Differentialgleichungen

Teilnehmer:
Philipp Bannasch (Heinrich-Hertz-Oberschule)
Levin Keller (Herder-Oberschule)
Philip Kende (Herder-Oberschule)
Carsten Kubbernuhs (Andreas-Oberschule)
Giang Nguyen (Herder-Oberschule)
Mathias Neumann (Andreas-Oberschule)

Gruppenleiter:
Jürgen Leiterer (Humboldt-Universität)

Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf wurde im Fall linearer Gleichungen mit stetigen Koeffizienten bewiesen (vollständig und mit elementaren Mitteln) und auf Fragen der Zinseszinsrechnung angewendet: Vergleich von stufenweiser Verzinsung und stetiger Verzinsung, Berechnung einer Finanzierung bei stetiger Verzinsung und stetiger Abzahlung.

1 Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf im linearen Fall

Sei I ein Intervall der reellen Achse (beschränkt oder unbeschränkt, abgeschlossen, halbabgeschlossen oder offen). Weiter seien zwei stetige Funktionen $a, b : I \to \mathbb{R}$ und ein Punkt $t_0 \in I$ gegeben. Dann gilt der folgende Satz, der einen Spezialfall des sehr viel allgemeineren Existenz- und Eindeutigkeitssatzes von Picard-Lindelöf für gewöhnliche Differentialgleichungen darstellt:

Satz 1.1 *Für jedes $\gamma_0 \in \mathbb{R}$ gibt es genau eine stetig differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ mit*

$$f'(t) = a(t)f(t) + b(t) \tag{1.1}$$

und

$$f(t_0) = \gamma_0. \tag{1.2}$$

Beweis. Wir setzen

$$h(t) := \exp \int_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau\,, \qquad t \in I. \tag{1.3}$$

Offenbar wird damit eine stetig differenzierbare Funktion $h : I \to \mathbb{R}$ definiert, welche die dazugehörige homogene Gleichung löst, d.h. für welche gilt:

$$h'(t) = a(t)h(t) \qquad \text{für alle} \quad t \in I. \tag{1.4}$$

Wir zeigen zuerst die Eindeutigkeitsaussage. Dazu nehmen wir an, $f : I \to \mathbb{R}$ sei eine stetig differenzierbare Funktion mit (1.1) und (1.2). Da die Funktion h offenbar keine Nullstellen hat (denn es gilt stets $e^x \neq 0$), ist dann $\gamma := f/h$ eine wohldefinierte stetig differenzierbare Funktion auf I mit

$$f = \gamma h. \tag{1.5}$$

Daraus folgt mit (1.4)

$$f' = \gamma' h + \gamma h' = \gamma' h + \gamma a h. \tag{1.6}$$

Mit (1.1) ergibt sich:

$$\gamma' h + \gamma a h = a\gamma h + b,$$

d.h.

$$\gamma' h = b \qquad \text{bzw.} \qquad \gamma' = \frac{b}{h}.$$

Da $\gamma(t_0) = f(t_0)/h(t_0) = f(t_0) = \gamma_0$ gilt, ergibt das

$$\gamma(t) = \gamma_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{b(\tau)}{h(\tau)}\, d\tau.$$

Mit (1.5) erhält man daraus schließlich

$$f(t) = \left(\gamma_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{b(\tau)}{h(\tau)}\, d\tau \right) h(t)$$

oder, wenn man noch die Definition von h einsetzt,

$$f(t) = \left(\gamma_0 + \int_{t_0}^{t} \frac{b(\tau)}{\exp \int_{t_0}^{\tau} a(\eta)\, d\eta}\, d\tau \right) \exp \int_{t_0}^{t} a(\tau)\, d\tau\,, \quad t \in I. \tag{1.7}$$

Damit ist gezeigt, dass es höchstens eine Lösung von (1.1) und (1.2) gibt. Zugleich folgt daraus aber auch die Existenz einer Lösung. Man muss nur die durch (1.7) definierte Funktion f differenzieren. $\square$

