Möbiustransformationen

Teilnehmer:

Tillmann Berg (Heinrich-Hertz-Oberschule)
Felix Elias Feiten (Herder-Oberschule)
Michael Fiedler (Heinrich-Hertz-Oberschule)
Björn Kahlert (Andreas-Oberschule)
Leonhard Kern (Herder-Oberschule)
Patrick Lünnemann (Herder-Oberschule)

Gruppenleiter:

Ulrich Kortenkamp (Technische Universität Berlin)

Zunächst wurde aus den Grundoperationen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division auf den komplexen Zahlen die allgemeine Form einer Möbiustransformation hergeleitet und die geometrischen Eigenschaften in der Gaußschen Zahlenebene, auf der Riemannschen Zahlenkugel und der komplexen projektiven Geraden untersucht. In weiteren Schritten wurden dann die notwendigen Programme in PostScript implementiert, um Möbiustransformationen zu visualisieren. Mit Hilfe dieser Programme und mit algebraischen Methoden wurden die verschiedenen Typen von Möbiustransformationen – loxodromisch, hyperbolisch, elliptisch und parabolisch – klassifiziert. Schließlich untersuchte die Schülergruppe dann die durch die Kombination von zwei Möbiustransformationen entstehenden freien Gruppen und visualisierte auch diese.

1 Einführung

Zielsetzung unserer Arbeit war es, alle grundlegenden Operationen auf komplexen Zahlen in einer Transformation zu vereinigen und diese so genannte Möbiustransformation grafisch auszugeben. Zu diesem Zweck haben wir uns in die stackorientierte Seitenbeschreibungssprache PostScript eingearbeitet. Als Orientierung hat uns das Buch „Indra's Pearls“ von Mumford, Series, Wright, gedient.

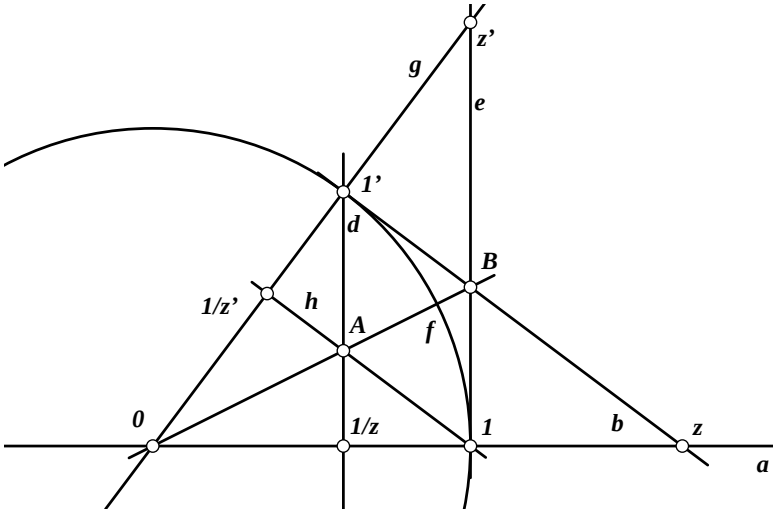

Abbildung 1: Zusammenhang zwischen Division und Inversion am Einheitskreis

2 Geometrische Deutung

Sowohl die komplexe Addition, Multiplikation, Division bzw. Inversion als auch Konjugation können mit Hilfe der Strahlensätze geometrisch dargestellt werden.

Bei der *Konjugation* handelt es sich um eine Spiegelung an der x-Achse.

Division auf den komplexen Zahlen lässt sich - wie sonst auch - als Multiplikation mit dem Kehrwert beschreiben. Um den Kehrwert einer komplexen Zahl z zu bilden, muss sie zuerst am Einheitskreis invertiert und dann konjugiert werden. Ein Beweis dieser Konstruktion (Bild 1) lässt sich mit geeigneter Anwendung der Strahlensätze führen:

- $\overline{01} = \overline{01'} = 1$
- $\frac{\overline{01}}{\overline{0\frac{1}{z'}}} = \frac{\overline{0z}}{\overline{01'}} \Rightarrow \frac{1}{\overline{0\frac{1}{z'}}} = \overline{0z}$
- $\overline{0\frac{1}{z}} = \overline{0\frac{1}{z'}} = \frac{1}{\overline{1z}} = \frac{1}{z}$

Da sowohl $\overline{1z'}$ als auch $\overline{1'z}$ Tangenten an den Einheitskreis sind, ist $\overline{1'B} = \overline{1B}$. Der dritte Punkt folgt demnach aus der Symmetrie des Bildes.

