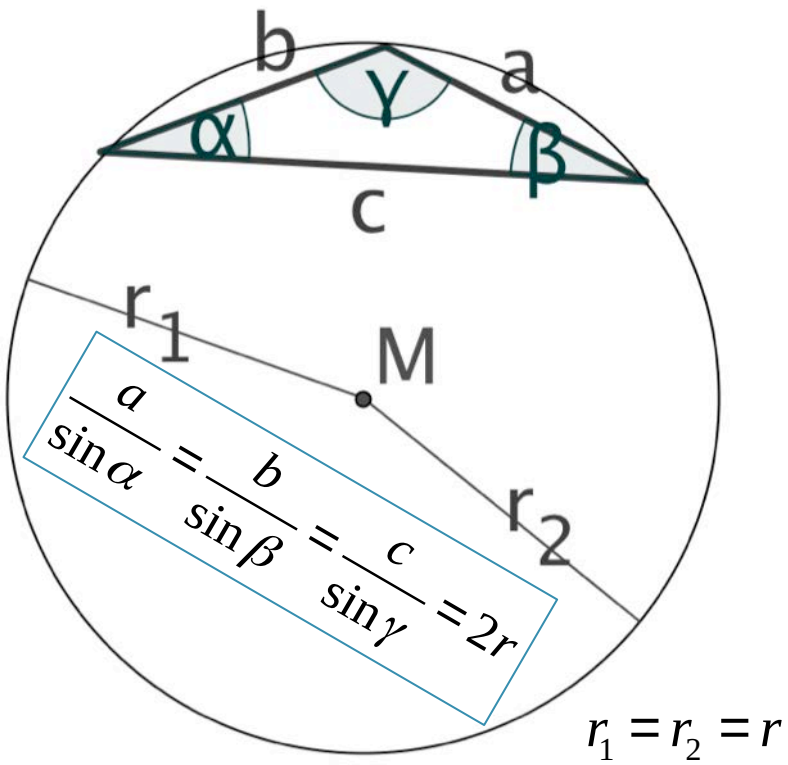
Sinus-und Kosinussatz

Referentin: Theresia Herrmann



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

Gliederung:

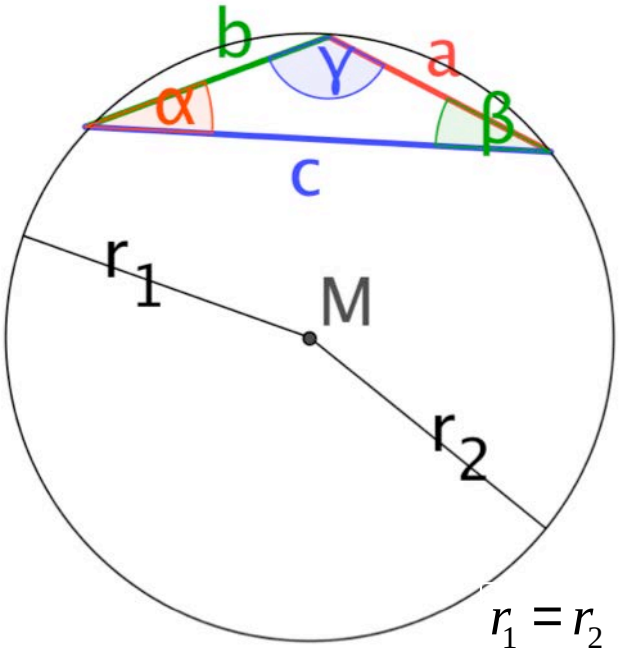
1. **Sinussatz**
2. Beweis des Sinussatzes
3. **Kosinussatz**
4. Beweis des Kosinussatzes
5. **Anwendungen /Beispiele aus Schulbüchern**
6. Literauturverzeichnis

1. Sinussatz

- **Sinussatz:**

Seien a,b,c die Seiten eines **beliebigen** Dreiecks, α, β, γ die jeweils gegenüberliegenden Winkel und r der Radius des Umkreises, dann gilt:

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r}$$



$r_1 = r_2 = r$

Historisches:

- Der Sinussatz wurde von Abu Nasr Mansur (persischer Mathematiker und Astronom; um 960 bis 1036 **n.** Chr.) erstmals bewiesen.

- Der erste Beweis wird in einigen wenigen auch Quellen Al-Battani, in anderen Abu Mamud al-Chudschandi zugeschrieben

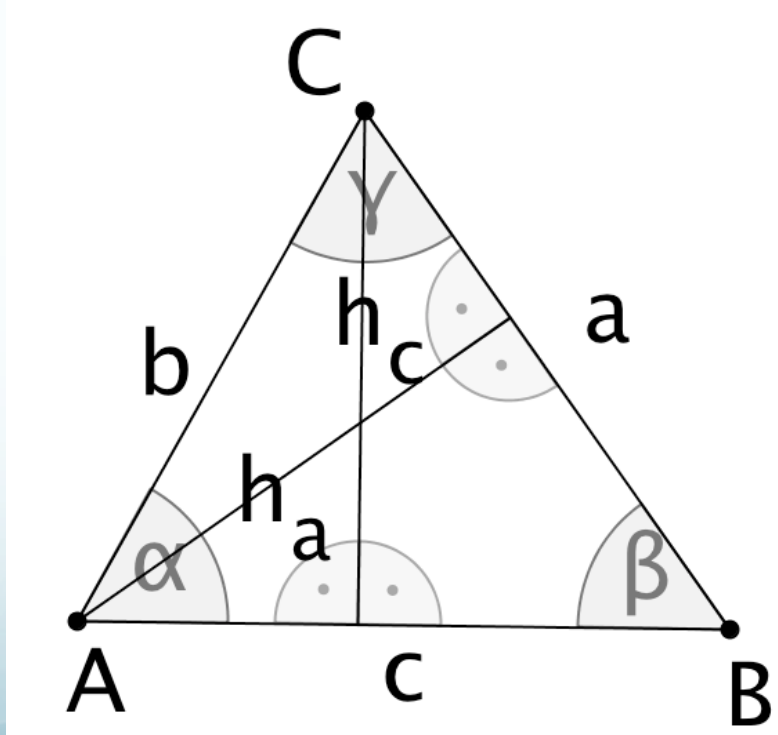
2. Beweis des Sinussatzes
(1.Beweis mit Fallunterscheidung)

1.Fall: Spitzer Winkel: ($0° < \alpha < 90°$) :

In einem bel. Dreieck ΔABC

mit $0° < \alpha < 90°$ gilt :

- $\sin\alpha = \frac{h_c}{b} \Leftrightarrow h_c = \sin\alpha \bullet b$
- $\sin\beta = \frac{h_c}{a} \Leftrightarrow h_c = \sin\beta \bullet a$



- Durch die beiden Ergebnisse von h_c erhalten wir somit folgende Gleichung:

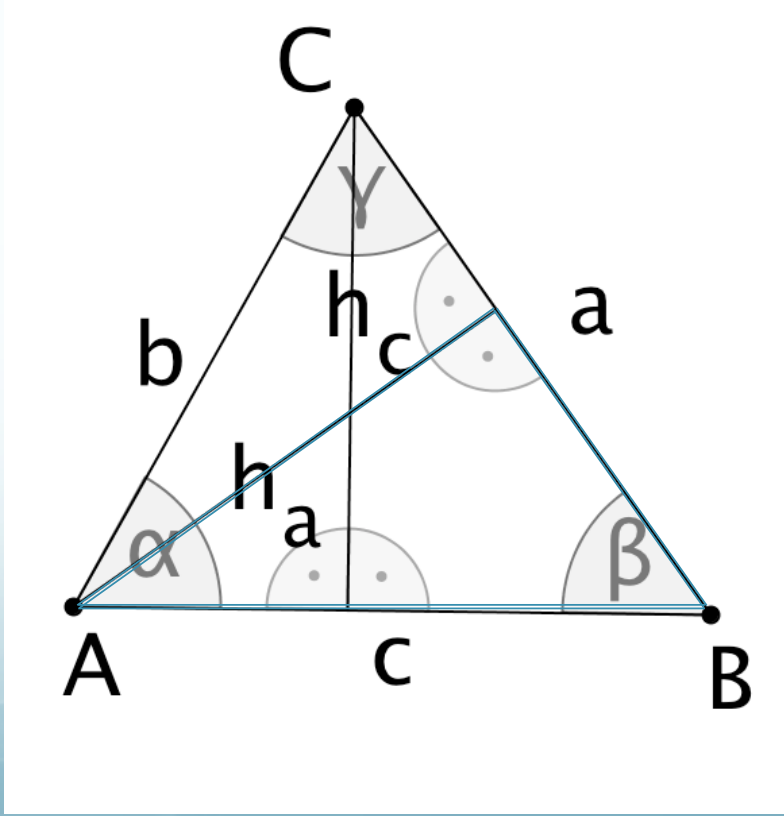
$$\sin\alpha \bullet b = \sin\beta \bullet a \quad / \bullet \frac{1}{\sin\alpha \bullet \sin\beta}$$

- $$\boxed{\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}} \quad (*)$$

- Weiter gilt:

$$\sin\gamma = \frac{h_a}{b} \Leftrightarrow h_a = \sin\gamma \bullet b$$

$$\sin\beta = \frac{h_a}{c} \Leftrightarrow h_a = \sin\beta \bullet c$$



- Die beiden Ergebnisse von ha liefern die Gleichung:

$$\sin\gamma \bullet b = \sin\beta \bullet c \qquad / \bullet \frac{1}{\sin\beta \bullet \sin\gamma}$$

$$\boxed{\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}}$$

- Mit **(*)** = $\boxed{\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}}$ folgt dann:

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}}$$

2.Fall: Stumpfer Winkel (*90°< α<180°) :*

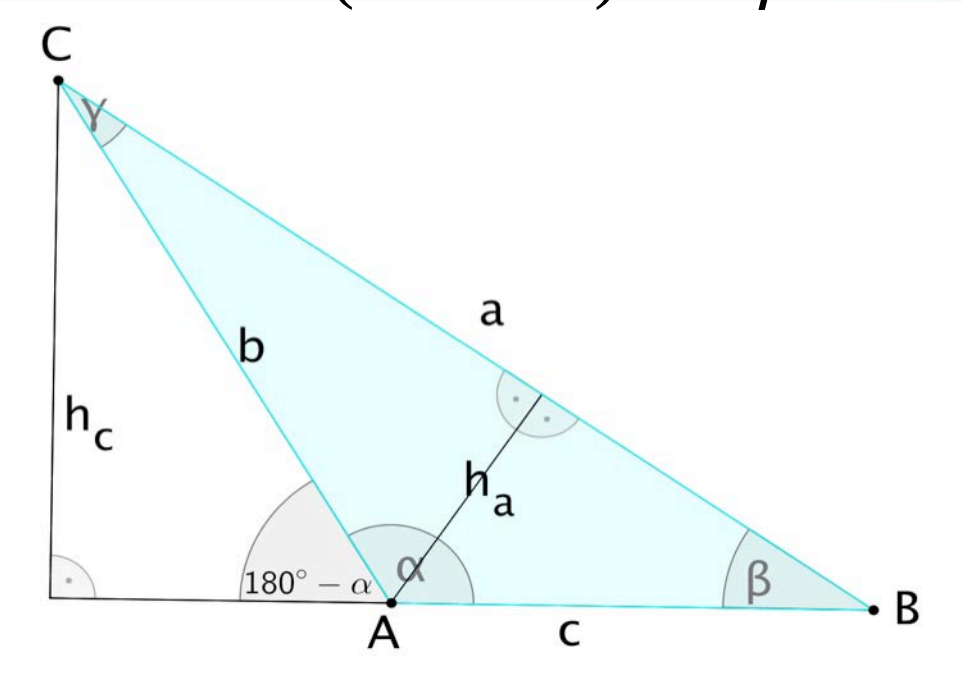
- Mit $h_c = \sin\beta \bullet \alpha$

  und $h_c = \sin(180° - \alpha) \bullet b$

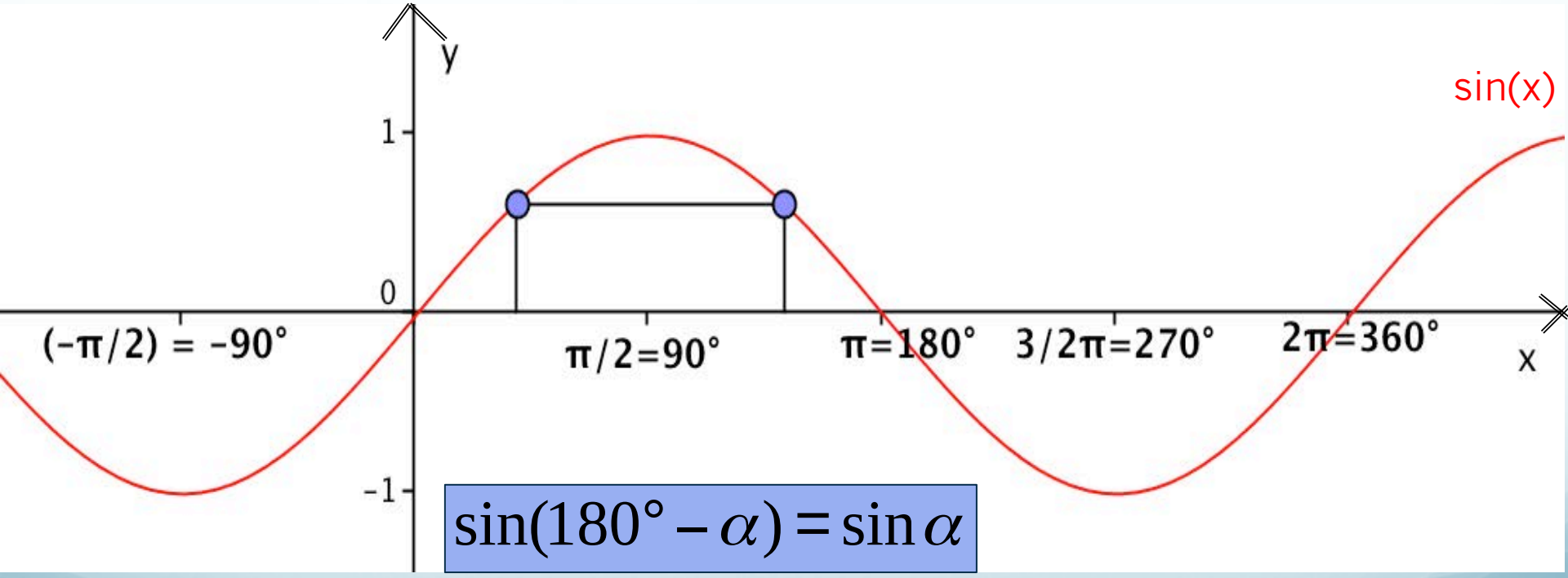
  ergibt sich die Gleichung:

$$\sin(180° - \alpha) \bullet b = \sin\beta \bullet a \quad / \bullet \frac{1}{\sin(180° - \alpha) \bullet \sin\beta}$$

$$\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin(180° - \alpha)}$$



- Für weitere Vereinfachung, benötigen wir eine zusätzliche trigonometrische Beziehung.



$$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$$

- Mit $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ folgt: $\boxed{\dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{a}{\sin\alpha}}$ **(*)**

- Weiter erhalten wir analog:

- $h_a = \sin\gamma \bullet b$ und $h_a = \sin\beta \bullet c$ sowie die Gleichung:

$$\sin\gamma \bullet b = \sin\beta \bullet c \quad / \bullet \frac{1}{\sin\beta \bullet \sin\gamma}$$

$$\boxed{\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}}$$

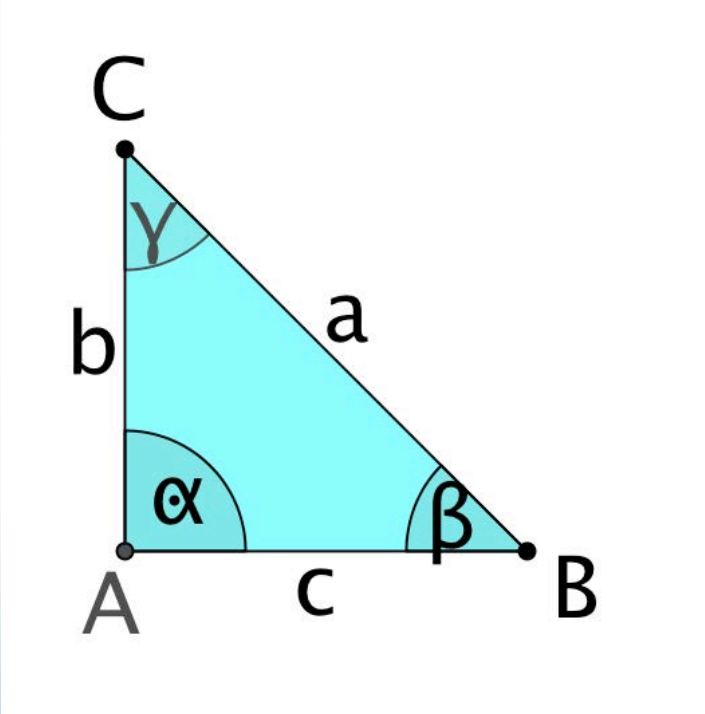
- Wieder folgt mit **(*)** : $\boxed{\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}}$

3.Fall: Rechter Winkel (α=90°) :

$$\sin\alpha = \frac{a}{a} \qquad \sin\alpha = \sin(90°) = 1 \quad \text{und} \quad \boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = a}$$

$$\sin\beta = \frac{b}{a} \Leftrightarrow \boxed{\frac{b}{\sin\beta} = a}$$

$$\sin\gamma = \frac{c}{a} \Leftrightarrow \boxed{\frac{c}{\sin\gamma} = a}$$

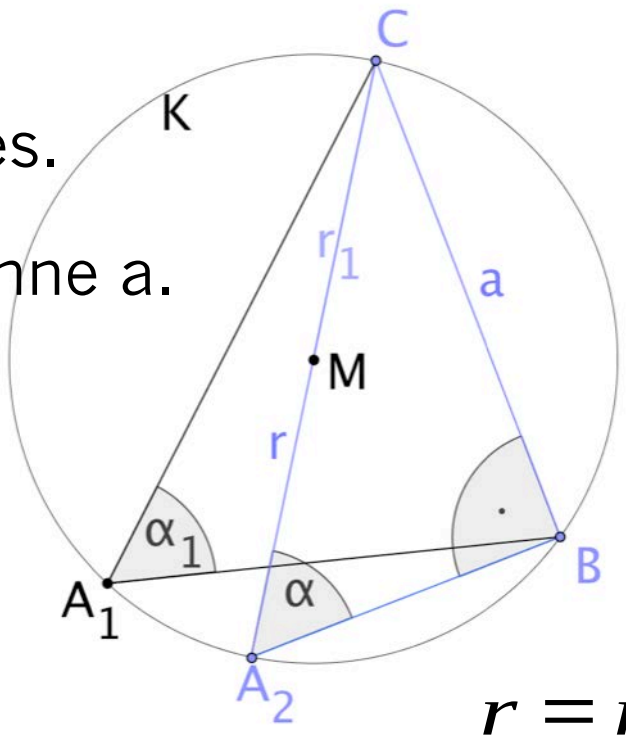


$$\Rightarrow \boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}}$$

- Bleibt nur noch zu zeigen, dass

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r}$$

- Betrachte $\Delta(A_1BC)$ mit Umkreis K, Mittelpunkt M und Radius r.
- Seite a ist eine Sehne des Umkreises.
- Winkel α ist Umfangswinkel zur Sehne a.
- Nach dem Umfangswinkelsatz sind alle Umfangswinkel zu a (auf der selben Seite des Kreises) gleich groß.

