Grenzwerte anschaulich

Wege zum Ableitungsbegriff

Didaktik der
Sekundarstufe II
12.5.2016

Andrea Hoffkamp

Der Grenzwertbegriff in der Schule

„Grenzwerte auf der Grundlage eines **propädeutischen Grenzwertbegriffs** insbesondere bei der Bestimmung von Ableitung und Integral nutzen.“

(KMK-Bildungsstandards für die Allgemeine Hochschulreife, 2012)

Aus dem Unterricht eines GK Mathematik, Anfang Klasse 11

```
L: Sie haben in Klasse 10 die Begriffe „durchschnittliche
   Änderungsrate“ und „momentane Änderungsrate“ kennengelernt.
   Können sie diese Begriffe nochmals erklären – gerne mit
   Bildern.
S1: Bei der „durchschnittlichen Änderung“ bildet man Sekanten
    und schaut sich ein Steigungsdreieck an.
(Die Situation wird gezeichnet.)

Fragend-entwickelnd kommt man darauf, dass man sich dieser nähern
könnte, indem man die Intervalle auf der x-Achse verkleinert.

L: Wie steht es nun mit der momentanen Änderungsrate? Kann man diese
   auch bestimmen?
S2: Die kann es nicht geben, das muss immer ungenau sein!
   (Alle Schüler stimmen dem zu.)
```

(Dialog nur sinngemäß wiedergegeben)

Matroids Matheplanet

SchuBi
Senior
Dabei seit: 13.03.2003
Mitteilungen: 19294
Aus: NRW

Beitrag No.47, eingetragen 2008-02-11 17:06

@ luke!
Das war einmal Ich darf meinen Schülern in NRW keinen richtigen **Grenzwertbegriff** mehr vermitteln, wenn ich mich an die Richtlinien halte. Es wird nur noch intuitiv ein Grenzwert berechnet.
Stetigkeit von Funktionen ist ebenfalls aus dem Stoffkanon gefallen.

Analysis im Grundkurs und in 10

Differential- und Integralrechnung

„ohne" Grenzwerte

Vorwort

Es folgt kein Nachweis für die mathematische Korrektheit des Verzichts auf die Behandlung von Grenzwerten im Grundkurs.

Vielmehr wird ein Vorschlag unterbreitet, wie unter den gegebenen Bedingungen verfahren werden könnte. Die dadurch entstehenden Schwachstellen werden auch schnell sichtbar.

Deshalb wird vorgeschlagen, Grenzwertbegriff und Unendlichkeit ausführlicher bei der Behandlung der Exponentialfunktionen zu diskutieren. In diesem Fall wäre der Begriff des unendlich Kleinen wohl ganz gut auf die Größe eines Punktes zu beziehen.

Vortrag von Christine Meyer,

gehalten am 24.09.2010

Berliner-
Brandenburger
MNU-Kongress
2010

http://www.mnu-berlin.de/material.html

Stoffdidaktische Perspektive
Aspekte des Ableitungsbegriffs

- Lokale Änderungsrate
- Lokale lineare Approximation

Schulbücher/Lehrpläne!

- Tangentensteigung (geometrisch)
- lokal optimale lineare Approximation

➡ Reihenfolge? Gestaltung der Lernumgebungen? Fachlicher Aufbau? Erweiterbarkeit?

