0} = \sigma$ .

*Beweis.* Führen eine Fallunterscheidung durch:

(I) Ganz  $X$  ist gleichmäßig überlagert:

Es sei  $S_k$  dasjenige Blatt mit  $e_0 \in S_k$ . Dann ist  $\pi|_{S_k}$  bijektiv. Es sei

$$\psi := (\pi|_{S_k})^{-1}$$

Dann erfüllt  $\sigma'_{e_0} := \psi \circ \sigma$  gerade die Bedingungen des Satzes.

(II) Nicht ganz  $X$  ist gleichmäßig überlagert:

Für jedes  $z \in [0, 1]$  existiert eine gleichmäßig überlagerte Umgebung  $U(\sigma(z))$ . Es ist  $\bigcup_{t \in [0,1]} U(\sigma(z))$  offene Überdeckung von  $\sigma([0, 1])$ . Wegen Kompaktheit von  $[0, 1]$  existiert davon eine endliche Teilüberdeckung  $U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n$ .

Nach Lemma 1 existiert eine Unterteilung

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = 1$$

des Intervalls  $[0, 1]$ , sodass  $\sigma([t_i, t_{i+1}]) \subset U(\sigma(t_i))$ , wobei  $U(\sigma(t_i))$  eine gleichmäßig überlagerte Umgebung von  $\sigma(t_i)$  ist.

Es folgt ein Induktionsargument:

IA: Nach Fall (I) existiert für den Weg  $\sigma|_{[0, t_1]}$  ein  $\sigma_1 : [0, t_1] \rightarrow E$  mit  $\sigma_1(0) = e_0$  und mit  $\pi \circ \sigma_1 = \sigma|_{[0, t_1]}$ .

IV: Es existiert ein  $\sigma_i : [0, t_i] \rightarrow E$  mit  $\sigma_i(0) = e_0$  und mit  $\pi \circ \sigma_i = \sigma|_{[0, t_i]}$ .

IB: Es existiert ein  $\sigma_{i+1} : [0, t_{i+1}] \rightarrow E$  mit  $\sigma_{i+1}(0) = e_0$  und mit  $\pi \circ \sigma_{i+1} = \sigma|_{[0, t_{i+1}]}$ .

Bew: Betrachten  $\sigma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ . Wir wissen nach Fall (I):

Es ist  $\pi(\sigma_i(t_i)) = \sigma|_{[t_i, t_{i+1}]}(t_i)$ . Außerdem ist ganz  $[t_i, t_{i+1}]$  gleichmäßig überlagert.

Das sind genau die Voraussetzungen aus Fall (I). Folglich existiert ein  $\tau : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow E$ , sodass  $\tau(t_i) = \sigma_i(t_i)$  und mit  $\pi \circ \tau = \sigma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ .

Wir definieren nun  $\sigma_{i+1}$ , als die Verbindung der beiden Teilwege  $\sigma_i(t)$  und  $\tau$ :

$$\sigma_{i+1} : [0, t_{i+1}] \rightarrow E$$

$$t \mapsto \begin{cases} \sigma_i(t), & \text{wenn } t \leq t_i \\ \tau(t), & \text{wenn } t \geq t_i \end{cases}$$

Das bedeutet: Es existiert ein  $\sigma_n : [0, 1] \rightarrow E$  mit  $\sigma_n(0) = e_0$  und  $\pi \circ \sigma_n = \sigma$ . Dieser Weg  $\sigma_n$  ist gerade der gesuchte Weg  $\sigma'_{e_0}$ .

□

Möchten wir nun also die Fundamentalgruppe eines topologischen Raumes  $X$  bestimmen, so müssen wir nicht die Homotopieklassen in  $X$  zählen, sondern es genügt, die Homotopieklassen im überlagernden Raum  $E$  zu zählen. Dabei muss natürlich noch geklärt werden, wie dieses Zählen genau abläuft.

**Definition 2.** *Es sei  $(X, \tau)$  ein topologischer Raum und  $(E, \pi)$  eine Überlagerung. Eine Abbildung  $\phi : E \rightarrow E$  mit*



1.  $\phi$  ist ein Homöomorphismus,
2.  $\pi \circ \phi = \pi$

heißt **Überlagerungstransformation** von  $E$ .

