# Die fünfte Grundrechenart – kein Aprilscherz!

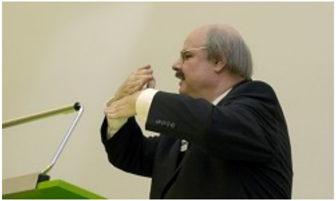
Jürg Kramer

Institut für Mathematik
Humboldt-Universität zu Berlin

1. April 2011

# Erinnerungen

Vorlesung Analysis III, nach dem Skript von Urs Kirchgraber



# Erinnerungen

Mentor beim Wechsel von Zürich...

... nach Berlin

# Erinnerungen

## Sommerschulen in Valbella...

## ... und Blossin


# Erinnerungen

Gemeinsames Projekt zur Didaktik der Algebra:

Von der strukturierten Arithmetik zur Unlösbarkeit der allgemeinen Gleichung fünften Grades durch Radikale

## III.

MÉMOIRE SUR LES ÉQUATIONS ALGÉBRIQUES, OU L'ON DÉMONTRE L'IMPOSSIBILITÉ DE LA RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION GÉNÉRALE DU CINQUIÈME DEGRÉ.

Brochure imprimée chez Grøndahl, Christiania 1824.

Les géomètres se sont beaucoup occupés de la résolution générale des équations algébriques, et plusieurs d'entre eux ont cherché à en prouver l'impossibilité; mais si je ne me trompe pas, on n'y a pas réussi jusqu'à présent. J'ose donc espérer que les géomètres recevront avec bienveillance ce mémoire qui a pour but de remplir cette lacune dans la théorie des équations algébriques.

Soit

$$y^5 - ay^4 + by^3 - cy^2 + dy - e = 0$$

l'équation générale du cinquième degré, et supposons qu'elle soit résoluble algébriquement, c'est-à-dire qu'on puisse exprimer $y$ par une fonction des quantités $a$, $b$, $c$, $d$ et $e$, formée par des radicaux. Il est clair qu'on peut dans ce cas mettre $y$ sous la forme:

$$y = p + p_1 R^{\frac{1}{m}} + p_2 R^{\frac{2}{m}} + \ldots + p_{m-1} R^{\frac{m-1}{m}},$$

$m$ étant un nombre premier et $R$, $p$, $p_1$, $p_2$ etc. des fonctions de la même forme que $y$, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on parvienne à des fonctions rationnelles des quantités $a$, $b$, $c$, $d$ et $e$. On peut aussi supposer qu'il soit

# Die vier Grundrechenarten

## Anforderungen an eine fünfte Grundrechenart?

Analogie zum sechsten Sinn, als außer- bzw. übersinnliche Wahrnehmung...

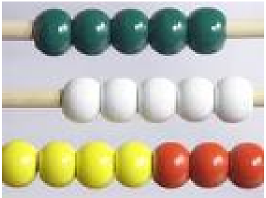
Es ergeben sich intuitiv die Anforderungen:

- Beinhaltet die vier bestehenden Grundrechenarten.
- Gehört einer übergeordneten Hierarchie an.

## Wikipedia

Eine Grundrechenart ist eine der vier mathematischen Operatoren:

- Addition $+$
- Subtraktion $-$
- Multiplikation $\cdot$
- Division $:$



Zwischen ihnen gilt die Rangfolge Punktrechnung vor Strichrechnung.

## Wikipedia, Fortsetzung

Bedeutung der Grundrechenarten

Die Beherrschung der Grundrechenarten gehört zu den während der Schulzeit von jedem Schüler zu erwerbenden Grundfertigkeiten Lesen, Schreiben und Rechnen. Die Grundrechenarten werden im Mathematik-Unterricht der Grundschule während der ersten vier Schuljahre behandelt und eingeübt, auch in Form von Textaufgaben (Sachaufgaben). Sie werden beim Übergang in eine weiterführende Schule (Hauptschule, Realschule, Gymnasium) vorausgesetzt und sind normalerweise Gegenstand von Aufnahmeprüfungen. Die vier Grundrechenarten werden in der Theorie vom mathematischen Körper auf eine formelle Grundlage gestellt. Viele mathematische Probleme lassen sich auf die Grundrechenarten zurückführen.