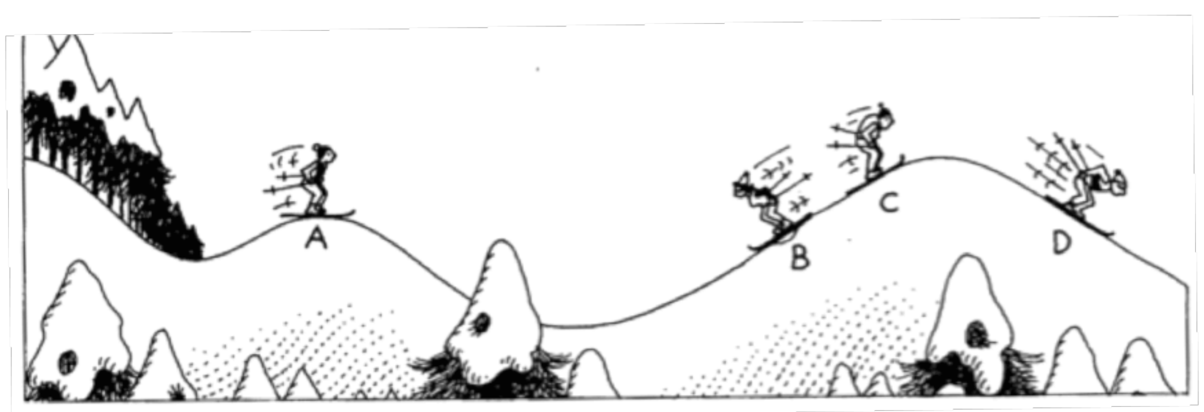
Eine erste Möglichkeit im Unterricht

Mittlere Änderungsraten

↓

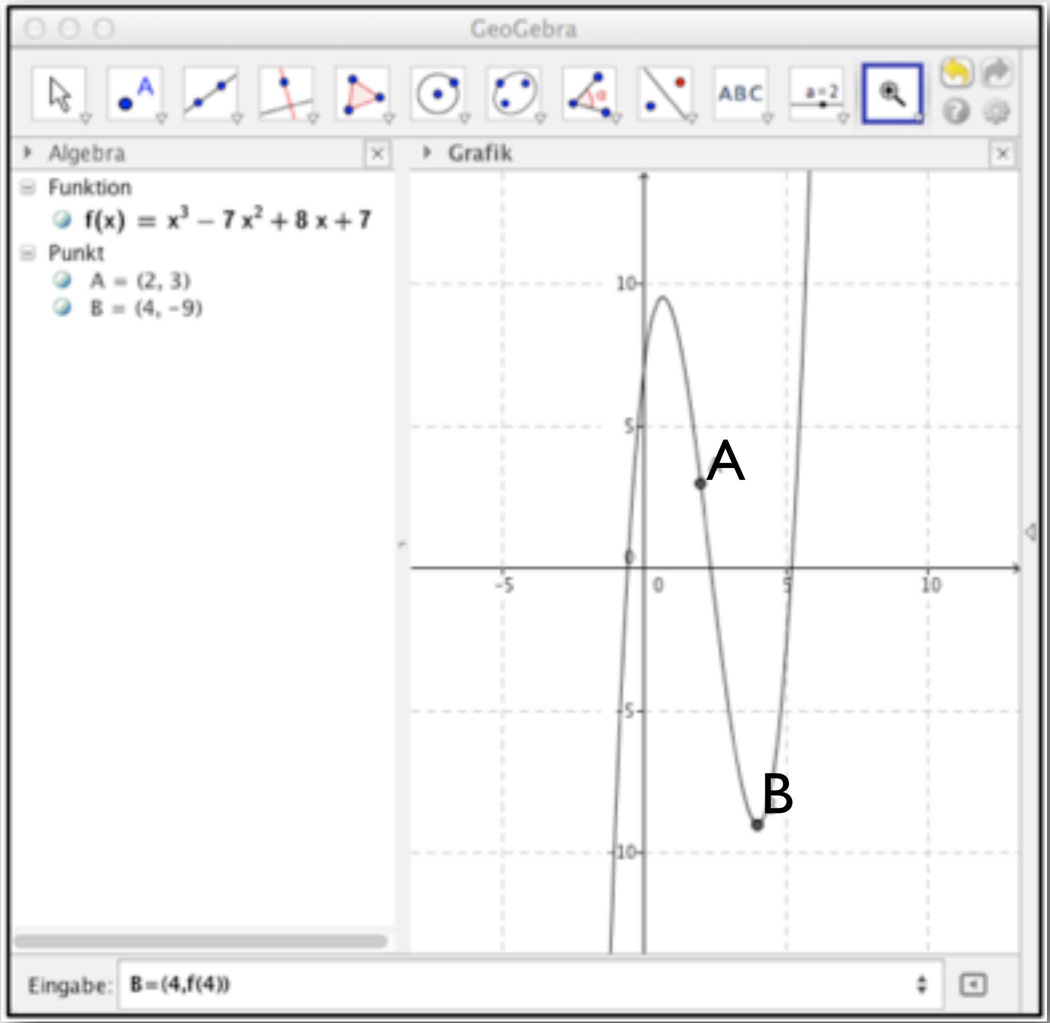
Lokale Linearität

Anknüpfung an Sek I

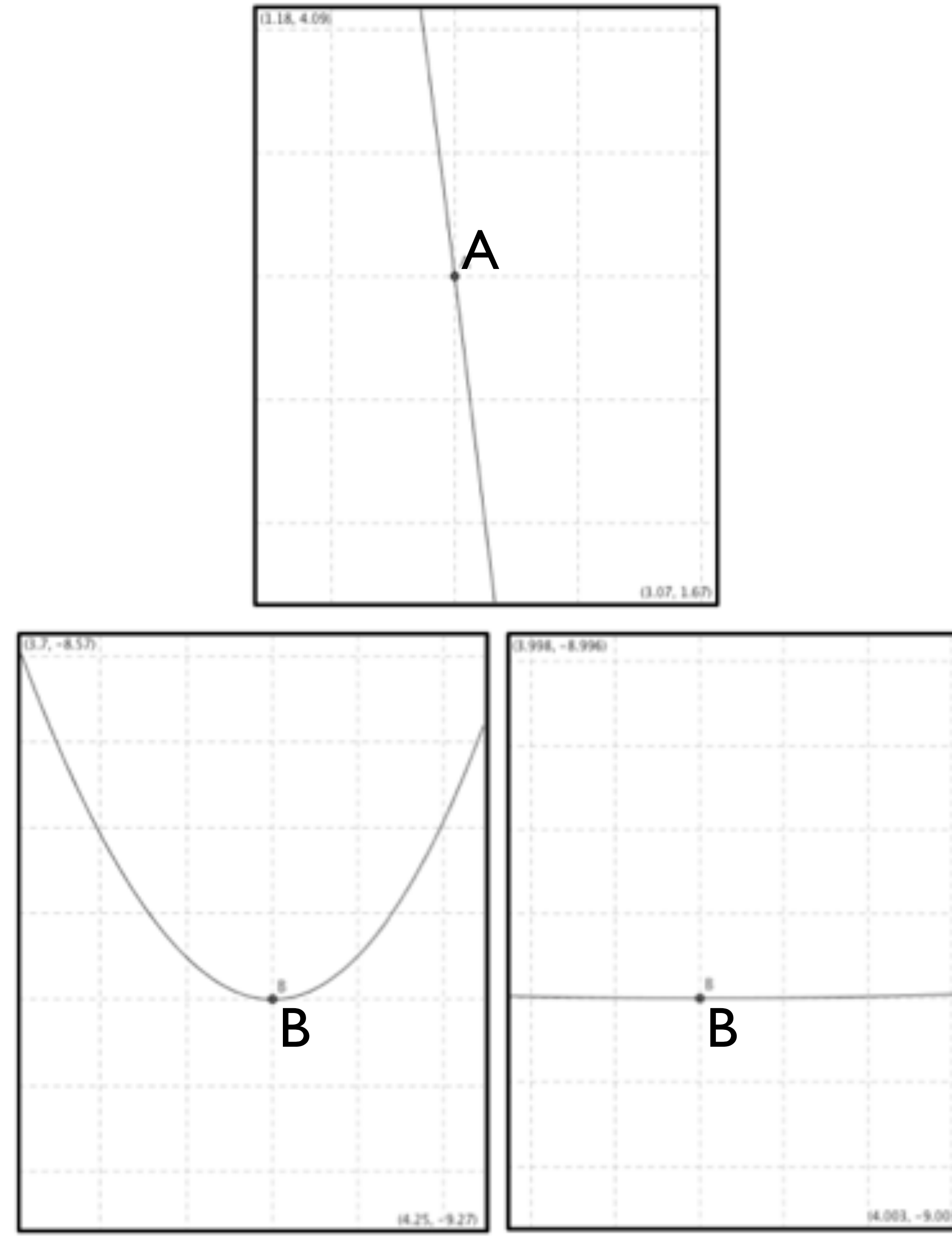


Skier als Metapher für *Tangente an einen Punkt*

Abbildungen aus Dolan, S. et al. (1990): Introductory Calculus – The