3 Riemannsche Zahlenkugel

Auf die Gauß'sche Zahlenebene wird auf den Ursprung eine Kugel gelegt. Ausgehend von dem Nordpol der Kugel kann eine Gerade durch jeden beliebigen Punkt der Ebene gezogen werden, wodurch jedem Punkt der Ebene eineindeutig

ein Punkt auf der Kugel zugeordnet wird. Ausgenommen von der Eineindeutigkeit ist der Nordpol, der selbst die Unendlichkeit abbildet. Eine Gerade wird auf der Kugel als Kreis durch den Nordpol abgebildet.

4 Möbiustransformation

Eine Möbiustransformation hat die Form $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ mit $a, b, c, d, z \in \mathbb{C}$. Eine weitere Vorraussetzung ist, dass $ad - bc \neq 0$, damit die Transformation invertierbar ist.

Satz 1 *Kreise werden von Möbiustransformationen auf Kreise abgebildet.*

Beweis 1

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{az+b}{cz+d} \\ &= \frac{acz+bc}{c^2z+cd} \\ &= \frac{acz+bc+ad-ad}{c(cz+d)} \\ &= \frac{a(cz+d)+bc-ad}{c(cz+d)} \\ &= \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{cz+d} \end{aligned}$$

Wie man sieht, setzt sich jede MT nur aus den Grundoperationen Addition (Verschiebung), Multiplikation (Drehstreckung) und Inversion zusammen. Diese bilden Kreise auf Kreise ab, also auch ihre Verknüpfung, q.e.d.

5 PostScript

PostScript ist eine stackorientierte Seitenbeschreibungssprache, die mathematische Funktionen zur Verfügung stellt und auch auf geeigneten Druckern interpretiert werden kann. Allerdings enthält diese Sprache nur den Datentyp *real*, wodurch die Rechengenauigkeit für manche Berechnungen ungenügend ist. Komplexe Zahlen haben wir durch ein Array zweier reeller Zahlen emuliert. Die Grundoperationen (*add, sub, mul, div...*) mussten von uns neu programmiert werden.

6 Verbesserung und Projektive Geometrie

Die Spirale in Bild 3 zeigt die komplexe Multiplikation mit der Zahl $e^{i*\varphi}$ (mit $\varphi = 72°$) haben wir verfeinert, indem wir die Wurzel aus dem Faktor gezogen haben.

```
/cmul {
    dup Im /i2 exch def
    Re /r2 exch def
    dup Im /i1 exch def
    Re /r1 exch def
    [
    r1 r2 mul i1 i2 mul neg add
    r1 i2 mul r2 i1 mul add
    ]
} def
```

Abbildung 2: Komplexe Multiplikation in PostScript

($\varphi = 36°$ bzw. $\varphi = 18°$) Das folgende Bild 4 zeigt eine Möbiustransformation, die die Spur vieler verschiedener Punkte abbildet.

Da dieses Bild noch fehlerbehaftet ist, wollten wir es analog zu der komplexen Multiplikation verfeinern. Man kann eine Möbiustransformation als Matrix der Form $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ darstellen. Wir haben folglich die Matrix B gesucht, für die gilt $B \cdot B = A$. Das Finden dieser Matrix durch das Lösen eines Gleichungssystems erwies sich als zu schwierig, also konstruierten wir eine Hilfsmatrix S und S^{-1}, die die Möbiustransformation von der komplexen Ebene auf die Riemannsche Zahlenkugel überträgt und dort ausführt. Dabei werden die beiden Fixpunkte der Spirale (0 und ∞) auf den Süd- bzw. Nordpol der Kugel projiziert. Dort kann man die gesuchte Matrix sehr einfach finden, denn die Transformation auf der Zahlenkugel ist $T(z) = kz$ oder als Transformationsmatrix ausgedrückt $T = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $k \in \mathbb{C}$. Gilt $A = STS^{-1}$, so sagt man, A ist konjugiert zu T.