Wir bemerken noch, dass die Formel (1.7) im Fall konstanter Koeffizienten a und b die folgende einfachere Form annimmt:

$$f(t) = -\frac{b}{a} + \left(\gamma_0 + \frac{b}{a}\right) e^{a(t-t_0)}\,, \quad t \in I.$$

2 Ein zweiter Beweis der Eindeutigkeit

Hier geben wir noch einen zweiten Beweis für die Eindeutigkeitsaussage in Satz 1.1 an. Dieser zweite Beweis ist deswegen interessant, weil er auch auf sehr viel allgemeinere Differentialgleichungen angewendet werden kann, während der oben angegebene Beweis nur im linearen Fall funktioniert.

Es seien also zwei Lösungen f und g von (1.1) und (1.2) gegeben, d.h. $f, g : I \to \mathbb{R}$ seien zwei stetig differenzierbare Funktionen mit

$$f'(t) = a(t)f(t) + b(t) \qquad \text{und} \qquad g'(t) = a(t)g(t) + b(t) \tag{2.1}$$

sowie

$$f(t_0) = g(t_0) = \gamma_0. \tag{2.2}$$

Wir müssen zeigen, dass dann $f(t) = g(t)$ gilt für alle $t \in I$. Dabei kann man natürlich o.B.d.A. annehmen, dass I beschränkt und abgeschlossen ist, so dass a (als stetige Funktion) auf I ein Maximum annimmt. Weiter kann man o.B.d.A. annehmen, dass a nicht identisch verschwindet (denn für $a \equiv 0$ bedeutet die zu beweisende Eindeutigkeitsaussage, dass Stammfunktionen bis auf eine Konstante eindeutig bestimmt sind). Wir setzen

$$\varepsilon := \frac{1}{2 \max\limits_{t \in I} |a(t)|}.$$

Es genügt nun das folgende Lemma zu beweisen:

Lemma 2.1 *Für jedes $s \in I$ gilt: Ist $f(s) = g(s)$, so gilt auch*

$$f(t) = g(t) \qquad \textit{für alle} \quad t \in I_\varepsilon(s) := \left\{ t \in I \;\middle|\; |t - s| \le \varepsilon \right\}.$$

In der Tat kann man dann dieses Lemma wegen (2.2) zuerst auf den Fall $s = t_0$ anwenden und erhält $f(t) = g(t)$ für alle $t \in I_\varepsilon(t_0)$. Im zweiten Schritt wendet man das Lemma auf die Punkte $s = t_0 - \varepsilon$ und $s = t_0 + \varepsilon$ an (soweit diese beiden Punkte noch in I liegen), und erhält $f(t) = g(t)$ für alle

$$t \in I_{2\varepsilon}(t_0) := \left\{ t \in I \;\middle|\; |t - s| \le 2\,\varepsilon \right\}.$$

Man fährt so fort, bis nach einem gewissen n-ten Schritt ($n \geq$ Länge des Intervalls I/ε genügt)

$$I_{n\,\varepsilon}(t_0) := \left\{ t \in I \;\middle|\; |t-s| \leq n\,\varepsilon \right\} \supseteq I$$

gilt.

Beweis von Lemma 2.1. Sei

$$M := \max_{t \in I_\varepsilon(s)} |\,f(t) - g(t)|.$$

Wir müssen zeigen, dass $M = 0$ ist. Dazu sei ein $t \in I_\varepsilon(s)$ gegeben. Dann gilt: Wegen $f(s) = g(s)$ ist

$$|f(t) - g(t)| = |f(t) - f(t_0) - (g(t) - g(t_0))|.$$

Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und (2.1) folgt daraus

$$\begin{aligned}
|f(t) - g(t)| &= \left| \int\limits_s^t (f'(\tau) - g'(\tau))\, d\tau \right| \\
&= \left| \int\limits_s^t (a(\tau)f(\tau) + b(\tau) - a(\tau)g(\tau) - b(\tau)) d\tau \right| \\
&= \left| \int\limits_s^t a(\tau)(f(\tau) - g(\tau))\, d\tau \right|.
\end{aligned}$$