School Mathematics Project, Cambridge University Press.



Zoom



Zwischenergebnis: Wenn ein Funktionsgraph beim Hineinzoomen an einen Punkt „schließlich wie eine Gerade“ aussieht, dann ist die Funktion *lokal linear an diesem Punkt.*

Hineinzoomen als Metapher für *Grenzwertbildung*

Aufgabe 4: Untersuchen Sie die Graphen der folgenden Funktionen auf *lokale Linearität*. Notieren Sie Ihre Ergebnisse.

a. $f(x) = \sqrt{x^2}$ **b.** $g(x) = 100x^2$ **c.** $h(x) = |x^2 - 4|$ **d.** $s(x) = \sin x + \frac{1}{50}\sin(100x)$

e. $k(x) = x^2 - 4{,}3x - 0{,}1|x - 2| + 1{,}6$

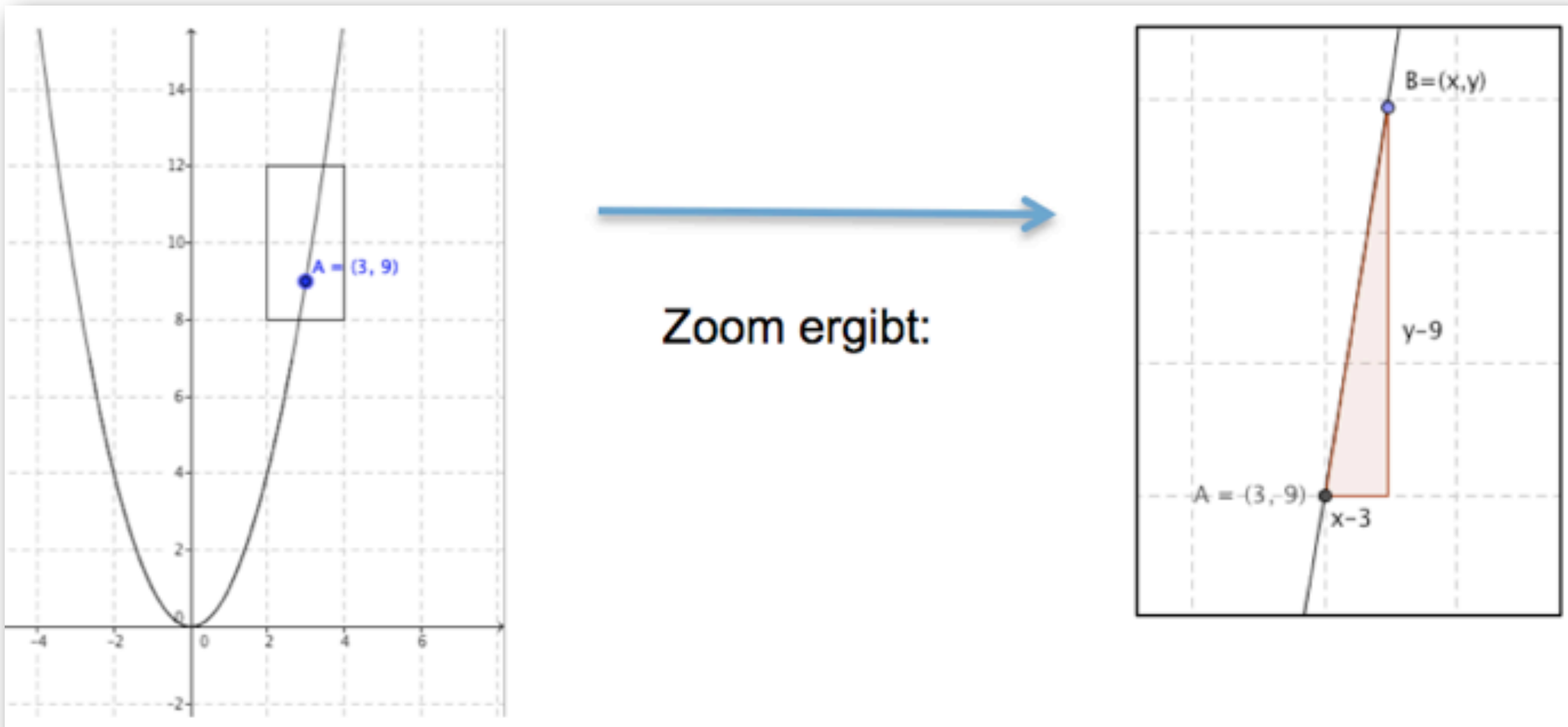
„Gerade-Werden" beim Hineinzoomen als Metapher für *Differenzierbarkeit*