7 Klassifikation von MT

Mit der gleichen Methode kann man die verschiedenen Möbiustransformationen klassifizieren.

- Loxodromische MT (Bild 5):

  $$|k| > 1 \text{ und } T(z) = kz.$$

  Es existieren zwei Fixpunkte, die spiralförmig verbunden werden.

- Hyperbolische MT (Bild 6):

  $$k \in \mathbb{R} \text{ und } T(z) = kz.$$

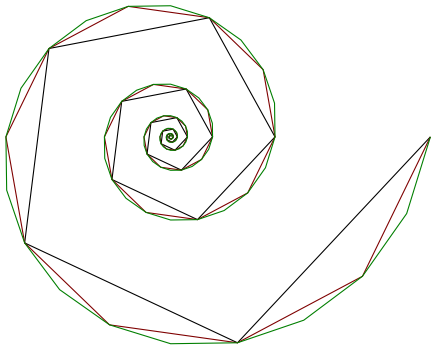

Abbildung 3: Komplexe Multiplikation $f(z) = kz$

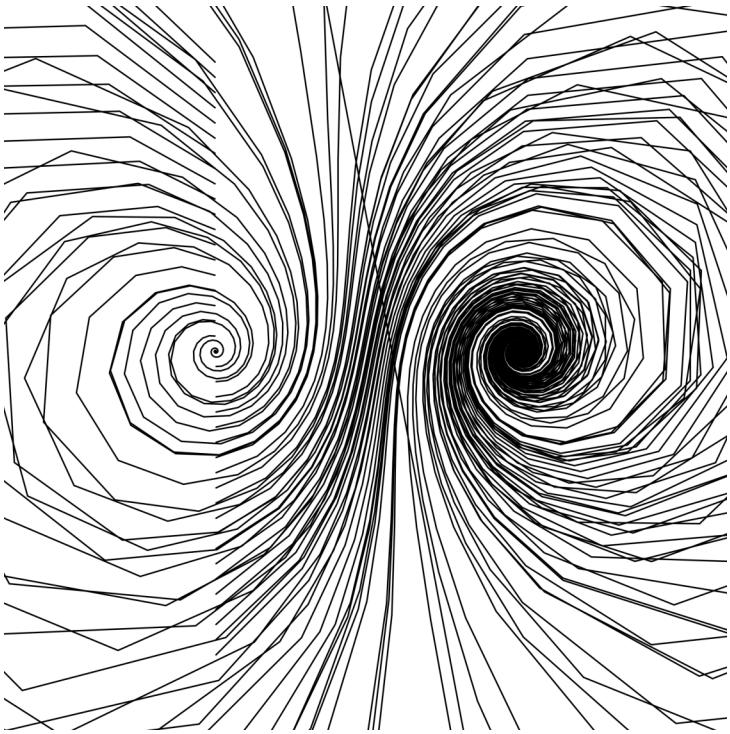

Abbildung 4: Falsch dargestellte Möbiustransformation

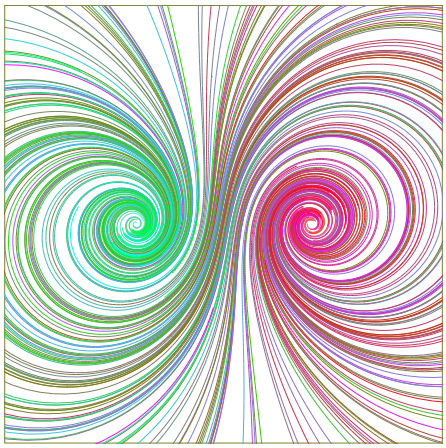

Abbildung 5: Loxodromische Möbiustransformation

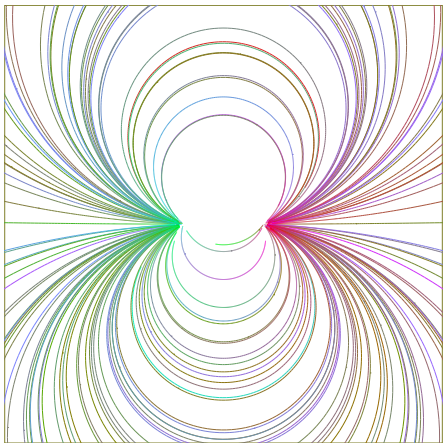

Abbildung 6: Hyperbolische Möbiustransformation

Es existieren zwei Fixpunkte, die über Kreisbögen verbunden werden.

- Elliptische MT (Bild 7):

$$|k| = 1 \text{ und } T(z) = kz.$$

Es existieren zwei Fixpunkte, die umkreist werden.

- Parabolische MT:

$$T(z) = z + a$$