Da der Betrag eines Integrals höchstens größer wird, wenn man den Integranden mit Betragsstrichen versieht, kann man den Ausdruck wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}
|f(t) - g(t)| &\leq \left| \int\limits_s^t |a(\tau)||f(\tau) - g(\tau)|\, d\tau \right| \\
&\leq \left| \int\limits_s^t \max_{\eta \in I} |a(\eta)| \cdot \max_{\eta \in I_\varepsilon(s)} |f(\eta) - g(\eta)|\, d\tau \right| \\
&= \max_{\eta \in I} |a(\eta)| \cdot \max_{\eta \in I_\varepsilon(s)} |f(\eta) - g(\eta)| \left| \int\limits_s^t d\tau \right| \\
&\leq \max_{\eta \in I} |a(\eta)| \cdot \max_{\eta \in I_\varepsilon(s)} |f(\eta) - g(\eta)||t - s| \\
&\leq \max_{\eta \in I} |a(\eta)| \cdot M \cdot \varepsilon.
\end{aligned}$$

Nach Definition von ε folgt daraus, dass

$$|f(t) - g(t)| \leq \frac{M}{2} \qquad \text{für alle} \quad t \in I_\varepsilon(s),$$

d.h. $M \leq M/2$, also $M = 0$. $\square$

3 Berechnung eines Sparguthabens

Hier untersuchen wir die folgende Situation: Zum Zeitpunkt $t = 0$ vertrauen wir einen gewissen Betrag g_0 (in Euro) einer Bank an. Diese zahlt uns dafür Zinsen mit einem auf das Jahr bezogenen Zinssatz p (d.h. dafür, dass wir 100 Euro ein Jahr lang bei der Bank lassen, erhalten wir $100p$ Euro an Zinsen gutgeschrieben). Für $t \geq 0$ bezeichnen wir mit $g(t)$ das Guthaben, das wir zum Zeitpunkt t auf der Bank haben. Als Zeiteinheit wählen wir ein Jahr.

Im Fall stufenweiser Verzinsung mit Stufengröße ein Jahr kann man $g(n)$ (das aufgelaufene Guthaben nach n Jahren), $n \in \mathbb{N}^*$, nach der aus der Schule bekannten Formel

$$g(n) = g_0(1+p)^n$$

berechnen. Wählt man als Stufengröße den k-ten Teil eines Jahres, $k \in \mathbb{N}^*$, so gilt

$$g(n) = g_0 \left(1 + \frac{p}{k}\right)^{kn} = g_0 \left(1 + \frac{pn}{kn}\right)^{kn}. \tag{3.1}$$

Wegen des aus der Analysis bekannten Grenzwertes

$$\lim_{m \to \infty} \left(1 + \frac{x}{m}\right)^m = e^x \,, \qquad x \in \mathbb{R},$$

konvergiert die rechte Seite von (3.1) für $k \to \infty$ (und fest gehaltenem n) gegen $g_0 e^{pn}$, d.h. bei sehr kleiner Wahl der Stufengröße ist

$$g(n) \approx g_0 e^{pn}. \tag{3.2}$$

Durch den Übergang zu einer "unendlich kleinen" Stufengröße erhält man die *stetige Verzinsung*. Hierbei wird zu dem Guthaben $g(t)$ zu jedem Zeitpunkt t der "unendlich kleine" Betrag $g(t)\,p\,dt$ hinzugefügt, d.h. für $dg(t)$ (die "unendlich kleine" Änderung in der "Zeit" dt) gilt

$$dg(t) = g(t)\,p\,dt,$$

bzw. genauer gesagt, *stetige Verzinsung* bedeutet (nach Definition), dass die Funktion $g(t)$ stetig differenzierbar ist und die Differentialgleichung