### Beispiel:

Betrachten Beispiel (B):  $\exp : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ . Hier ist

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x + k \end{aligned}$$

für alle  $k \in \mathbb{Z}$  eine Überlagerungstransformation von  $\mathbb{R}$ . Denn:

$$\begin{aligned} (\exp \circ \phi)(x) &= \exp(x + k) \\ &= e^{2\pi i \cdot (x+k)} \\ &= e^{2\pi i \cdot x} \cdot \underbrace{e^{2\pi i \cdot k}}_{=1} \\ &= e^{2\pi i \cdot x} \\ &= \exp(x) \end{aligned}$$

Wir werden später noch zeigen, dass es für diesen Fall keine weiteren Überlagerungstransformationen gibt.

Wir stellen zunächst fest, dass die Menge der Überlagerungstransformationen eine Gruppenstruktur hat. Diese Aussage wird hier nicht bewiesen. Der Beweis ist jedoch nicht weiter schwer und kann zum Beispiel im sehr empfehlenswerten Buch [GH] nachgelesen werden.

**Satz 4.** *Es sei  $(X, \tau)$  ein topologischer Raum und  $(E, \pi)$  eine Überlagerung. Dann ist die Menge  $G$  aller Überlagerungstransformationen zusammen mit der Verknüpfung von Abbildungen eine Gruppe.*

Dieses Ergebnis lässt uns vermuten, dass es einen Zusammenhang zwischen der Gruppe der Überlagerungstransformationen und der Fundamentalgruppe des überlagerten Raums gibt. Dieser Zusammenhang wird im nächsten Satz erklärt:

**Satz 5.** *Es sei  $(X, \tau)$  ein topologischer Raum und  $(E, \pi)$  eine Überlagerung von  $X$  mit  $\pi(e_0) = x_0$  für ein  $x_0 \in X$ ,  $e_0 \in E$ . Es sei  $G$  die Gruppe der Überlagerungstransformationen von  $E$ .*

*Falls  $E$  wegzusammenhängend ist und triviale Fundamentalgruppe hat, dann ist  $G$  isomorph zu  $\pi_1(X, x_0)$ .*

*Beweis.* Wir werden einen Isomorphismus angeben.

1. Konstruieren uns dazu zuerst eine Abbildung  $\chi : G \rightarrow \pi_1(X, x_0)$ .

Betrachten dazu eine Überlagerungstransformation  $\phi \in G$ . Wir wissen:  $E$  hat triviale Fundamentalgruppe, das heißt, alle Wege von  $e_0$  nach  $\phi(e_0)$  sind homotop. Es sei also  $\sigma'_\phi$  ein solcher Weg von  $e_0$  nach  $\phi(e_0)$ .

Es sei  $\sigma_\phi := \pi \circ \sigma'_\phi$ . Wir definieren nun eine Abbildung

$$\chi : G \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

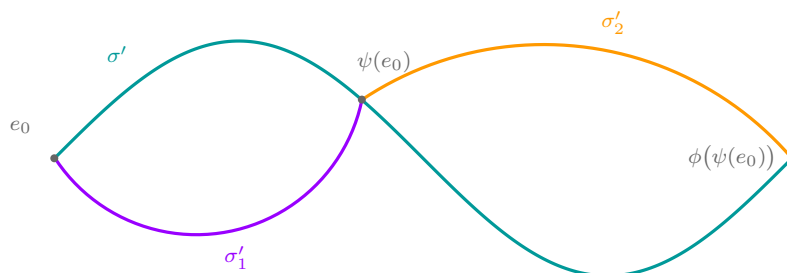
durch  $\chi(\phi) = [\sigma_\phi]$ .

2.  $\chi$  ist ein Homomorphismus.

Seien  $\phi, \psi \in G$  beliebig. Seien

$$\sigma', \sigma'_1, \sigma'_2 : [0, 1] \rightarrow E$$

mit  $\sigma'(0) = e_0$ ,  $\sigma'(1) = \phi(\psi(e_0))$  und mit  $\sigma'_1(0) = e_0$ ,  $\sigma'_1(1) = \psi(e_0)$  und mit  $\sigma'_2(0) = \psi(e_0)$ ,  $\sigma'_2(1) = \phi(\psi(e_0))$ .