# Die vier Grundrechenarten



**Natürliche Zahlen $\mathbb{N}$**
(mit Hilfe der Peano-Axiome $\rightarrow$ Ordinalzahlaspekt)

- Die Menge $\mathbb{N}$ ist nicht leer; es gibt ein ausgezeichnetes Element $0 \in \mathbb{N}$.
- Zu jedem Element $n \in \mathbb{N}$ gibt es ein wohlbestimmtes Element $n^* \in \mathbb{N}$ mit $n^* \neq n$.
- Es gibt kein Element $n \in \mathbb{N}$, für dessen Nachfolger $n^*$ die Beziehung $n^* = 0$ gilt.
- Besteht für zwei natürliche Zahlen $n_1, n_2$ die Gleichheit $n_1^* = n_2^*$, so folgt daraus $n_1 = n_2$.
- *Vollständige Induktion:* Ist $T$ eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass $0 \in T$ gilt und dass mit $t \in T$ auch $t^* \in T$ ist, so muss $T = \mathbb{N}$ gelten.

# Die vier Grundrechenarten

**Induktive Definition der Addition auf $\mathbb{N}$**

Für $m, n \in \mathbb{N}$ setzt man:

$$n + 0 := n,$$
$$n + m^* := (n + m)^*.$$

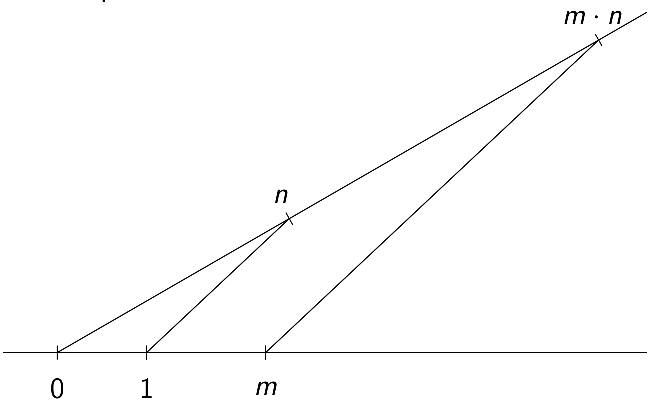
**Induktive Definition der Multiplikation auf $\mathbb{N}$**

Für $m, n \in \mathbb{N}$ setzt man:

$$n \cdot 0 := 0,$$
$$n \cdot m^* := (n \cdot m) + n.$$

## Geometrische Interpretation

- z. B. Multiplikation:



**Zahlbereichserweiterungen**

- Erweiterung von $\mathbb{N}$ auf $\mathbb{Z}$ (ganze Zahlen)
  $\rightarrow$ uneingeschränkte Ausführung der Subtraktion
- Erweiterung von $\mathbb{Z}$ auf $\mathbb{Q}$ (rationale Zahlen)
  $\rightarrow$ uneingeschränkte Ausführung der Division (bis auf die 0)
- Erweiterung von $\mathbb{Q}$ auf $\mathbb{R}$ (reelle Zahlen) mit uneingeschränkter $+, -, \cdot, :$
- Erweiterung von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$ (komplexe Zahlen) mit uneingeschränkter $+, -, \cdot, :$

# Die vier Grundrechenarten



**Abschließende Bemerkungen**

- Addition $+$ ist assoziativ und kommutativ.
- Multiplikation $\cdot$ ist assoziativ und kommutativ.
- Es gelten die Distributivgesetze.
- Zahlbereichserweiterung auf die nicht-kommutativen Hamiltonschen Quaternionen $\mathbb{H}$.
- Zahlbereichserweiterung auf die nicht-kommutativen und nicht-assoziativen Cayleyschen Octionen $\mathbb{O}$.