Differenzierbarkeit versus Nicht-Differenzierbarkeit

Betonung des Unterscheidungs-interesses des Ableitungsbegriffes

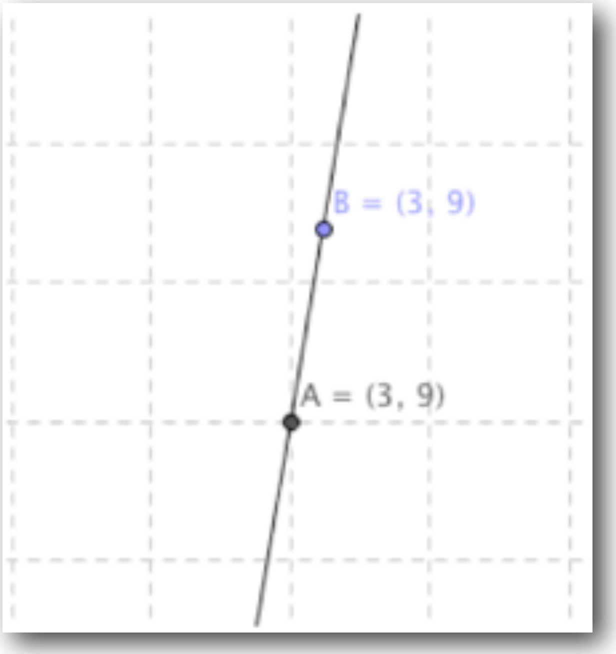
↓

Numerische Approximation der Steigung



Steigung in A=(3,9) mit GeoGebra bestimmen: Blende die Koordinaten von B ein. Zoome hinein, schiebe B näher an A heran und berechne die Steigung mit Hilfe des Differenzenquotienten. Wiederhole diesen Schritt.