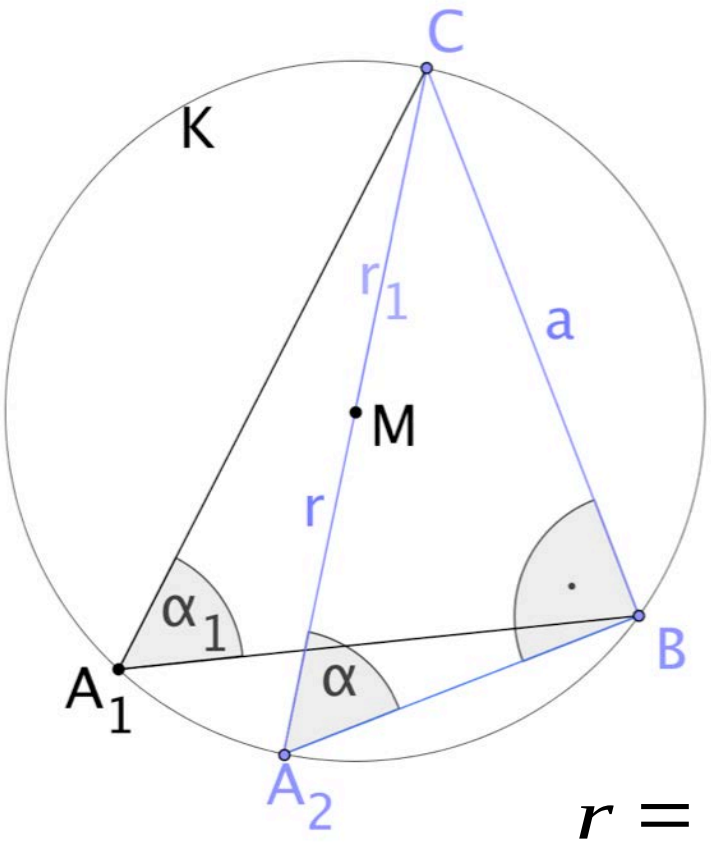


$r = r_1$

- $\Delta(A_2BC)$ besitzt bei Punkt B einen **rechten Winkel**.
- ⇨ $\overline{A_2C}$ geht durch M (**Umkehrung Satz des Thales**).
- ⇨ $\overline{A_2C} = 2r$
- Im rechtwinkligen $\Delta(A_2BC)$

  gilt: $\sin\alpha = \dfrac{a}{2r}$

  ⇨ $\boxed{\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2r}$



$r = r_1$

- Da bereits gezeigt wurde, dass

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}}$$

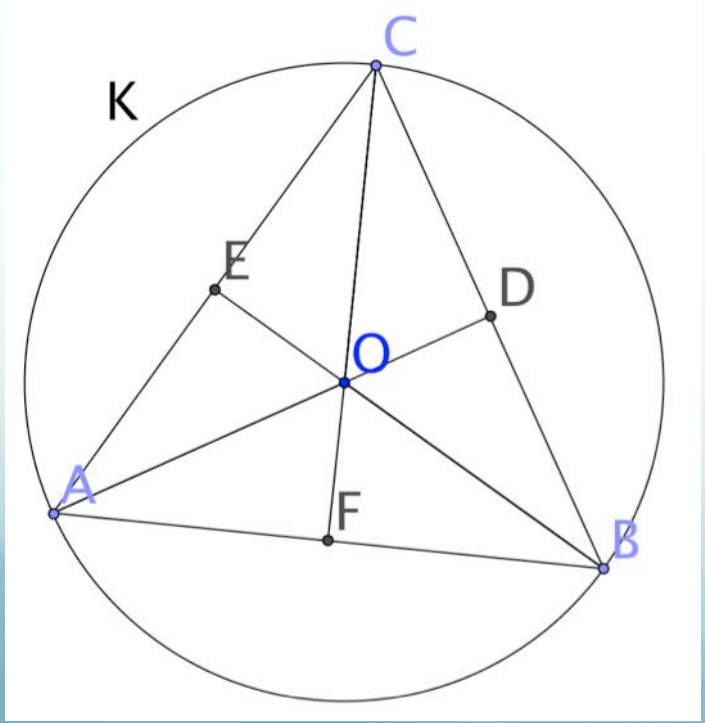
ist nun mit $\frac{a}{\sin\alpha} = 2r$ bewiesen, dass

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r}$$

q.e.d.

2.Beweis des Sinussatzes
(2.Spezieller Beweis ohne Fallunterscheidung)

- Betrachte Kreis K.
- Sei 0 der Mittelpunkt des Umkreises von $\Delta(ABC)$
- Seien D,E,F die Mittelpunkte der Seiten $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$

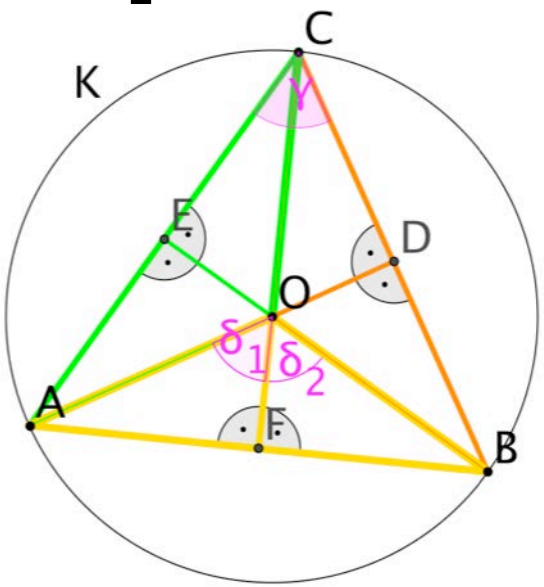


→ Welche „Beziehungen“ können hier gefunden werden?

- Betrachte Kreis K.
- Sei 0 der Mittelpunkt des Umkreises von $\Delta(ABC)$
- Seien D,E,F die Mittelpunkte der Seiten $\overline{BC}, \overline{AC}, \overline{AB}$
- Es gelten:

$$\left.\begin{array}{l} \Delta(AFO) \cong \Delta(BFO) \\ \Delta(BDO) \cong \Delta(CDO) \\ \Delta(AE0) \cong \Delta(CEO) \end{array}\right\} [SWS]$$

$$\Rightarrow \delta_1 \cong \delta_2$$

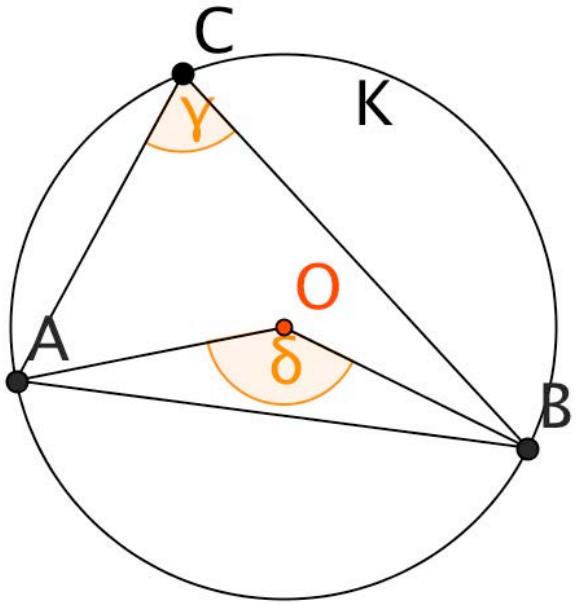


- Durch den Umfangswinkelsatz erhalten wir weitere Informationen.