### Abgeleitete strukturelle Begriffsbildungen

- Begriff der (kommutativen) Halbgruppe:
  Nicht-leere Menge $H$ mit assoziativer Verknüpfung $\circ$,
  z.B. $(H, \circ) = (\mathbb{N}, +)$.
- Begriff der (kommutativen) Gruppe:
  Halbgruppe $(G, \circ)$ mit neutralem und inversen Elementen,
  z.B. $(G, \circ) = (\mathbb{Z}, +)$.
- Begriff des Körpers:
  Nicht-leere Menge $K$ mit zwei assoziativen, kommutativen Verknüpfungen $+$ und $\cdot$, so dass $(K, +)$ und $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ Gruppen sind,
  z.B. $(K, +, \cdot) = (\mathbb{Q}, +, \cdot)$.

## Geometrische Interpretation: Kreis

Betrachte die Abbildung

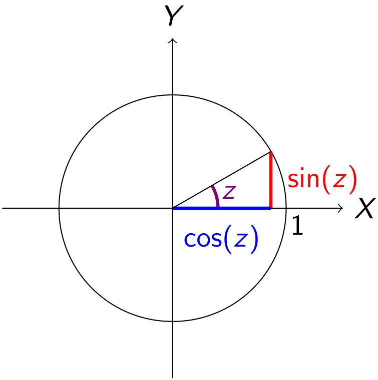
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

gegeben durch

$$z \mapsto \big(\cos(z), \sin(z)\big).$$

Parametrisierung des Kreises:

$$X^2 + Y^2 = 1.$$



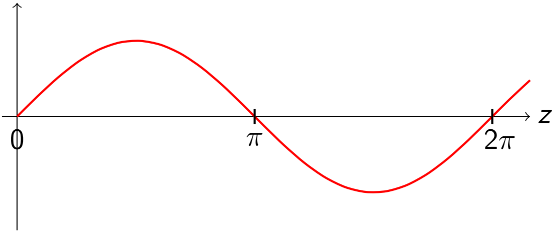
# Auf der Suche nach der fünften Grundrechenart



Kodierung der Addition von $\mathbb{R}$ durch die Additionstheoreme

$$\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w),$$
$$\sin(z+w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w).$$

Hilfsmittel: Periodische reelle Funktionen!



**Geometrische Interpretation: Elliptische Kurve**

Betrachte die Abbildung

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}^2,$$

gegeben durch

$$z \mapsto \big(\wp(z), \wp'(z)\big)$$

mit der Weierstraß'schen $\wp$-Funktion (elliptische Funktion)

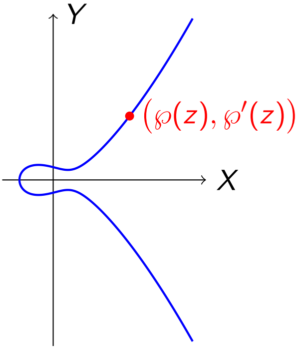
$$\wp(z) := \sum_{\substack{m,n \in \mathbb{Z} \\ m,n \neq 0}} \left( \frac{1}{(z - (m\,\omega_1 + n\,\omega_2))^2} - \frac{1}{(m\,\omega_1 + n\,\omega_2)^2} \right),$$

wobei $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C}$ reell linear unabhängig sind.

Parametrisierung einer elliptischen Kurve:

$$Y^2 = 4X^3 - g_2X - g_3$$

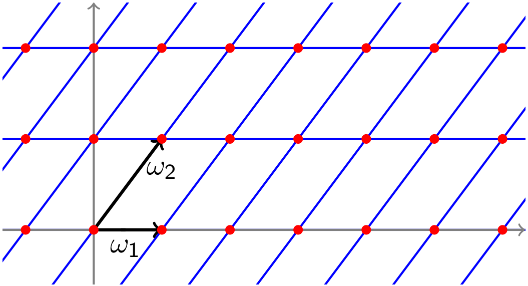
mit $g_2, g_3 \in \mathbb{C}$.