Dann ist

$$\begin{aligned} \chi(\phi \circ \psi) &= [\pi \circ \sigma'] \\ &= [\pi \circ (\sigma'_2 * \sigma'_1)] \\ &= [(\pi \circ \sigma'_2) * (\pi \circ \sigma'_1)] \\ &= [(\pi \circ \sigma'_2)] \cdot [(\pi \circ \sigma'_1)] \\ &= \chi(\phi) \cdot \chi(\psi) \end{aligned}$$

3.  $\chi$  ist injektiv.

Seien  $\phi, \psi \in G$  mit  $\chi(\phi) = \chi(\psi)$ . Dann sind sowohl  $\phi$  als auch  $\psi$  eine Hochhebung von  $\pi$ , diese Hochhebung ist nach Satz 1 eindeutig, das heißt  $\psi = \phi$ .

4.  $\chi$  ist surjektiv.

Sei  $[\sigma] \in \pi_1(X, x_0)$  beliebig. Wie vorher auch sei  $\sigma' : [0, 1] \rightarrow E$  die Hochhebung von  $\sigma$  mit  $\sigma'(0) = e_0$ . Wir suchen nun ein  $\phi \in G$  mit  $\chi(\phi) = [\sigma]$ .

- **Konstruktion von  $\phi$ :** Sei  $e \in E$  beliebig. Es sei  $\tau'_e : [0, 1] \rightarrow E$  ein Weg in  $E$  von  $e_0$  nach  $e$ , weil  $E$  wegzusammenhängend ist, existiert so ein Weg. Also  $\tau'_e(0) = e_0, \tau'_e(1) = e$ .

Es sei  $\tau_e$  der zugehörige Weg in  $X$ , also  $\tau_e = \pi \circ \tau'_e$ . Für den existiert eine Hochhebung  $\hat{\tau}'_e : [0, 1] \rightarrow E$  mit  $\hat{\tau}'_e(0) = \sigma'(1)$  und  $\tau_e = \pi \circ \hat{\tau}'_e$ .

Weiter sei  $\mu'_e$  die Aneinanderhängung der beiden Wege  $\hat{\tau}'_e$  und  $\sigma'$ :

$$\mu'_e : [0, 1] \rightarrow E$$

$$t \mapsto \begin{cases} \sigma'(2t), & \text{wenn } t \leq \frac{1}{2} \\ \hat{\tau}'_e(2t), & \text{wenn } t \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Sei dann

$$\begin{aligned} \phi : E &\rightarrow E \\ \phi(e) &= \mu'_e(1) \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \pi(\phi(e)) &= \pi(\mu'_e(1)) \\ &= \pi(\hat{\tau}'_e(1)) \\ &= \tau_e(1) \\ &= \pi(\tau'_e(1)) \\ &= \pi(e) \end{aligned}$$

Also ist  $\pi \circ \phi = \pi$ . Es bleibt noch zu zeigen, dass  $\phi$  auch wirklich ein Homöomorphismus ist.

- **Injektivität und Surjektivität von  $\phi$**  folgen aus der Konstruktion und werden hier nicht gezeigt.
- **Stetigkeit von  $\phi$ :**

Zeigen dafür, dass die Urbilder offener Mengen unter  $\phi$  wieder offen sind. Sei also  $V \subset E$  eine offene Menge. Und sei  $e \in \phi^{-1}(V)$  beliebig und sei  $x := \pi(e)$ . Sei nun  $U \subset X$  eine gleichmäßig überlagerte Umgebung von  $x$ .

Betrachten nun  $\pi^{-1}(U)$ . Es sei  $S_1, S_2 \subset E$  diejenigen Blätter über  $U$ , die  $e$  beziehungsweise  $\phi(e)$  enthalten. Sei nun  $\hat{V} := V \cap \pi^{-1}(U)$  und  $\hat{U} := \pi(\hat{V})$ .

