



UNIVERSITÄT
DUISBURG
ESSEN

Open-Minded

Mathematik und ihre Didaktik – Zweckbündnis oder innere Verbundenheit?

Kolloquium anlässlich des 60. Geburtstages von Prof. Dr. Jürg Kramer

Lisa Hefendehl-Hebeker ■ Berlin, 10. Juni 2016

Mathematik: μαθήμα – das, was gelernt werden kann

Das zugrunde liegende spezielle Verständnis von Lernen wird nachvollziehbar am Beispiel des Menon-Dialogs:

- „Der geometrische Laie lernt im Fortgang seiner Problemlösungsversuche, dass er das schließlich zur Lösung führende Wissen Schritt für Schritt selbst erzeugt. Es wird ihm weder als bereits gewonnenes Wissen vorgehalten, noch vermag er es anhand von in den Sand gezeichneten Figuren einfach wahrzunehmen.“ (Mittelstraß 2014, S. 79)
- Darin zeigen sich drei wichtige systematische Gesichtspunkte:
 - *Autonomieunterstellung*: Wissensbildung als Leistung des Menschen (hier im Rahmen der exemplarischen Explikation einer Lehr-Lernsituation),
 - Theoretisches Wissen hat einen *konstruktiven Charakter*,
 - Die Entstehungssituation ist eine *dialektische*: Wissen entsteht durch „Auseinanderlegen“ in der dialogischen Praxis.

Die Aufgabe:

- Pädagogisch und zugleich erkenntnistheoretisch.
- Was ist in der Lage den Anfang der Vernunft zu bewirken und den Aufstieg zum Wissen einzuleiten?

Antwort:

- Die ‚größten Mathemata‘, d. h. die exakten Wissenschaften Arithmetik, Geometrie, Astronomie und (rationale) Harmonielehre, die später das Quadrivium bilden.
- ‚Exakt‘ bedeutet schon hier: sich mathematischer Mittel bedienend und mit mathematischen Mitteln darstellbar (Begriffliche Klärung, Einfordern von Gründen).

Propädeutische Rolle der Mathemata:

- Anfang einer dialektischen Ausbildung mit dem Ziel des philosophischen Dialogs.
- Der philosophische Dialog ist für Plato eine *intellektuelle Orientierung und Lebensform*:
 - argumentatives Handeln unter einer Vernunftperspektive,
 - das sich nicht vollständig in Lehrbuchwissen transformieren lässt.

Mathematik hat eine didaktische Funktion per se.

Zunächst unter Sonderbedingungen einer Ursprungssituation:

- Bildung als Privileg einer kleinen Elite;
- Mathematik selbst noch in einem ursprünglichen Stadium:
 - Mathematische Gegenstände und Relationen werden anhand von sinnlich wahrnehmbaren Gegebenheiten konstruiert.

Systematische Grundtatsachen von anhaltender Aktualität:

- Mathematisches Verstehen als autonome Leistung,
- Konstruktiver Charakter,
- Entstehung in der dialogischen Praxis.

Humboldt'sche Reform 1810:

- Systematische Reform des gesamten Erziehungssystems von den Primarschulen bis zur höheren Bildung; Wechsel der Mathematik von einem marginalen Unterrichtsfach zum Hauptfach.
- Verständnis der kognitiven Entwicklung als organische Einheit mit drei Schlüsselkomponenten: klassische Sprachen, Geschichte und Geographie, Mathematik und Naturwissenschaften.
- Zweifaches Ziel der gymnasialen Bildung: Studierfähigkeit und Berufsvorbereitung für den bürgerlichen Mittelstand
- Professionelle Lehrerausbildung an den Universitäten, Gründung der Berliner Universität:
 - Reformierte Philosophische Fakultäten mit der Aufgabe einer wissenschaftlichen Ausbildung von Gymnasiallehrern,
 - Staatsexamen als Qualifikation für eine neue Profession.
- Schubring (2012) sieht einen direkten Zusammenhang zwischen der starken industriellen Entwicklung Preußens in der 2. Hälfte des 19. Jahrhunderts und dieser vorausgegangenen Bildungsreform.

Weiterentwicklungen im Rahmen des industriellen Aufschwungs:

- *Ausdifferenzierung des Bildungssystems* in konkurrierende Institutionen:
 - Drei Typen von Sekundarschulen: Humanistisches Gymnasium, Realgymnasium, Oberrealschule.
 - Zwei Typen von Hochschulen: (Klassische) Universitäten und Technische Hochschulen.
- Verschiedenen Sichtweisen auf die Mathematik erzeugten *neue Strukturprobleme*:
 - Übergangsprobleme: Welcher Schultyp berechtigt zu welchem Hochschulzugang?
 - Welche Art von Mathematik ist für eine Ausbildung zu ihrer praktischen Verwendung die geeignete?