Kodierung der Addition von $\mathbb{C}$ durch das Additionstheorem

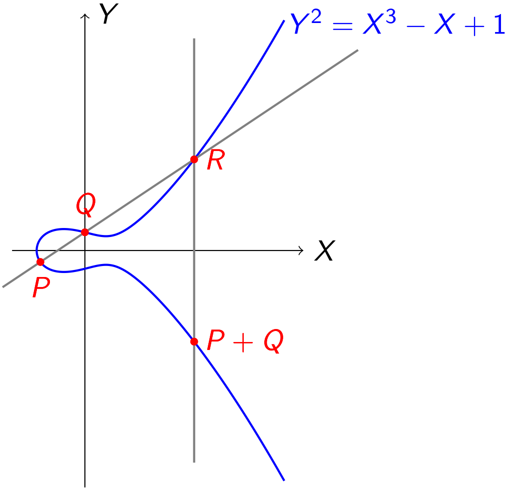
$$\wp(z+w) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(z)-\wp'(w)}{\wp(z)-\wp(w)}\right)^2 - \wp(z) - \wp(w).$$

Hilfsmittel: Doppelt-periodische komplexe Funktionen!




Gitter: $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$.

## Geometrische Darstellung des Additionstheorems

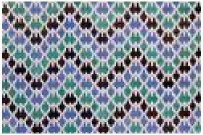


## Euklidische Pflasterungen

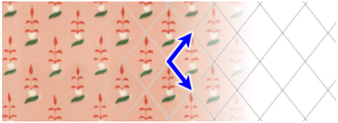
Eine regelmäßige Pflasterung der euklidischen Ebene $\mathbb{E}$ ent-
entsteht, indem man $\mathbb{E}$ mit Hilfe von Verschiebungen, Drehungen und Spiegelungen eines „Pflastersteins“ lückenlos überdeckt.

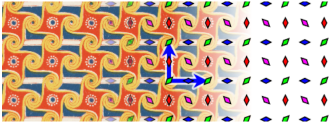
# Regelmäßige Pflasterungen

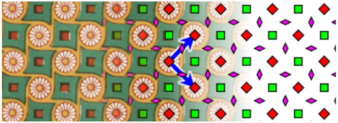
## Beispiele regelmäßiger Pflasterungen aus der Alhambra

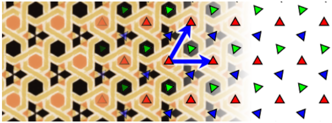


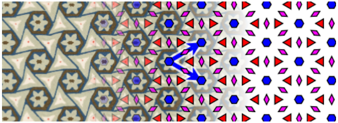
## Klassifikation regelmäßiger Pflasterungen (ohne Spiegelungen)











**Beweisidee (im orientierungserhaltenden Fall)**

- Betrachte die Kongruenzgruppe der orientierungserhaltenden, euklidischen Bewegungen, d.h. die Isometriegruppe $\mathrm{Iso}^+(\mathbb{E})$ der euklidischen Ebene $\mathbb{E}$:

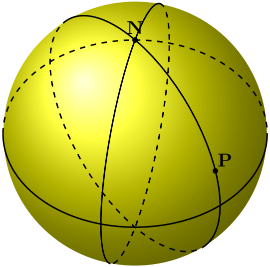
$$\mathrm{Iso}^+(\mathbb{E}) = \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \ltimes \mathbb{R}^2.$$

- Klassifiziere die entsprechenden, diskreten Untergruppen $\Gamma$ der Isometriegruppe $\mathrm{Iso}^+(\mathbb{E})$.
- Es ergeben sich die oben gezeigten fünf Fälle.

## Sphärische Pflasterungen

Der sphärischen Geometrie liegt die 2-dimensionale Sphäre $\mathbb{S}$ zugrunde.

Die Geraden der sphärischen Geometrie sind die Großkreise auf $\mathbb{S}$.