Dann ist  $\pi^{-1}(\hat{U}) \cap S_2$  offen, weil  $\pi$  stetig ist. Außerdem ist  $\pi^{-1}(\hat{U}) \cap S_2 \subset \phi^{-1}(V)$ .

Denn angenommen, es existiert ein  $z \in \pi^{-1}(\hat{U}) \cap S_2 \setminus \phi^{-1}(V)$ .

$$\begin{aligned} z &\notin \phi^{-1}(V) \\ \Rightarrow \phi(z) &\notin V && \text{Wegen Bijektivität von } \phi \\ \Rightarrow \phi(z) &\notin \hat{V} \\ \Rightarrow \pi(\phi(z)) &\notin \hat{U} && \text{Weil } \pi|_{S_1} \text{ injektiv ist} \end{aligned}$$

Doch das ist ein Widerspruch! Folglich gilt tatsächlich  $\pi^{-1}(\hat{U}) \cap S_2 \subset \phi^{-1}(V)$  und damit ist gezeigt, dass  $\phi^{-1}(V)$  offen ist. Also ist  $\phi$  stetig.

• **Stetigkeit von  $\phi^{-1}$ :**

Analog zum vorigen Schritt kann man zeigen, dass auch die Bilder von offenen Mengen unter  $\phi$  wieder offene Mengen sind. Auch  $\phi^{-1}$  ist stetig.

Also ist  $\phi$  ein Homöomorphismus und damit auch eine Überlagerungstransformation. Folglich ist  $\chi$  surjektiv.

Also ist  $\chi$  ein Isomorphismus und damit  $G$  isomorph zu  $\pi_1(X, x_0)$ . □

Das ist das zentrale Ergebnis des Vortrags. Damit können wir nun endlich Fundamentalgruppen bestimmen.

**Beispiele:**

(B) Behauptung: Die Fundamentalgruppe der Kreislinie ist  $\pi_1(S^1, 1) \simeq \mathbb{Z}$ .

*Beweis.* Wie besprochen, ist  $(\mathbb{R}, \exp)$  eine Überlagerung von  $S^1$ . Dabei ist  $\mathbb{R}$  wegzusammenhängend und hat triviale Fundamentalgruppe. Die Voraussetzungen des Satzes 5 sind also gegeben.

Bleibt also, die Menge  $G$  der Überlagerungstransformationen zu bestimmen. Behauptung:  $G = \{\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \phi : x \mapsto x + k, k \in \mathbb{Z}\}$ .

- “ $\supset$ ” Gilt nach dem letzten Beispiel.
- “ $\subset$ ” Sei  $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Überlagerungstransformation. Zeigen, dass dann  $\phi$  von der Form  $\phi : x \mapsto x + k$  für ein  $k \in \mathbb{Z}$  ist.

Nach Voraussetzung ist  $\exp(x) = \exp(\phi(x))$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

$\implies \phi(x) = x + k(x)$  für ein von  $x$  abhängiges  $k(x) \in \mathbb{Z}$ .

Nun ist  $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$  stetig,  $\mathbb{R}$  zusammenhängend und folglich auch  $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{Z}$  zusammenhängend. Allerdings sind die einzigen zusammenhängenden, nicht-leeren Teilmengen von  $\mathbb{Z}$  einelementig. Folglich ist auch  $f(\mathbb{R}) = \{k\}$  einelementig.

Also ist  $\phi(x) = x + k$ .

□

- (C) Behauptung: Für  $n \geq 2$  ist die Fundamentalgruppe des reell-projektiven Raums  $\pi_1(\mathbb{R}P^n, [1]) \simeq Z_2$ , wobei  $Z_2$  die Gruppe bezeichnet, die genau zwei Elemente enthält.

*Beweis.*  $(S^n, \pi)$  ist eine Überlagerung von  $\mathbb{R}P^n$ . Zeigen zunächst, dass  $S^n$  wegzusammenhängend ist und für  $n \geq 2$  triviale Fundamentalgruppe hat.