„... the technical colleges, due to their origin as polytechnic schools, provided a large portion of basically elementary mathematics. When young mathematics professors, formed in the spirit of the new Weierstrassian rigor in analysis, used them to present rigorous foundations of mathematics, this not only annoyed their students, but even provoked the emergence of an anti-mathematical movement among engineers.” (Schubring 2014, S. 248)

- **In Bezug auf die Funktion:**
 - Nicht nur unerlässliches Hilfsmittel einer formalen Bildung,
 - Sondern Werkzeug zur Gestaltung der gesellschaftlich-ökonomischen Verhältnisse.
- **In Bezug auf den Abstraktionsgrad und die fachinterne Struktur:**
 - Weiterentwicklung als fortlaufendes Ordnen von Erfahrungsfeldern (Freudenthal), Ausbildung wirkmächtiger Ideen von hohem Abstraktionsgrad (Formelsprache, Funktionsbegriff);
 - Streben nach systematischer Vollständigkeit als Stilmittel.
- **Begleitwirkung:** „Die Gefahr des Übergangs von einem dialogischen oder dialektischen *systematischen Denken* zu einem monologischen *Denken in Systemen* wird zu einem ... immer größer werdenden Schatten der ursprünglichen Platonischen Idee philosophischer Wissensbildung“ (Mittelstraß ebd. S. 11 f.) und erfasst auch die Mathematik.
- **Konsequenz:** Die Mathematik, die ursprünglich selbst eine didaktische Funktion hatte, bedarf zur Aufrechterhaltung ihrer gewonnenen Rolle einer didaktischen Unterstützung und Begleitung.

Ziel:

Eine Modernisierung der mathematischen Bildung auf allen Ebenen; geregelte Übergänge von den Sekundarschulen zu den Hochschulen.

Übergreifende curriculare Leitidee und Orientierung:

Die Erziehung zur Gewohnheit des *funktionalen Denkens* sollte das gesamte mathematische Curriculum „wie ein Ferment durchdringen“ und damit insbesondere

- einen Zugang zur Analysis vorbereiten und
- die Kluft zwischen der Sekundarschulbildung und der akademischen Bildung überbrücken.

Dezidierte **didaktische Orientierung:**

- Schwerpunkt auf heuristischen und genetischen Zugängen und weniger systematisch-deduktive Darstellungen,
- Anpassung an die natürliche Denkentwicklung (Relevanz der psychologischen Dimension).

Idealtypische Zweiheit:

- Erkennen der Notwendigkeit einer didaktischen Orientierung,
- erste Leitideen,
- erste Ansätze zu einer Institutionalisierung als Hochschuldisziplin (Habilitation von Rudolf Schimmack)

Zusammenwirken von Mathematik und ihrer Didaktik zumindest als Zweckbündnis

Felix Klein selbst etablierte mit seiner „Elementarmathematik vom höheren Standpunkt“ ein Beispiel für innere Verbundenheit, indem in der fachlichen Darstellung wesentliche didaktische Kategorien ganz natürlich berücksichtigte, zum Beispiel:

- Die Beziehung zwischen heuristischen Zugängen und streng logischem Schließen in mathematischen Entdeckungsprozess.
- Die Beziehung zwischen beweisbaren Schlüssen und plausiblen Betrachtungen.
- Verschiedene Stufen der Begriffsentwicklung: vom ursprünglichen, an konkretem Handeln orientierten Denken zum formalen Schließen.
- Die Rolle von Vorstellungen („concept images“) auf jeder dieser Stufe (von ursprünglichen, auf konkreten Erfahrungen basierenden Vorstellungen zu mehr abstrakten Vorstellungen).

Darstellung mit einem eindrucksvollen narrativen Talent (O. Toeplitz) in einem *dialogischen Stil* jenseits der systematischen Struktur vieler Vorlesungen.

- **Mathematik als Schlüsseltechnologie:**

- Ein alle Lebensbereiche durchdringendes „saugutes Werkzeug“ (H. Geschwindner; s. Loos & Zielgler 2015),
- bis zu den Gefahren der unbesonnenen Handhabung (Nickel 2011).

- **Verschärfte Notwendigkeit zu Bildungsanstrengungen:**

- Der wissenschaftlich-technische Fortschritt beginnt seinerseits, die Menschen vor sich her zu treiben,
- Gesellschaftliche Teilhabe nur auf einem erhöhten Bildungsniveau möglich,
- Veränderte Berufsanforderungen schon auf handwerklicher Ebene.

- **Konsequenz:** Verstärkte didaktische Anstrengungen werden unausweichlich:

- Keine Sache mehr von Visionären,
- sondern entlang der gesamten Bildungskette eine alltägliche Notwendigkeit.

Handlungsleitendes Motiv für das Engagement der Deutsche Telekom-Stiftung zur Gründung des DZLM!

Dialektisches systematisches Denken und monologisches Denken in Systemen (Mittelstraß 2014)

- Aber: Die darstellungstechnische Ökonomie vieler Lehrbetriebe ist nicht auch zugleich eine lernpsychologische Ökonomie!