Es existiert nur ein Fixpunkt. Wir konnten kein gutes Bild einer Parabolischen MT erstellen, da die Rechenungenauigkeiten in unserem PostScript-Programm zu Divisionen durch Null geführt haben.

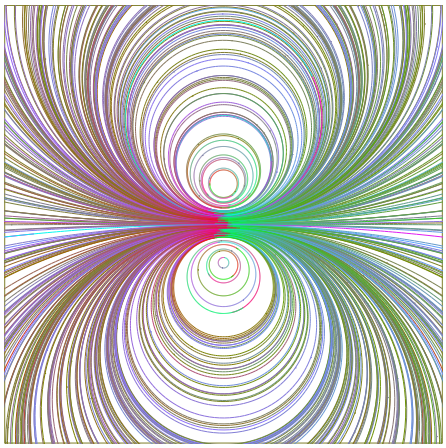

Abbildung 7: Elliptische Möbiustransformation

8 Was machen zwei Möbiustransformationen?

Zum Schluss haben wir uns überlegt, was passiert, wenn man zwei Möbiustransformationen nimmt, die vier Kreise paarweise aufeinander abbilden. Dazu mussten wir mit Hilfe von Mathematica die Formel bestimmen, die die Parameter a, b, c, d einer Möbiustransformation ergibt, wenn drei Punkte z_1, z_2, z_3 und ihre Bilder z_4, z_5, z_6 vorgegeben werden.

Mit Hilfe dieser Abbildungen haben wir dann das Bild 8 erstellt, welches die Ineinanderschachtelung der Kreise hervorragend demonstriert.

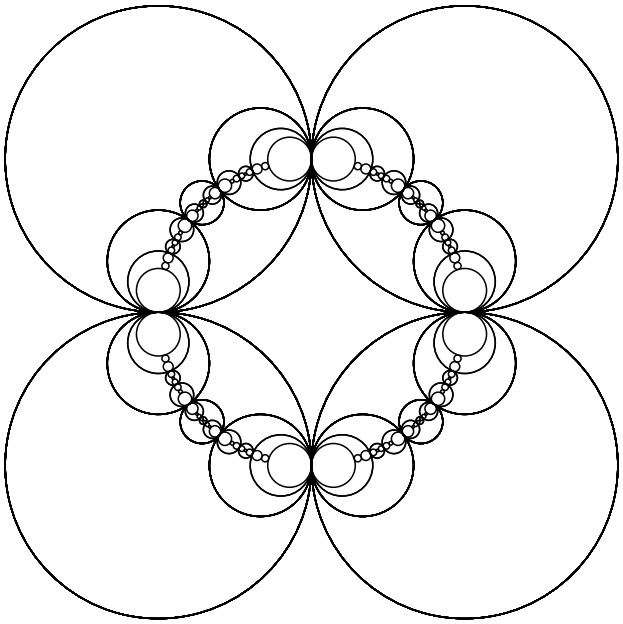

Abbildung 8: Zwei Möbiustransformationen, die Kreise ineinander abbilden (so genannte *kissing Schottky disks*)