# Regelmäßige Pflasterungen

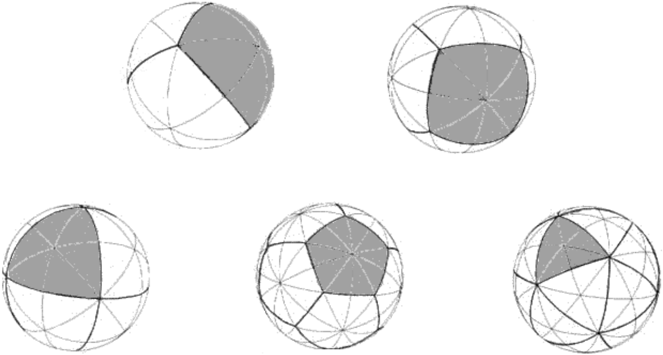


Eine regelmäßige Pflasterung der Sphäre $\mathbb{S} \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ entsteht, indem man $\mathbb{S}$ mit einem „Pflasterstein" und dessen Translaten, die mit Hilfe der Isometrien der sphärischen Geometrie gewonnen werden, lückenlos überdeckt.

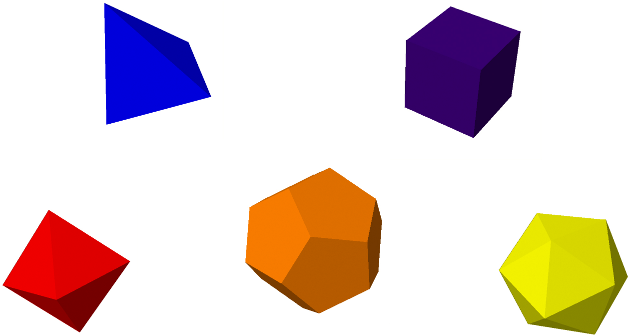
Zur Klassifikation der regelmäßigen sphärischen Pflasterungen gilt es die diskreten Untergruppen $\Gamma$ der Isometriegruppe $\mathrm{Iso}(\mathbb{S}) \cong \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ zu finden.

# Regelmäßige Pflasterungen

## Klassifikation regelmäßiger sphärischer Pflasterungen



## Zusammenhang mit platonischen Körpern



## Invariante Funktionen

Beispiel: Pflasterung gegeben durch das Ikosaeder

- Die Symmetriegruppe des Ikosaeders entspricht einer Gruppe $\Gamma \subset \mathrm{PGL}_2(\mathbb{C})$ der Ordnung 60; es ist $\Gamma \cong A_5$.
- Betrachte die Überlagerung vom Grad 60
  $q : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{C})/\Gamma \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$.
- $u = q(z) = \dfrac{P(z_1, z_2)}{Q(z_1, z_2)} \qquad (z = (z_1 : z_2))$,
  wobei $P$, $Q$ $\Gamma$-invariante, homogene Polynome vom Grad 60 sind.
- Kleinsche Ikosaedergleichung:

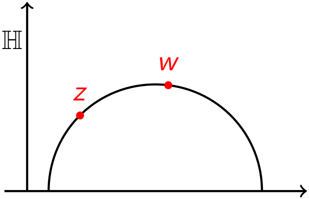
$$\left((z^{20}+1) - 228(z^{15}-z^5) + 494z^{10}\right)^3 + 1728uz^5(z^{10}+11z^5-1)^5 = 0.$$

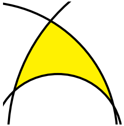
## Hyperbolische Pflasterungen

Der hyperbolischen Geometrie liegt die obere Halbebene

$$\mathbb{H} := \{z = x + iy \in \mathbb{C} \,|\, y > 0\}$$

zugrunde. Die Geraden der hyperbolischen Geometrie sind Halbkreise, die senkrecht auf der reellen Achse stehen.



$\alpha + \beta + \gamma < 180°$

# Regelmäßige Pflasterungen



Eine regelmäßige Pflasterung der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ entsteht, indem man $\mathbb{H}$ mit einem „Pflasterstein" und dessen Translaten, die mit Hilfe der Isometrien der hyperbolischen Geometrie gewonnen werden, lückenlos überdeckt.