- Der Umfangswinkelsatz besagt auch:

Sei $\overline{AB}$ eine Sehne des Kreises K mit Mittelpunkt O. Sei C ein weiterer Punkt auf K, wobei C und O auf der selben Seite von $\overline{AB}$ liegen und O kein Element $\overline{AB}$, dann gilt:

$$\boxed{2\gamma \cong \delta}$$



- Damit folgt für unseren Beweis: $\boxed{2 \bullet \gamma \cong \delta_1 + \delta_2}$

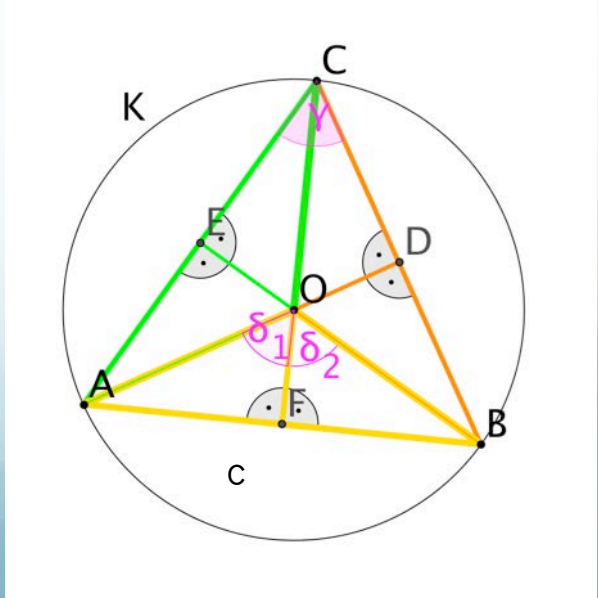
$$\Rightarrow \gamma \cong \delta_1$$

$$\Rightarrow \sin\gamma = \sin\delta_1 = \frac{\overline{AF}}{\overline{AO}} = \frac{c/2}{r} = \frac{c}{2r}$$

$$\Rightarrow \frac{c}{\sin\gamma} = 2r \quad \underline{\text{Analog:}} \quad \frac{a}{\sin\alpha} = 2r \;,\; \frac{b}{\sin ß} = 2r$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r}$$

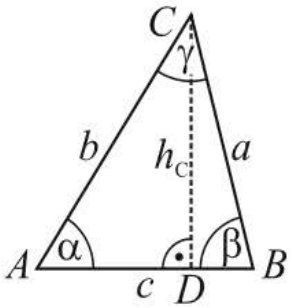
q.e.d.



Beispielbezogene und allgemeine Herleitung des Sinussatzes

In einem Dreieck ABC sind gegeben:
a = 8,2 cm, b = 6,2 cm, α = 57,5°

Gesucht: β



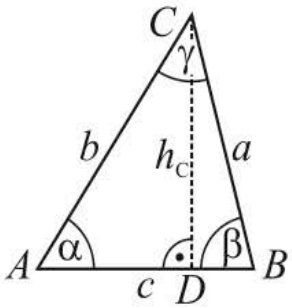
Die Höhe hc zerlegt das Dreieck ABC in zwei rechtwinklige Teildreiecke ACD und BCD.

In ACD: $h_c = b \cdot \sin\alpha = 5{,}23\,\text{cm}$

In BCD: $\sin\beta = \dfrac{h_c}{a} \approx 0{,}637$

$\beta \approx 39{,}6°$

Gesucht ist ein Zusammenhang zwischen zwei Seiten a und b eines Dreiecks und den gegenüberliegenden Winkeln α und β.



Die Höhe hc zerlegt das Dreieck ABC in zwei rechtwinklige Teildreiecke ACD und BCD.

In ACD gilt: $h_c = b \cdot \sin\alpha$

In BCD gilt: $h_c = a \cdot \sin\beta$

Also gilt $b \cdot \sin\alpha = a \cdot \sin\beta$ bzw. $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta}$.

3.Kosinussatz

- Verallgemeinerung des Satz des Pythagoras
- **Kosinussatz:**

Für die drei Seiten a,b,c eines Dreiecks, sowie für den der Seite gegenüberliegenden Winkel gilt:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$$

4.Beweis des Kosinussatzes

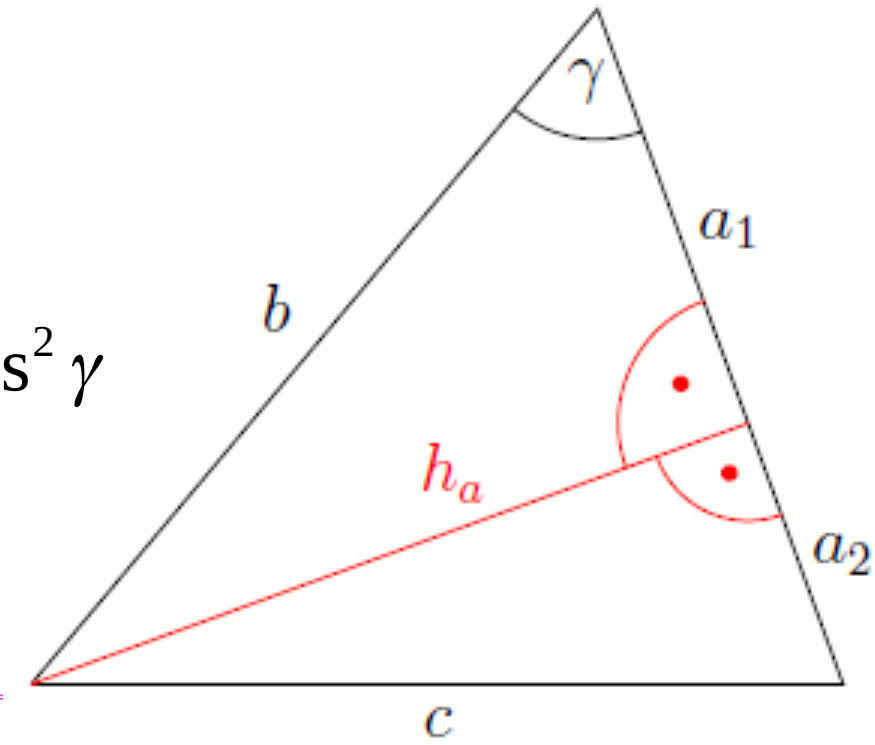
1.Fall: Spitzer Winkel: ($0° < \gamma < 90°$) :

In einem bel. Dreieck ΔABC mit $0° < \gamma < 90°$ gilt :

- $\cos\gamma = \frac{a_1}{b} \Leftrightarrow a_1 = b \cdot \cos\gamma$
- $a_1^2 + h_a^2 = b^2 \Leftrightarrow h_a^2 = b^2 - a_1^2$

  $h_a^2 = b^2 - b^2 \cdot \cos^2\gamma$
- $a_1 + a_2 = a \Leftrightarrow a_2 = a - a_1$

  $\Leftrightarrow a_2 = a - b \cdot \cos\gamma$

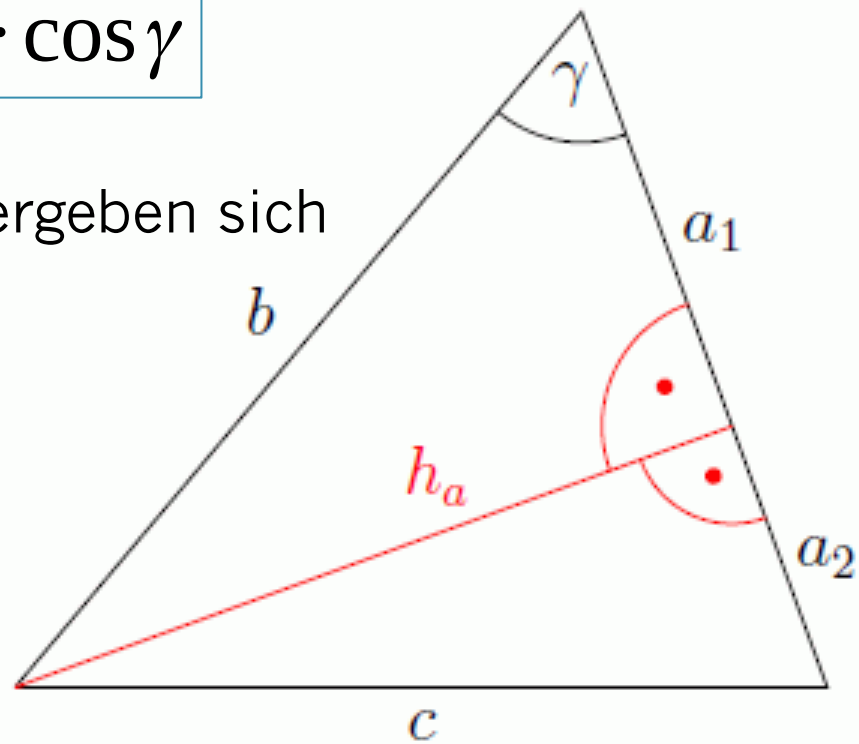


- $$c^2 = h_a^2 + a_2^2$$
$$= b^2 - b^2 \cdot \cos^2\gamma + (a - b \cdot \cos\gamma)^2$$ (Binomische Formel!)
$$= b^2 - b^2 \cdot \cos^2\gamma + a^2 - 2ab \cdot \cos\gamma + b^2 \cos^2\gamma$$
$$= b^2 + a^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma}$$

- Durch zyklische Vertauschung ergeben sich ebenso:

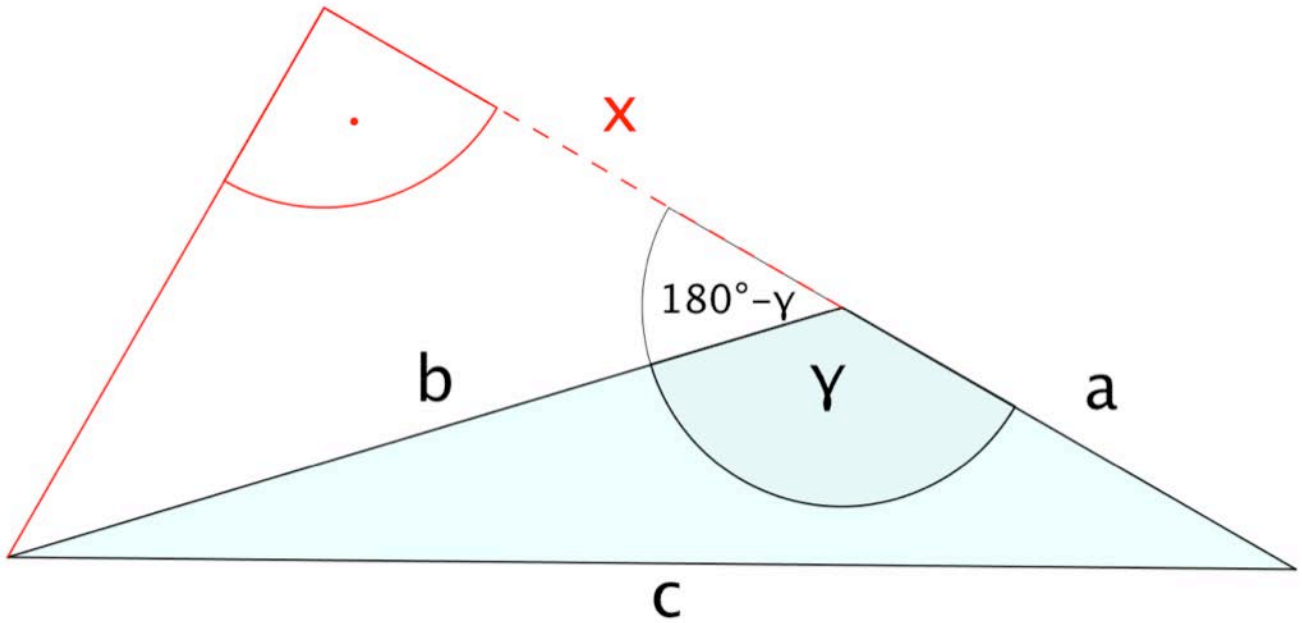
$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos\alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\beta \end{aligned}}$$



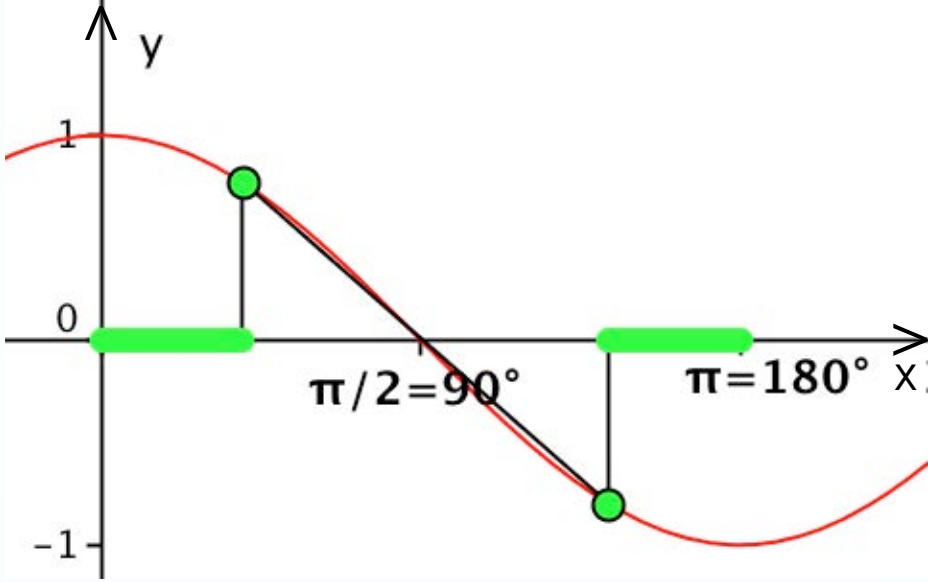
2.Fall: Stumpfer Winkel ($90° < \gamma < 180°$) :

In einem bel. Dreieck ΔABC mit $90° < \gamma < 180°$ gilt :

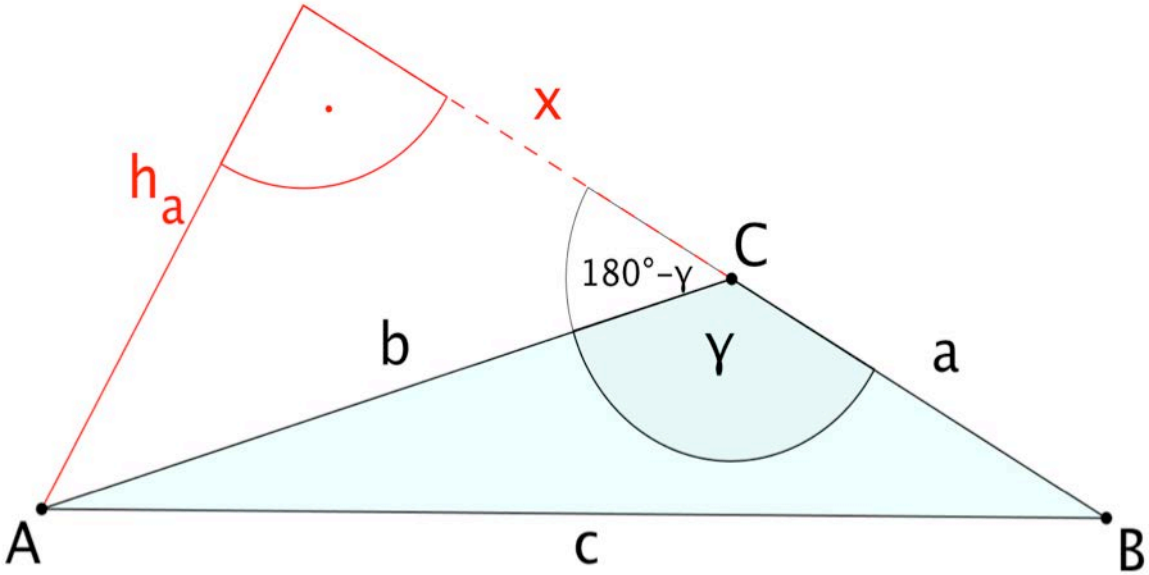
- $\cos(180 - \gamma) = \frac{x}{b} \Leftrightarrow x = b \cdot \cos(180 - \gamma)$



$$x = b \cdot \cos(180 - \gamma)$$
$$= b \cdot (-\cos\gamma)$$
$$= -b \cdot \cos\gamma$$



$$-\cos(180 - \gamma) = \cos\gamma \quad / \cdot (-1)$$
$$\cos(180 - \gamma) = -\cos\gamma$$



$$h_a^2 = b^2 - x^2$$
$$= b^2 - b^2 \cdot \cos^2\gamma$$

$$c^2 = h_a^2 + (a+x)^2$$

$$= b^2 - b^2 \cdot \cos^2\gamma + (a - b\cdot\cos\gamma)^2$$ (Binomische Formel)

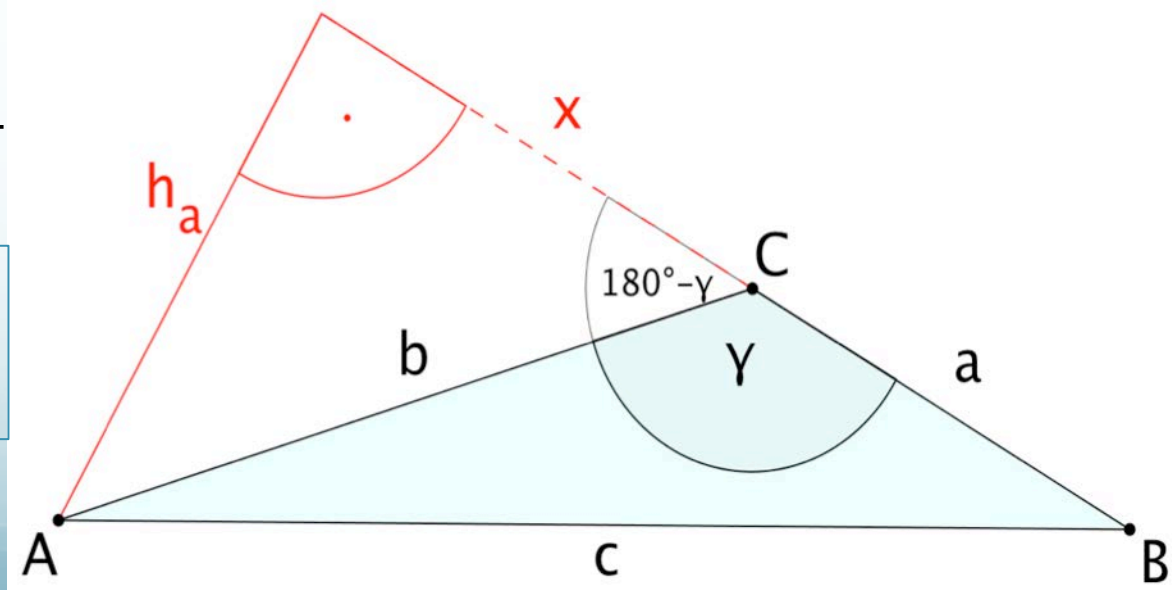
$$= b^2 - b^2 \cdot \cos^2\gamma + a^2 - 2ab\cdot\cos\gamma + b^2\cdot\cos^2\gamma$$

$$= b^2 + a^2 - 2ab\cdot\cos\gamma$$

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma}$$

- Durch zyklische Vertauschung ergeben sich ebenso:

$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta \end{aligned}}$$



3.Fall: Rechter Winkel ($\gamma = 90°$) :

Wir zeigen: $c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos\gamma$

($a^2 = \ldots\ldots$ und $b^2 = \ldots\ldots$ ergeben sich wieder durch zyklische Vertauschung)

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos(90°)$$

$$= a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot 0$$

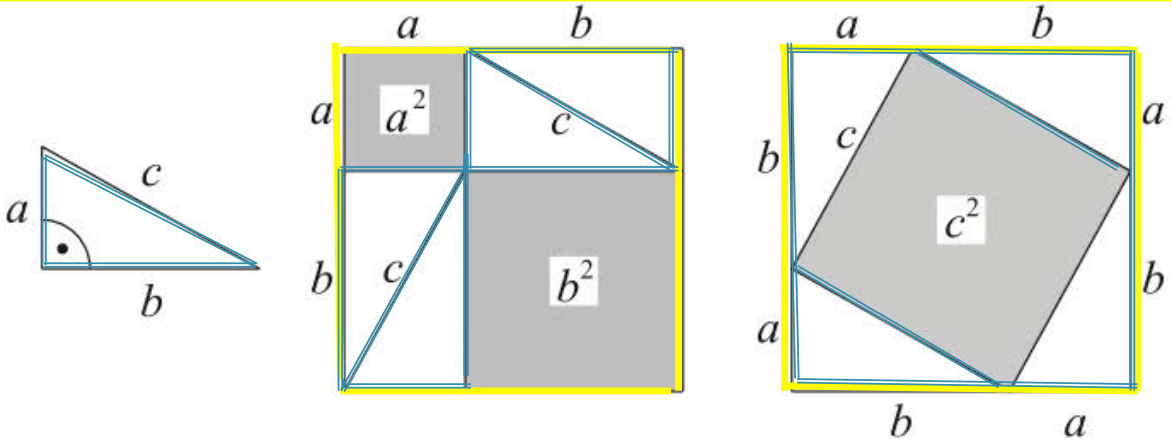
$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2} \Rightarrow$$ Satz des Pythagoras

Satz des Pythagoras

- Für diesen Satz sind mehrere hundert verschiedene Beweise bekannt.
- Damit ist er der meistbewiesene mathematische Satz.
- Pythagoras von Samos (570—510 v.Chr.) legte einen Beweis für diesen Satz vor.
- Ob er allerdings der erste war, der diesen Satz bewies, ist in der Forschung umstritten.
- Die Aussage des Satzes war auch schon lange vor der Zeit Pythagoras' in Baylon und Indien bekannt und wurde dort genutzt.
- Allerdings gibt es keinen Nachweis, dass man dort auch einen Beweis hatte.

- Aussage des Satzes: In allen rechtwinkligen Dreiecken ist die Summe der Flächeninhalte der Kathetenquadrate gleich dem Flächeninhalt des Hypothenusenquadrates.

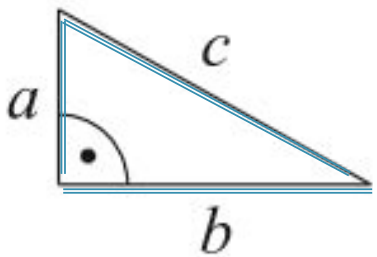
- **Beispiel für einen Zerlegungs-/Ergänzungsbeweis des Satzes:**

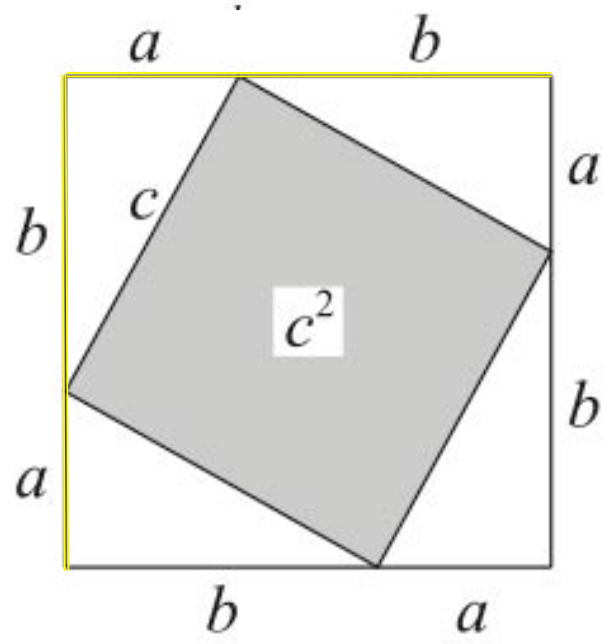


- Die beiden großen Quadrate haben jeweils die Seitenlänge $a + b$ und deshalb gleiche Flächeninhalte $(a + b)^2$.
- Außer den grau eingefärbten Quadraten enthalten diese beiden Quadrate jeweils viermal das Dreieck $\triangle ABC$. Die weißen Flächen haben also in beiden Quadraten den gleichen Flächeninhalt.
- Deshalb muss der Flächeninhalt der grauen Flächen in den beiden großen Quadraten ebenfalls gleich sein.
- $a^2 + b^2 = c^2$.

Beispiel für einen rechnerischen Beweis des Satzes des Pythagoras:

Beweis des Satzes des Pythagoras mit Hilfe der Flächeninhaltsformel für rechtwinklige Dreiecke und der binomischen Formeln





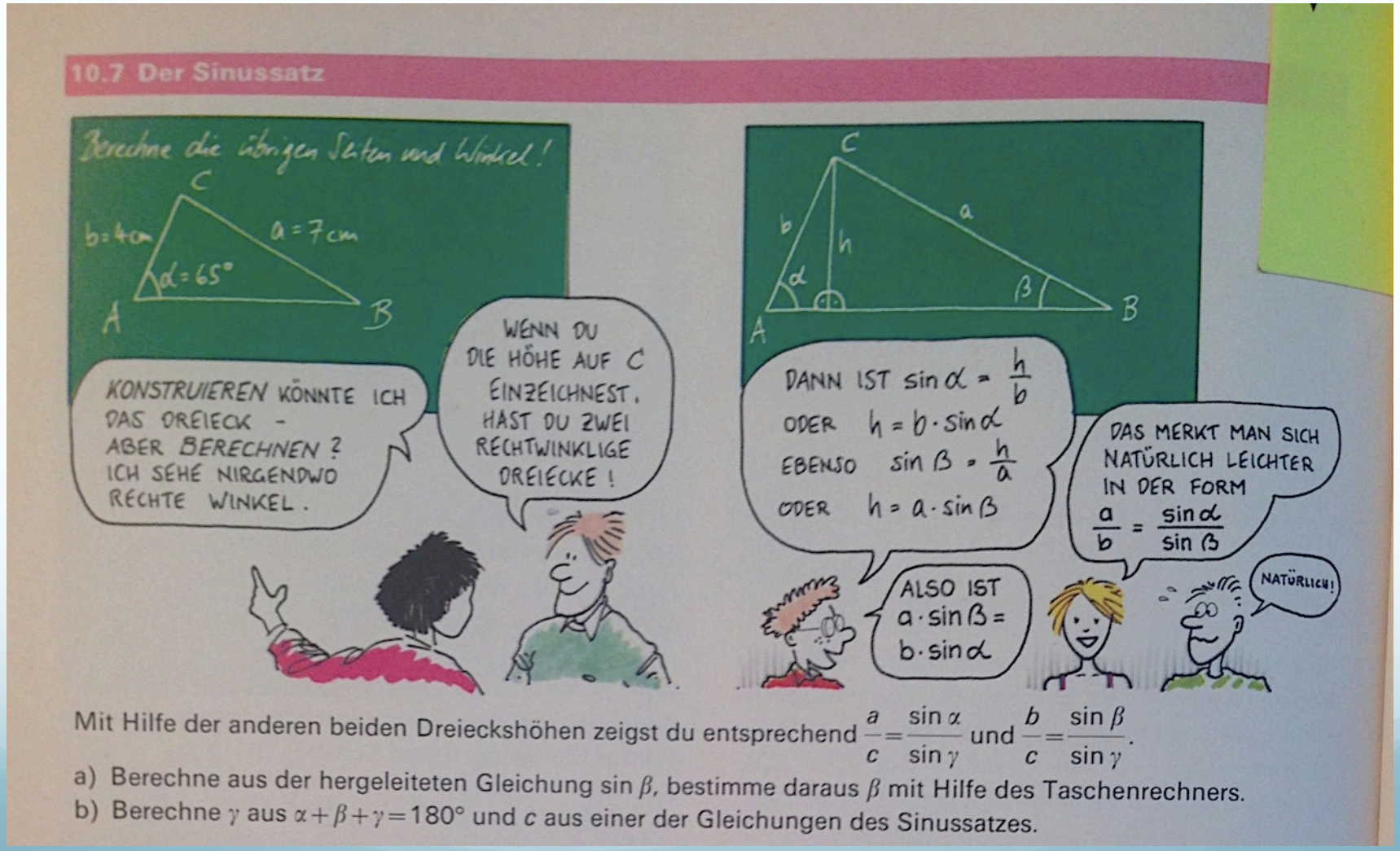
$$A(\Delta) = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} b \cdot a = \frac{ab}{2}$$

- Da der Flächeninhalt der vier Dreiecke (siehe Abb.) jeweils $\frac{ab}{2}$ beträgt, gilt:

$$c^2 = (a+b)^2 - 4 \cdot \frac{ab}{2} = (a+b)^2 - 2ab = a^2 + b^2.$$

5. Beispiele aus Schulbüchern

Schulbuch: Kurs Mathematik 10, S.144f,1993 Verlag Diesterweg, Frankfurt a. M. :



10.7 Der Sinussatz

Berechne die übrigen Seiten und Winkel!

