

Didaktik der Analysis und der Analytischen Geometrie/ Linearen Algebra

Aufgaben zur Vorbereitung auf die Übungen Teil 2: Zahlenfolgen und Grenzwerte/ Ableitung

(Übungen am 12.05. und 17.05.)

Medikamentenspiegel

Angenommen, innerhalb von 4 Stunden werden jeweils 25% eines Medikaments vom Körper abgebaut und ausgeschieden. Die wirksame Anfangsdosis beträgt 100 mg und wird alle vier Stunden erneut gegeben. Wie entwickelt sich im Laufe der Zeit der Medikamentenspiegel im Körper?

- Geben Sie eine rekursive Bildungsvorschrift für den Medikamentenspiegel nach $n \cdot 4$ Stunden an.
- Berechnen Sie den Medikamentenspiegel nach 1, 2, ..., 30 Zeitperioden (von jeweils 4 Stunden) und stellen Sie den Verlauf graphisch dar (mithilfe einer Tabellenkalkulations-Software).
- Entwickeln Sie eine explizite Bildungsvorschrift für den Medikamentenspiegel nach $n \cdot 4$ Stunden und berechnen Sie den Grenzwert für $n \rightarrow \infty$.

Aufgaben zum Begriff der Ableitung

- Jemand definiert die lokale Änderungsrate einer Funktion f an einer Stelle x_0 durch den Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$$

Ist dies gleichwertig mit der vertrauten Definition, und wie ist es geometrisch zu interpretieren?

- Zeigen Sie: Ist f lokal um x_0 darstellbar in der Form

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + m \cdot h + r(h)$$

mit einer geeigneten Zahl m und der Restbedingung

$$|r(h)| \leq k \cdot h^2, \quad k \text{ konstant,}$$

so ist f in x_0 differenzierbar und es gilt $m = f'(x_0)$.¹

Zeigen Sie außerdem, dass umgekehrt nicht jede in x_0 differenzierbare Funktion in dieser Weise darstellbar ist. (Untersuchen Sie das Beispiel f mit $f(x) = x\sqrt{|x|}$ an der Stelle $x_0 = 0$.)

- Stellen Sie dar, wie der Zusammenhang zwischen der Flächeninhaltsfunktion $A(r)$ und ihrer Ableitung für einen Kreis mit dem Radius r herausgearbeitet werden kann. Gehen Sie dabei nicht vorrangig auf die rein rechnerische Ableitung (mithilfe der Ableitungsregeln) ein, sondern stellen Sie auch qualitative Betrachtungen an und interpretieren Sie den Differentialquotient geometrisch (mit Bezug auf den betrachteten Kontext).

¹Zur Erläuterung: Dieser Differenzierbarkeitsbegriff eröffnet die Möglichkeit, den Fehler der lokalen Linearisierung abzuschätzen.