

Didaktik der Analysis und der Analytischen Geometrie/ Linearen Algebra

## Aufgaben zur Vorbereitung auf die Übungen Teil 3: Differentialrechnung

(Übungen am 26.05. und 31.05.)

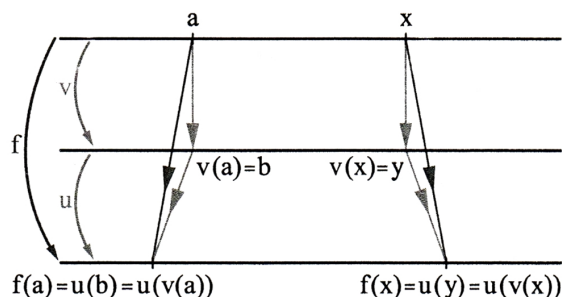
1. Bestimmen Sie den Differentialquotienten der Wurzelfunktion  $f$  mit  $f(x) = \sqrt{x}$  an einer Stelle  $x_0 \in \mathbb{R}^+$ .

*Hinweis:* Formen Sie den Differenzenquotienten so um, dass im Zähler nur noch  $h$  auftritt. Erweitern Sie dazu den Differenzenquotienten geeignet und wenden Sie die 3. binomische Formel an.

2. Ist eine Funktion  $f$  differenzierbar an einer Stelle  $x_0$  und gilt  $f'(x_0) \neq 0$ , so ist auch die Funktion  $g$  mit  $g(x) = \frac{1}{f(x)}$  differenzierbar an der Stelle  $x_0$  und es gilt:

$$g'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{(f(x_0))^2}$$

- a) Beweisen Sie diesen Satz mit Hilfe des Differentialquotienten.  
 b) Welche Bedeutung hat der Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit für den Beweis des Satzes?
3. Leiten Sie mithilfe des Differentialquotienten die Kettenregel her. Orientieren Sie sich an der Grafik.



4. Ableitung von Exponentialfunktionen: Es sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Exponentialfunktion mit  $f(x) = a^x$  mit  $a \in \mathbb{R}, a > 0$ .  
 (Bemerkung: Potenzen mit irrationalen Exponenten werden in der Schule i. Allg. nicht vollständig exakt definiert. Wir gehen aber davon aus, dass die Potenzgesetze auch hierfür gelten.)
- a) Zeigen Sie, dass für alle  $x \in \mathbb{R}$  gilt:  $f'(x) = f'(0) \cdot f(x)$ .  
 b) Können Sie ein  $a$  mit  $f'(0) = 1$  finden?  
 (Erinnern Sie sich an den Grenzübergang zur stetigen Verzinsung innerhalb eines Jahres.)