C, b = 4 cm, a = 7 cm, α = 65°, A, B

KONSTRUIEREN KÖNNTE ICH DAS DREIECK – ABER BERECHNEN? ICH SEHE NIRGENDWO RECHTE WINKEL.

WENN DU DIE HÖHE AUF C EINZEICHNEST, HAST DU ZWEI RECHTWINKLIGE DREIECKE!

C, b, a, h, α, β, A, B

DANN IST $\sin\alpha = \frac{h}{b}$

ODER $h = b \cdot \sin\alpha$

EBENSO $\sin\beta = \frac{h}{a}$

ODER $h = a \cdot \sin\beta$

ALSO IST $a \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\alpha$

DAS MERKT MAN SICH NATÜRLICH LEICHTER IN DER FORM $\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$

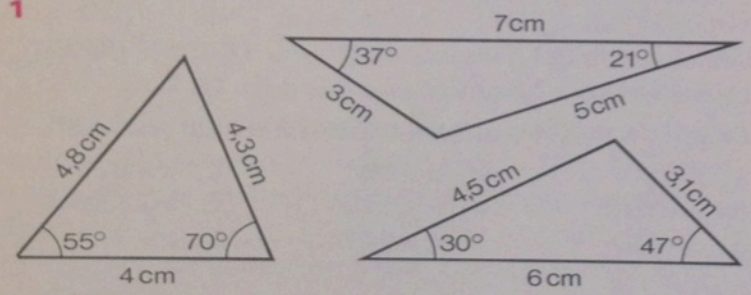
NATÜRLICH!

Mit Hilfe der anderen beiden Dreieckshöhen zeigst du entsprechend $\frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$ und $\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$.

a) Berechne aus der hergeleiteten Gleichung $\sin\beta$, bestimme daraus β mit Hilfe des Taschenrechners.

b) Berechne γ aus $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ und c aus einer der Gleichungen des Sinussatzes.

1

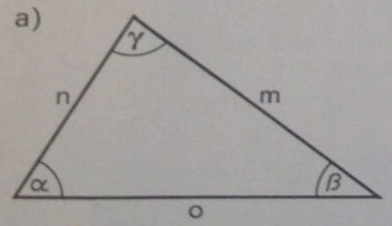


Überprüfe die Aussage des Sinussatz an den gezeichneten Dreiecken.

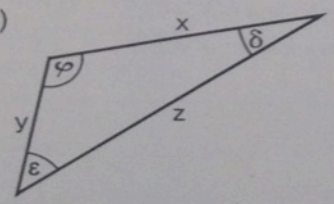
2

Vervollständige die Aussage des Sinussatzes.

a)



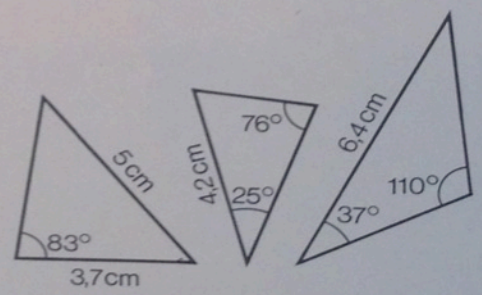
b)

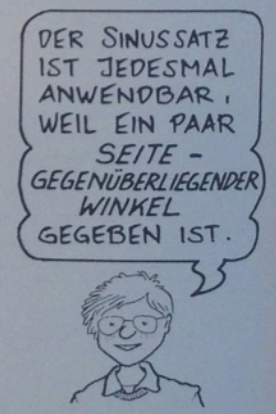


$\frac{m}{n}=\frac{\square}{\square}$, $\frac{o}{n}=\frac{\square}{\square}$, $\frac{\sin\gamma}{\square}=\frac{\square}{n}$, $\frac{x}{y}=\frac{\square}{\square}$, $\frac{\sin\delta}{\sin\varphi}=\frac{\square}{\square}$.

3

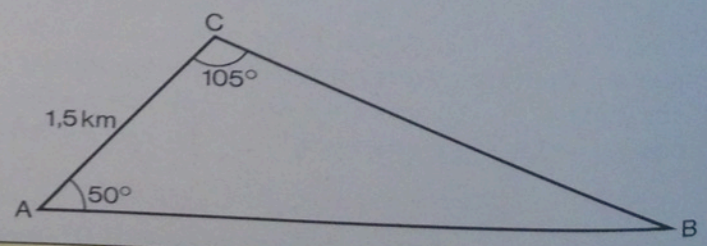
Berechne die fehlenden Seiten und Winkel auf eine Stelle nach dem Komma.





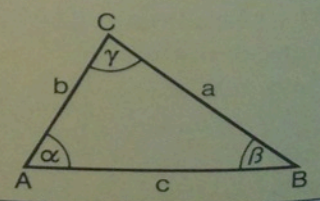
4

Zwischen A und B liegt ein Fluß. Wie weit ist A von B entfernt?



Sinussatz: In jedem Dreieck ist der Quotient aus der Länge zweier Seiten gleich dem Quotienten aus den Sinuswerten der gegenüberliegenden Winkel.

$\frac{b}{c}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$ $\quad\frac{a}{c}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$ $\quad\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$



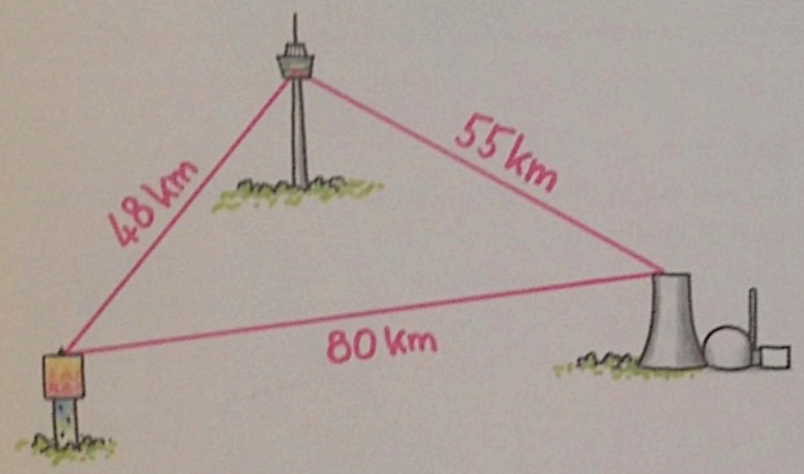
sss Berechnung eines Dreiecks aus 3 Seiten

Beispiel: $a = 4{,}5$ cm, $b = 3{,}2$ cm, $c = 6{,}4$ cm

Lösung: Berechnung der Winkel mit dem Kosinussatz, z. B. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$

- Setze ein, berechne γ.
- Berechne entsprechend Winkel β.
- Berechne den 3. Winkel aus $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Aufgabe: Berechne die Winkel, unter denen man von jedem der 3 Türme aus die beiden anderen sieht.



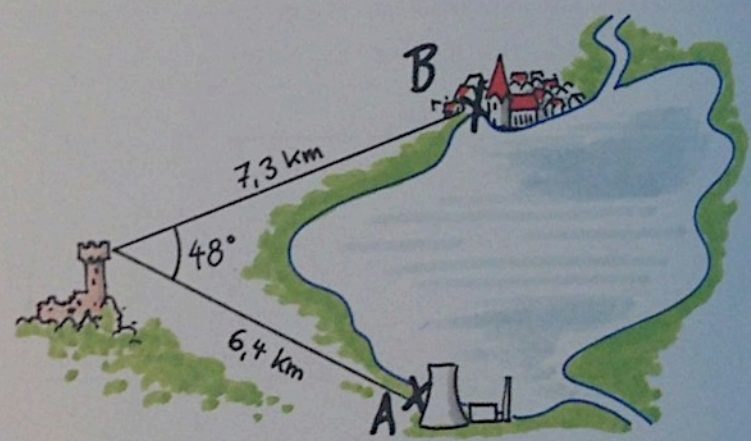
sws Berechnung eines Dreiecks aus 2 Seiten und dem eingeschlossenen Winkel

Beispiel: $c = 8{,}4$ cm, $b = 6{,}3$ cm, $\alpha = 53°$

Lösung: Berechnung der Gegenseite des Winkels mit dem Kosinussatz: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$

- Setze ein, berechne a.
- Berechne β mit Sinus- oder Kosinussatz.
- Berechne den 3. Winkel aus $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.

Aufgabe: Wie weit sind A und B voneinander entfernt?