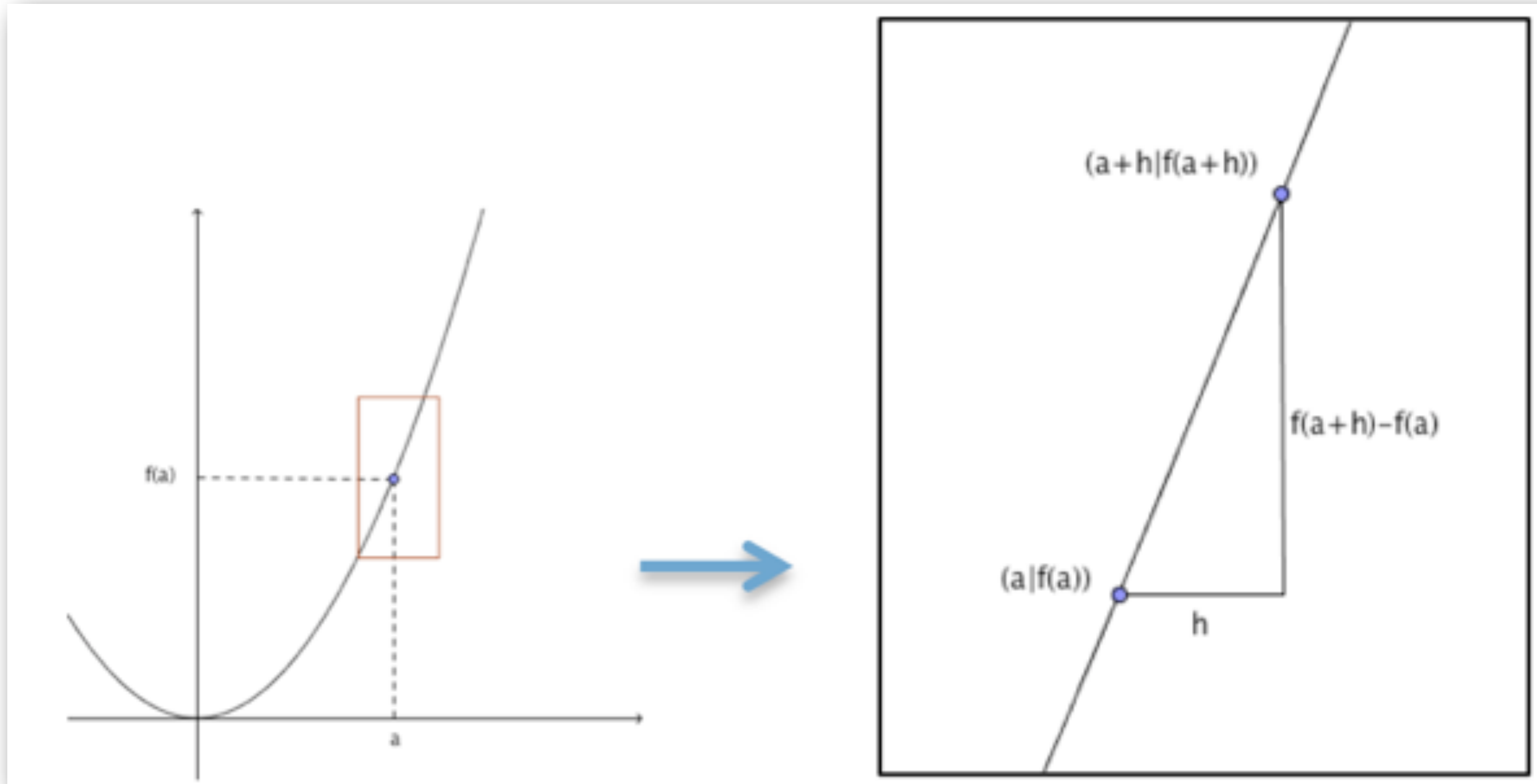
Schwierigkeiten?



Erhöhung der Anzahl der Nachkommastellen als Metapher für *Approximation*

Wie viele Nachkommastellen bräuchte man, um *beliebig tief* hineinzuzoomen?

Beliebig tiefes Hineinzoomen ist real nicht möglich, wohl aber in Gedanken....



Zusammenfassung:

Die Steigung im Punkt A heißt Ableitung der Funktion im Punkt A.
Man schreibt dafür $f'(3) =$ 6.

Die Steigung einer Funktion f in einem Punkt $(a|f(a))$ bezeichnet man mit $f'(a)$. Man kann sie ungefähr berechnen durch

$$f'(a) \approx \frac{f(a+h)-f(a)}{h}.$$

Dabei muss h, die Differenz der x-Werte, genügend klein gewählt werden.

(Hoffkamp: Hineingezoomt ... Mit dem Funktionenmikroskop zum Ableitungsbegriff, mathematik lehren 187, 2014 anknüpfend an A. Kirsch: Ein Vorschlag zur visuellen Vermittlung einer Grundvorstellung vom Ableitungsbegriff, 1979)