Stoff und Methode (Toeplitz 1928)

- *Stoff*: die „Tatsachen“, die nachher das „abfragbare Wissen“ bilden,
- *Methode*: das „Getriebe“ einer mathematischen Theorie.

Mathematik wirklich verstehen heißt das Getriebe verstehen!

Verstehendes Lernen und systemkonforme Bewältigungskonzepte (Andelfinger 1985):

„Wie sich ... zeigen wird, sind gerade im arithmetischen Bereich die Unterschiede zwischen Lehrer- und Lernerkonzepten sehr groß. Entsprechend groß ist die Gefahr, dass Schüler vorschnell zu sinnreduziertem Anpassungsverhalten gedrängt werden, weil die Erwartungen des Lehrers an sie die Verständnisprozesse überholt haben.“

Nicht nur Mathematik und ihre Didaktik als zumeist arbeitsteiliges Zweckbündnis, sondern auch

- eine stärkere didaktische Durchdringung der Mathematik selbst im Sinne einer inneren Verbundenheit
- bei Aufrechterhaltung einer sachdienlichen fachlichen Durchdringung der Didaktik.

Betrachtung mathematischen Wissens aus didaktischer Perspektive:

- Welche Fragestellungen haben zur Entwicklung der betrachteten Begriffe und Verfahren geführt?
- Welche Stufen vom ursprünglichen Verstehen zum exakten Denken haben diese durchlaufen?
- Wie kamen dabei typische mathematische Denkhandlungen zum Einsatz?
- Wie artikuliert sich das theoretische Wissen in Sachzusammenhängen?

Eine dialogische Grundhaltung:

- „wissenschaftliche Rationalität und argumentative oder dialogische Vernunft zu einer Lebensform miteinander verbinden“, denn
- „Geteilte Rationalitäten verlieren ihre *orientierende Kraft angesichts der faktischen Einheit des Lebens*.“ (Mittelstraß 2014, S. 304 f.; Hervorh. LHH)

„Auch die Universität ... hat verlernt, Wissenschaft auch als eine *Lebensform*, eben als eine wissenschaftliche Lebensform zu begreifen und zu vermitteln. Moderne Vorstellungen von einem Marktmodell der Universität, vom Studierenden als Kunden und von Dienstleistung als der Befriedigung wechselnder gesellschaftlicher Bedürfnisse, der gegebenenfalls auch wissenschaftliche Standards geopfert werden müssen, verschärft diese Situation.“ (ebd., S. 296)

„Die Welt ist nämlich in ihren Wissensstrukturen eine Expertenwelt, und in einer Expertenwelt drohen unter dem Diktat des partikularisierten Wissens allgemeine Orientierungen ihre prägende, eben orientierende Kraft zu verlieren.“ (ebd., S. 297)

Die Durchdringung von Mathematik und Didaktik braucht Brückenbauer, die

- in beiden Bereichen heimisch sind,
- Ansatzpunkte für Verbindungen sehen und praktizieren,
- und den organisatorischen Willen und die integrative Kraft besitzen, diese Entwicklung auf verschiedenen Ebenen zu fördern.

Dank an *Jürg Kramer* für seinen unermüdlichen Einsatz und seine erfolgreichen Tätigkeiten in diesem Bereich!

Wir wünschen ihm eine anhaltende Tatkraft und weiterhin viel Erfolg!

Andelfinger, B. (1985). *Didaktischer Informationsdienst Mathematik. Thema: Arithmetik, Algebra und Funktionen*. Soest: Landesinstitut für Schule und Weiterbildung.

Loos, A. & Ziegler, G.M. (2015): Gesellschaftliche Bedeutung der Mathematik. In: R. Bruder, L. Hefendehl-Hebeker, B. Schmidt-Thieme, & H.-G. Weigand (Hrsg.): *Handbuch der Mathematikdidaktik* (S. 1–17). Berlin/Heidelberg: Springer.

Mittelstraß, J. (2014). Die griechische Denkform. Von der Entstehung der Philosophie aus dem Geiste der Geometrie. Berlin/Boston: De Gruyter.

Nickel, G. (2011): Mathematik – die (un)heimliche Macht des Unverstandenen. In M. Helmerich et al. (Hrsg.), *Mathematik verstehen. Philosophische und didaktische Perspektiven*. Wiesbaden: Vieweg + Teubner, S. 47 – 58.

Schubring, G. (2012). Antagonism between German states regarding the status of mathematics teaching during the 19th century: Processes of reconciling them. *ZDM - The International Journal on Mathematics Education*, 44(4), 525–535.

Schubring, G. (2014). Mathematics Education in Germany (Modern Times). In A. Karp & G. Schubring (Eds.), *Handbook on the History of Mathematics Education*. New York: Springer.

Toeplitz, O. (1928). Die Spannungen zwischen den Aufgaben und Zielen der Mathematik an der Hochschule und an der höheren Schule. *Schriften des deutschen Ausschusses für den mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht* 11(10), 1–16.