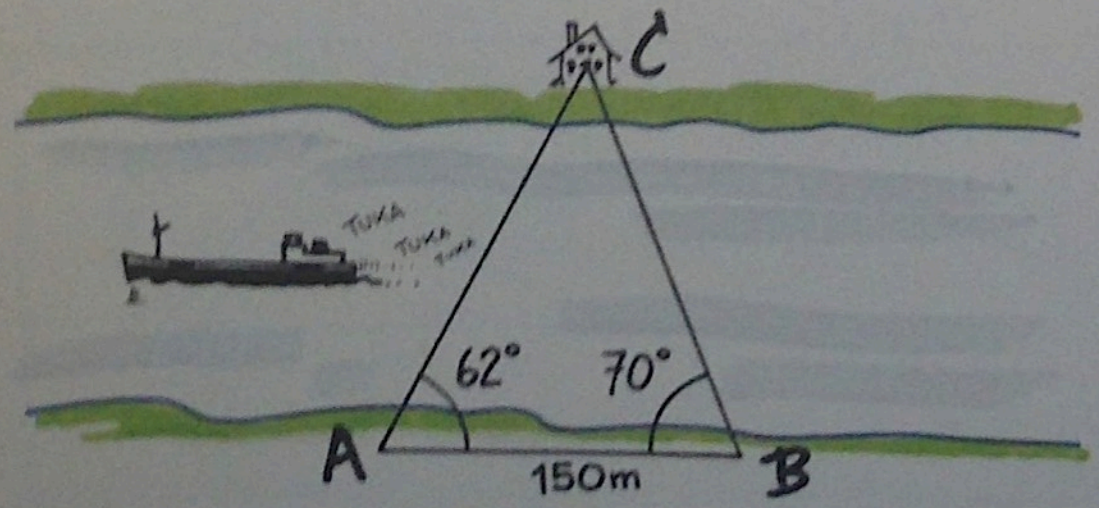


Beispiel: $c = 7$ cm, $\alpha = 42°$, $\beta = 57°$

Lösung: Der 3. Winkel folgt aus $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, die beiden Seiten aus dem Sinussatz $\frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$.

- Berechne den dritten Winkel.
- Setze ein, berechne a.
- Berechne entsprechend die Seite b.

Aufgabe: Wie weit ist C von A und B entfernt? Unter welchem Winkel sieht man A und B von C aus?

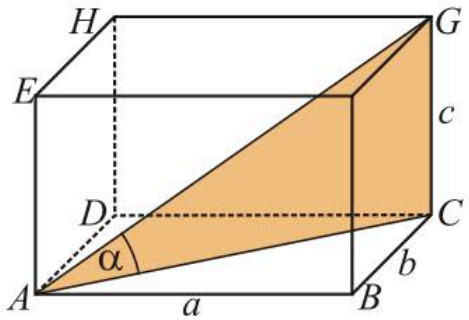


Berechnung an einem Quader (aus Lütticken/Uhl 2008, S. 54)

Wie groß ist der Winkel α, den die Raumdiagonale des Quaders mit der der Flächendiagonale einschließt?

a) $a = 4$ cm; $b = 3$ cm; $c = 8$ cm

b) $a = 4$ cm; $b = 8$ cm; $c = 3$ cm



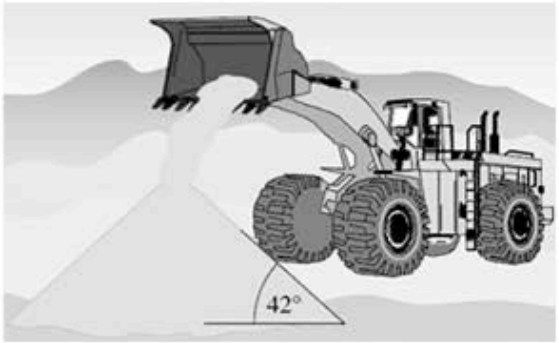
Berechnung an einer Pyramide

Bei einer Pyramide mit einer viereckigen Grundfläche sind alle Kanten gleich lang. Unter welchem Winkel ist eine der zur Spitze führenden Kanten gegenüber der Grundfläche geneigt?

Berechnungen an einem Kegel (aus Koullen 2008, S. 52)

Feuchter Sand lässt sich gerade noch ohne abzurutschen mit einem Schüttwinkel von etwa 42° aufschütten.

- Wie hoch ist ein kegelförmiger feuchter Sandhaufen mit 30 m Durchmesser am Boden?
- Es werden 20 m^3 feuchten Sandes aufgeschüttet. Dabei wird eine Höhe von 2,70 m erreicht. Reicht dafür eine Grundfläche mit 3 m Radius?



Aufgabe aus der Abschlussprüfung nach Kasse 10 an Hauptschulen in B/W (2008)

Aus einem Würfel aus Messing (Dichte: 8,3 g/cm^3) wurden zwei Kegelstümpfe ausgefräst, die zueinander symmetrisch sind (siehe Skizze).

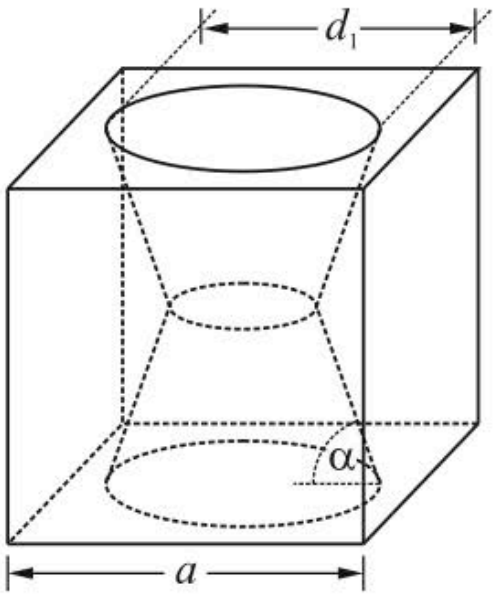
a) Berechnen Sie das Gewicht des Werkstücks.

b) Berechnen Sie die Länge der Seitenkante eines Kegelstumpfs.

c) Das Werkstück wird in einem Tauchbad mit einer 0,1 mm dicken Silberschicht überzogen (Dichte: 10,5 g/cm^3). Berechnen Sie das Gewicht des aufgetragenen Silbers.

d) Zeichnen Sie einen Diagonalschnitt des Werkstücks in einem geeigneten Maßstab.

e) Bei welchem Durchmesser d_2 haben die beiden Kegelstümpfe zusammen das gleiche Volumen wie der Restkörper des Würfels (d_1 und h bleiben unverändert)?



(Skizze nicht maßstabsgetreu)

$a = 8$ cm $\quad d_1 = 6$ cm $\quad \alpha = 73°$

6.Literaturverzeichnis

- Elementargeometrie und Wirklichkeit: Einführung in geometrisches Denken, Wittmann, Vieweg 1987
- Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe 1, Weigand, Springer Spektrum 2014
- Leitfaden Geometrie: Für Studierende der Lehrämter,Müller-Philipp, Springer 2012
- Elementargeometrie, Ilka Agricola; Thomas Friedrich, Vieweg 2005
- Elementargeometrievorlesung von Prof. Dr. Mohnke
- Mathematik 10, Appelhans, Westermann 1995

- Mathematik in der Sekundarstufe, Ausgabe 10B, Glatfeld, Metzler 1982
- Kurs Mathematik 10,1993 Verlag Diesterweg, Frankfurt a. M.
- Mathematik 10, Hahn/Dezewas, Westermann 1995
- Mathematik live: Mathematik für die Sekundarstufe 1, Böer, Klett 2009
- Mathematik entdecken, verstehen, anwenden; Hans Bock, Oldenbourg 1996
- Mathematik 10. Schuljahr, Breidenbach, Westermann 1982
- http://www.schule-bw.de/unterricht/faecher/mathematik/3material/sek1/

- http://didaktik.mathematik.hu-berlin.de/files/did_elemgeo-skript.pdf
- http://www.schule-studium.de/Mathe/Beweis-des-Sinussatzes.html
- https://www.mathematik.de/ger/fragenantworten/erstehilfe/trigonometrie/sinuscosinussatz/sinuscosinussatz.html
- http://www.arndt-bruenner.de/mathe/10/kosinussatz.htm
- http://www.lernzentrum.de/lernhilfen/trigonometrie/kosinussatz.htm
- http://www.krauseplonka.de/math_onl/ma1/trig_fkt/cosinussatz.htm
- http://matheguru.com/algebra/83-beweis-fuer-den-kosinussatz.html

- http://de.wikipedia.org/wiki/Satz_des_Pythagoras
- http://de.serlo.org/entity/view/2057
- http://de.wikipedia.org/wiki/Sinussatz
- http://www.arndt-bruenner.de/mathe/10/sinussatz.htm
- Manfred Leppig (Hrsg.): *Lernstufen Mathematik.* 1. Auflage, 4. Druck. Girardet, Essen 1981, ISBN 3-7736-2005-5, S. 189–190.
- H. S. M. Coxeter, S. L. Greitzer: *Geometry Revisited*. Washington, DC:
- http://www.frustfrei-lernen.de/mathematik/sinussatz.htmlMath. Assoc. Amer., S. 1-3
- http://www.mathe-online.at/mathint/trig/i.html#http://de.wikipedia.org/wiki/Radiant_(Einheit)