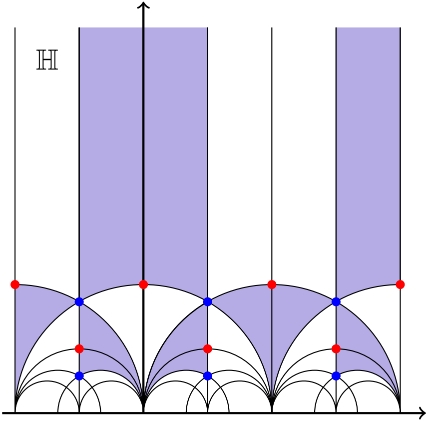
Zur Klassifikation gilt es die entsprechenen diskreten Untergruppen $\Gamma$ der Isometriegruppe $\mathrm{Iso}(\mathbb{H}) \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ zu finden.

Eine solche Isometrie ist gegeben durch eine gebrochenlineare Transformation

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}).$$

**Beispiel einer regelmäßigen hyperbolischen Pflasterung:**

$\Gamma = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$



### Invariante Funktionen

- $f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = f(z) \quad \text{für alle} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma.$$

- Variante: Betrachte die Ableitung von $f$

$$f'\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)(cz+d)^{-2} = f'(z) \quad \text{für alle} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma.$$

# Was ist nun die fünfte Grundrechenart ???

Was ist nun die fünfte Grundrechenart ???

**MODULFORMEN !!!**

**Was sind Modulformen?**

Eine Modulform vom Gewicht $k$ zu $\Gamma$ ist eine Funktion $f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)(cz+d)^{-k} = f(z) \quad \text{für alle } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma.$$

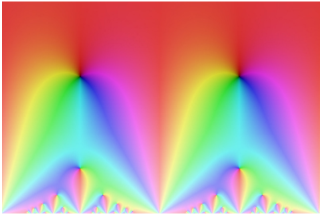
Ist insbesondere $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \in \Gamma$, so ist $f$ 1-periodisch, d.h. $f(z+1) = f(z)$, und es besteht die Fourierentwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, e^{2\pi i n z} \, .$$

**Beispiel: Eisensteinreihe**

$$E_k(z) = \sum_{c,d \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(cz+d)^k}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, e^{2\pi i n z}$$



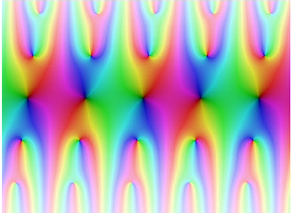
mit

$$a_n = \sum_{d \text{ teilt } n} d^{k-1}$$

Dies ist eine Modulform vom Gewicht $k$ zu $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$.

**Beispiel: Thetareihe**

$$\vartheta(z) = \left( \sum_{m=0}^{\infty} e^{2\pi i m^2 z} \right)^4 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \, e^{2\pi i n z}$$



mit

$$a_n = \sharp\{ m_1, m_2, m_3, m_4 \in \mathbb{Z} \mid m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 = n \}$$

Dies ist eine Modulform vom Gewicht 2 zu $\Gamma_0(4) \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z})$.

### Zitat von Simon Singh

Modulformen gehören zu den fremdartigsten und wunderlichsten Gegenständen der Mathematik. Diese höchst esoterische Beschäftigung zählte der Zahlentheoretiker Martin Eichler in diesem Jahrhundert dennoch zu den fünf Grundoperationen: Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und Modulformen. Die meisten Mathematiker würden sich als Meister in den ersten vier Rechenarten betrachten, doch die fünfte finden sie immer noch etwas verwirrend. Die wesentliche Eigenschaft der Modulformen ist ihre ungewöhnlich hohe Symmetrie...

**Martin Eichler**

(1912 – 1992)

Warum sollen Modulformen die fünfte Grundrechenart konstituieren?

# Fünfte Grundrechenart

**Modulformen müssten dazu die einleitend genannten Anorderungen an eine fünfte Grundrechenart erfüllen!**

Das heisst insbesondere: mit Hilfe von Modulformen können

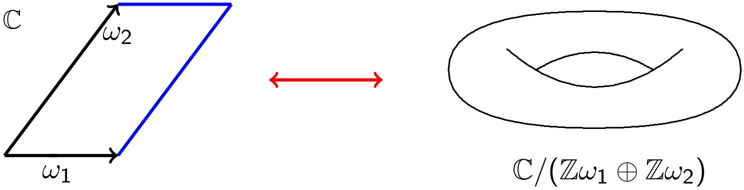
- die invarianten Funktionen der euklidischen Geometrie, also die elliptischen Funktionen ($\rightarrow$ Weierstraß'sche $\wp$-Funktion), berechnet werden;
- die invarianten Funktionen der sphärischen Geometrie, also z.B. die Kleinsche Ikosaedergleichung, berechnet werden.