- Sei  $n \geq 1$  und  $x, y \in S^n$  beliebig. Aus der Linearen Algebra ist bekannt, dass zwei Rotationsmatrizen  $A_x$  und  $A_y \in SO(n)$  existieren mit

$$A_y \cdot y = A_x \cdot x = (1, \underbrace{0, \dots, 0}_{(n-1)\text{-mal}})$$

Das heißt, es existieren Rotationsmatrizen, die  $x$  beziehungsweise  $y$  in den Nordpol überführen. Wegen der Gruppeneigenschaften von  $SO(n)$  ist auch  $A := A_y^{-1} \cdot A_x \in SO(n)$  und diese Matrix überführt  $x$  in  $y$ . Weiter haben  $E_n$  und  $A$  wie alle Matrizen in  $SO(n)$  dieselbe Orientierung. Folglich existiert eine stetige Abbildung

$$\begin{aligned} \tau : [0, 1] &\rightarrow SO(n) \\ t &\mapsto A_t \end{aligned}$$

mit  $A_0 = E_n$  und  $A_1 = A$  [Fi]. Betrachten nun die Abbildung

$$\begin{aligned} \sigma : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ t &\mapsto A_t \cdot x \end{aligned}$$

Zunächst stellen wir fest, dass alle  $A_t$  orthogonale Matrizen sind, also  $\sigma(t) \in S^n$  für alle  $t \in [0, 1]$ . Folglich ist  $\sigma$  ein Weg in  $S^n$ .

Außerdem ist  $\sigma(0) = x$ ,  $\sigma(1) = y$ . Also ist  $S^n$  bogenzusammenhängend, also auch insbesondere zusammenhängend.

- Sei nun  $n \geq 2$ . Sei  $x_N := (0, \dots, 0, 1)$ . Sei  $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_{n+1})$  ein beliebiger Weg in  $S^n$  mit  $\sigma(0) = \sigma(1) = x_N$ . Dann ist nach Definition von  $S^n$

$$\sigma_1^2(t) + \dots + \sigma_{n+1}^2(t) = 1 \tag{1}$$

für alle  $t \in [0, 1]$ .

Sei nun

$$H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow S^n$$

$$(k, t) \mapsto \left( k \cdot \sigma_1(t), \dots, k \cdot \sigma_n(t), \sqrt{1 - k^2 \cdot \sigma_1^2(t) - \dots - k^2 \cdot \sigma_n^2(t)} \right)$$

Dann ist  $H(\cdot, 1) = \sigma$  und weiter  $H(\cdot, 0) = x_N$ , außerdem ist  $H$  als Verknüpfung stetiger Abbildungen stetig. Folglich ist jeder geschlossene Weg mit Startpunkt  $x_N$  homotop zum trivialen Weg. Damit ist  $\pi_1(S^n, x_N)$  trivial (enthält nur ein Element). Weil  $S^n$  zusammenhängend ist, ist also  $\pi_1(S^n)$  trivial.

- Die einzigen Überlagerungstransformationen sind:  $id : S^n \rightarrow S^n$  und

$$inv : S^n \rightarrow S^n$$

$$x \mapsto -x$$

Wir sehen ohne Beweis, dass beides Überlagerungstransformationen sind.

Es kann keine weiteren Überlagerungstransformationen geben. Angenommen, es gäbe noch eine Überlagerungstransformation  $\phi : S^n \rightarrow S^n$ .

Angenommen, es existiert ein  $x \in S^n$  mit  $\phi(x) \neq x$  und  $\phi(x) \neq -x$ . Es ist  $[x] = \{x, -x\}$ , also ist  $\phi(x) \notin [x]$ . Dann wäre  $\pi(x) \neq \pi(\phi(x))$ , folglich wäre  $\phi$  keine Überlagerungstransformation. Deshalb muss für alle  $x \in S^n$  entweder  $\phi(x) = x$  oder  $\phi(x) = -x$  sein.