$$g'(t) = pg(t)\,, \qquad 0 \leq t < \infty$$

erfüllt. Nach Satz 1.1 gibt es genau eine solche Funktion g, die außerdem noch der Anfangsbedingung

$$g(0) = g_0,$$

genügt, und zwar, nach Formel (1.8),

$$g(t) = g_0 e^{pt}. \tag{3.3}$$

Vergleicht man stufenweise und stetige Verzinsung, so erhält man zum Beispiel: Sei $g_0 = 100.000$, $t = n = 20$ (Jahre) und $p = 0,05$. Dann erhält man am Ende ein Guthaben von:

- 265.329,77 Euro bei jährlicher Verzinsung (Stufenmodell)
- 271.809,56 Euro bei täglicher Verzinsung (Stufenmodell)
- 271.828,18 Euro bei stetiger Verzinsung.

4 Berechnung eines Kredits mit stetiger Verzinsung und Abzahlung

Hier betrachten wir die folgende Situation: Zum Zeitpunkt $t = 0$ nehmen wir einen Kredit in Höhe von k_0 Euro auf. Der effektive Jahreszinssatz sei p (d.h. für 100 Euro werden pro Jahr $100p$ Euro Zinsen fällig), die monatliche Abzahlungsrate sei m, und T sei die Laufzeit des Kredits. Mit $k(t)$ bezeichnen wir die Höhe der Schuld zum Zeitpunkt t, wobei wir als Zeiteinheit wieder ein Jahr wählen. Unabhängig davon, was die Banken genau tun, wollen wir uns hier vorstellen, dass sowohl die Verzinsung als auch die Abzahlung *stetig* verlaufen, d.h. zu jedem Zeitpunkt t vermehrt sich die Schuld um den Betrag $k(t)\,p\,dt$ und verringert sich zugleich um den Betrag $12m\,dt$, d.h.

$$dk(t) = k(t)\,p\,dt - 12m\,dt,$$

bzw. genauer gesagt, wir stellen uns vor, dass die Funktion $k(t)$ stetig differenzierbar ist und die Differentialgleichung

$$k'(t) = pk(t) - 12m\,, \qquad 0 \le t < \infty$$

erfüllt. Nach Satz 1.1 gibt es genau eine solche Funktion k, die außerdem noch der Anfangsbedingung

$$k(0) = k_0,$$

genügt, und zwar, nach Formel (1.8),

$$k(t) = \frac{12m}{p} + \left(k_0 - \frac{12m}{p}\right) e^{pt}. \tag{4.1}$$

An dieser Formel sieht man zunächst, dass

$$k_0 < \frac{12m}{p}$$

sein muss, wenn der Kredit irgendwann abgezahlt sein soll, d.h. wenn $t < \infty$ sein soll. In diesem Fall gilt $k(T) = 0$, d.h. nach (4.1),

$$0 = \frac{12m}{p} + \left(k_0 - \frac{12m}{p}\right) e^{pT}. \tag{4.2}$$

Auflösung nach T ergibt

$$T = \frac{1}{p} \ln\left(\frac{12m}{12m - pk_0}\right). \tag{4.3}$$

Man kann also die Laufzeit T aus der Kredithöhe k_0, dem effektiven Jahreszins p und der Höhe der Monatsrate m berechnen. Setzt man zum Beispiel $m = 200$, $p = 0,1$ und $k_0 = 20.000$, so erhält man eine Laufzeit von

$$\frac{1}{0,1}\left(\frac{12 \cdot 200}{12 \cdot 200 - 0,1 \cdot 20.000}\right) = 17,9$$

Jahren. Ebenfalls explizit kann man nach k_0 oder m auflösen. Schwieriger ist die Auflösung nach dem Zinssatz p. Hierfür muss man wahrscheinlich numerisch vorgehen.