# Fünfte Grundrechenart

**Exemplarisch: Zusammenhang zwischen euklidischer und hyperbolischer Welt.**

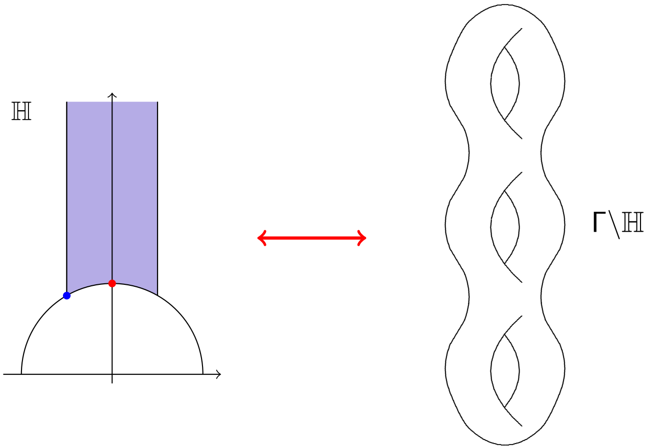
**Exemplarisch: Zusammenhang zwischen euklidischer und hyperbolischer Welt.**

Geometrische Deutung des euklidischen Pflastersteins, d.h. des Gitters $\Lambda = \mathbb{Z}\omega_1 \oplus \mathbb{Z}\omega_2$, als Torus:

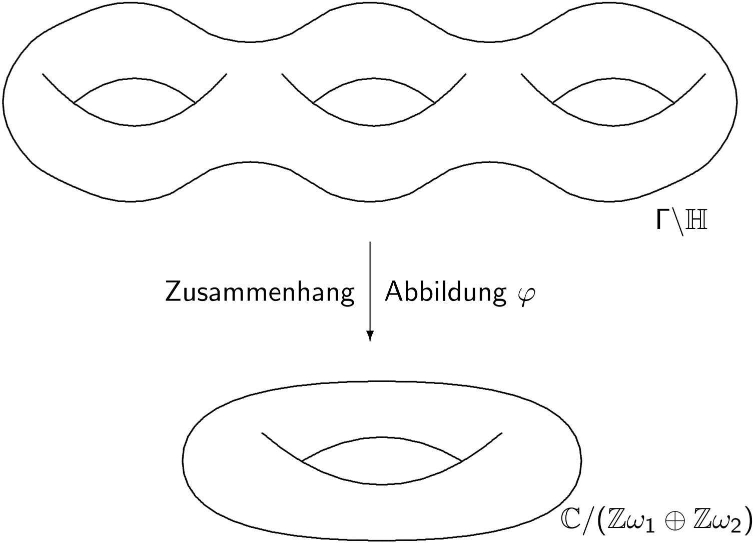


# Fünfte Grundrechenart

Geometrische Deutung des hyperbolischen Pflastersteins, d.h. der diskreten Untergruppe $\Gamma \subset \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$, als geschlossene, orientierte Fläche:



# Fünfte Grundrechenart



# Fünfte Grundrechenart

Ein solcher Zusammenhang zwischen euklidischer und hyperbolischer Welt besteht in der Tat.

Dies entspricht der Gültigkeit der Shimura-Taniyama-Vermutung.

Bewiesen im Jahr 1995 durch Andrew Wiles und Richard Taylor...

# Fünfte Grundrechenart

... mit dem „Nebenergebnis“ eines Beweises der Fermat-Vermutung:

Es gibt keine ganzen Zahlen $a, b, c \neq 0$ mit

$$a^n + b^n = c^n \qquad (n > 2).$$

# Alles Gute für Deinen neuen Lebensabschnitt, Urs!