Betrachten  $h(x) := \|x - \phi(x)\|$ .  $h$  ist als Verknüpfung stetiger Funktionen stetig. Nach Annahme existieren  $x_1 \in S^n$ ,  $x_2 \in S^n$  mit  $\phi(x_1) = id(x_1) = x_1$  und  $\phi(x_2) = inv(x_2) = -x_2$ . Also  $h(x_1) = 0$ ,  $h(x_2) = 2$ . Nach dem Zwischenwertsatz existiert daher ein  $x_3 \in S^n$  mit  $h(x_3) = 1$ . Also  $\phi(x_3) \neq x_3$  und  $\phi(x_3) \neq -x_3$ . Das ist aber ein Widerspruch zur obigen Aussage! Folglich kann es keine weitere Überlagerungstransformation  $\phi$  geben.

Also ist  $G \simeq Z_2 \simeq \pi_1(\mathbb{R}P^n, [1])$  nach Satz 5. □

### 3 Der Abbildungsgrad

Betrachten im Folgenden stetige Abbildungen  $f : S^1 \rightarrow S^1$ . Das ist eine besondere Schreibweise für einen Weg  $\sigma : [0, 1] \rightarrow S^1$  mit  $\sigma(0) = \sigma(1)$ , also für einen geschlossenen Weg in  $S^1$ .

**Satz 6.** Sei  $f : S^1 \rightarrow S^1$  eine stetige Abbildung. Dann existiert eine stetige Abbildung  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$\exp(F(t)) = f(\exp(t))$$

für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Diese Abbildung  $F$  ist bis auf eine additive ganzzahlige Konstante eindeutig bestimmt.

*Beweis.* Wir betrachten  $g : [0, 1] \rightarrow S^1$  definiert durch  $g := f \circ \exp$ . Es ist dann  $g(0) = f(\exp(0)) = f(\exp(1)) = g(1)$ . Also ist  $g$  ein geschlossener Weg in  $S^1$ .

Betrachten das Urbild des Startpunktes von  $g$ , also  $\exp^{-1}(g(0))$ . Es sei  $e_0$  dasjenige Element aus  $\exp^{-1}(g(0))$  mit  $0 \leq e_0 < 1$ .

Dann existiert eine eindeutige Hochhebung  $g' : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  von  $g$  mit:

$$\exp \circ g' = g \tag{2}$$

und mit

$$g'(0) = e_0$$

Es sei nun  $F$  die Fortführung von  $g'$  auf ganz  $\mathbb{R}$ , d.h.:

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto g'(x - [x]) + m \end{aligned}$$

mit  $m \in \mathbb{Z}$  beliebig. Dann ist  $F$  stetig, denn  $F|_{[k, k+1]}$  ist stetig für alle  $k \in \mathbb{Z}$ . Zusätzlich gilt für  $F$ :

$$\begin{aligned} &(\exp \circ F)(t) \\ &= \exp(F(t)) \\ &= \exp(g'(t - [t]) + m) \\ &= \exp(g'(t - [t])) \\ &= g(t - [t]) && \text{nach (2)} \\ &= f(\exp(t - [t])) \\ &= (f \circ \exp)(t) \end{aligned}$$

Wie in Beispiel (C) kann man noch zeigen, dass  $F$  bis auf verschiedene Werte von  $m$  eindeutig ist. □

**Definition 3.** Sei  $f : S^1 \rightarrow S^1$  stetig und  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ebenfalls stetig mit  $\exp(F(t)) = f(\exp(t))$ . Die Zahl

$$\text{grad}(f) := F(1) - F(0)$$

heißt der **Abbildungsgrad** von  $f$ .

Diese Zahl  $\text{grad}(f)$  beschreibt gerade, wie oft sich das Bild von  $f$  um  $S^1$  windet.

Es gibt mehrere Abbildungen  $F$ , die  $\exp(F(t)) = f(\exp(t))$  erfüllen. Nach Satz 6 unterscheiden sich diese um eine ganzzahlige Konstante. Daher ist  $\text{grad}(f) := F(1) - F(0)$  unabhängig von der Wahl von  $F$ .

**Satz 7.** Seien  $f, g : S^1 \rightarrow S^1$  stetige Abbildungen.

Seien  $F, G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  durch  $\exp(F(t)) = f(\exp(t))$  beziehungsweise durch  $\exp(G(t)) = g(\exp(t))$  gegeben.

Dann gilt:

1.  $\text{grad}(f) = F(1) - F(0) = F(t_0 + 1) - F(t_0)$  für alle  $t_0 \in \mathbb{R}$
2.  $F(t_0 + k) - F(t_0) = k \cdot \text{grad}(f)$  für alle  $k \in \mathbb{Z}$
3.  $\text{grad}(f) \in \mathbb{Z}$
4.  $\text{grad}(f \cdot g) = \text{grad}(f) + \text{grad}(g)$
5.  $\text{grad}(f \circ g) = \text{grad}(f) \cdot \text{grad}(g)$
6.  $\text{grad}(\frac{1}{f}) = -\text{grad}(f)$
7. Falls  $\text{grad}(f) \neq 0$ , so ist  $f$  surjektiv.

*Beweis.* Die Eigenschaften sind nicht sehr schwer zu beweisen. Wir beweisen hier die Eigenschaften 1, 4 und 5.

1. Betrachte

$$\begin{aligned} \Psi : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto F(t+1) - F(t) \end{aligned}$$

Dann ist:

$$\begin{aligned} &\exp(\Psi(t)) \\ &= \frac{\exp(F(t+1))}{\exp(F(t))} \\ &= \frac{f(\exp(t+1))}{f(\exp(t))} \\ &= \frac{f(\exp(t))}{f(\exp(t))} = 1 \end{aligned}$$

Die Abbildung  $\Psi$  ist als Verknüpfung stetiger Abbildungen stetig. Folglich ist  $\Psi$  konstant. Also ist

$$F(1) - F(0) = F(t_0 + 1) - F(t_0)$$



4. Es ist

$$\begin{aligned} & \exp(F(t) + G(t)) \\ &= \exp(F(t)) \cdot \exp(G(t)) \\ &= f(\exp(t)) \cdot g(\exp(t)) \\ &= (f \cdot g)(\exp(t)) \end{aligned}$$

Also

$$\text{grad}(f \cdot g) = (F(1) + G(1)) - (F(0) + G(0)) = \text{grad}(f) + \text{grad}(g)$$

5.

$$\begin{aligned} & \text{grad}(f \circ g) \\ &= F(G(1)) - F(G(0)) \\ &= F(\text{grad}(g) + G(0)) - F(G(0)) && \text{weil } \text{grad}(g) = G(1) - G(0) \\ &= \text{grad}(g) \cdot \text{grad}(f) && \text{nach 2.} \end{aligned}$$

□

Mit diesen Ergebnissen kann man nun einige interessante Aussagen mit wenigen Voraussetzungen beweisen. Einen Beweis zum *Fundamentalsatz der Algebra* findet man in [La]. Eine weitere Anwendung ist der Beweis zum *Satz von Borsuk-Ulam* und damit auch zum *Satz vom Schinkenbrot*, diese findet man zum Beispiel in [Os].

Diese Sätze werden hier nicht behandelt, im nächsten Vortrag werden wir aber zumindest unser Wissen über den Abbildungsgrad verwenden, um den *Igelsatz* zu beweisen.

## Literatur

[GH] Marvin J. Greenberg, John R. Harper: *Algebraic Topology – A First Course*  
Das Buch ist super!

[Ba] <http://www.mathematik.hu-berlin.de/~baum/Skript/Analysis-BA-WS11-Summe.pdf>  
Kapitel 4.6.1

[Ba2] <http://www.mathematik.hu-berlin.de/~baum/UA-AnaI-WS11-Z2.pdf>  
Aufgabe 7

[Os] Erich Ossa: *Topologie*, Kap. 1.5

- [En] <http://www.mathi.uni-heidelberg.de/~end/EinfTop/Top/MetrRaum.pdf>  
Prof. Dr. Werner End: *Einführung in metrische Räume*, Kap. 2.3
- [Fi] Gerd Fischer: *Lineare Algebra*, Kap 3.4.4
- [La] [http://www.math.uni-sb.de/ag/schreyer/LEHRE/10\\_AlgTop/10\\_AlgTop.pdf](http://www.math.uni-sb.de/ag/schreyer/LEHRE/10_AlgTop/10_AlgTop.pdf)  
Oliver Labs, Frank-Olaf Schreyer: *Algebraische Topologie – Eine kurze Einführung*.