Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Institut für Mathematik
A. Filler

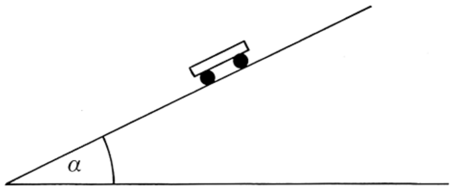
Didaktik der Analysis und der Analytischen Geometrie/ Linearen Algebra

Aufgaben zur Vorbereitung auf die Übungen
Teil 5: Integralrechnung

(Übung in der Vorlesung am 16.06.)

1. Rekonstruktion von Wegen aus Geschwindigkeiten

Ein Wagen, der (reibungslos) eine geneigte Ebene hinab fährt, führt eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung aus. Wenn die geneigte Ebene den Neigungswinkel α hat, erfährt der Wagen die Beschleunigung $a = g \cdot \sin \alpha$ ($g = 9,81 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ ist die Erdbeschleunigung).



(a) Zeichnen Sie für $\alpha = 30°$ ein v-t-Diagramm und bestimmen Sie aus dem Graphen, welchen Weg der Wagen nach 2 s, 4 s, 6 s, 8 s, 10 s zurücklegt, wenn er zum Zeitpunkt $t = 0$ losfährt.

(b) Skizzieren Sie anhand dieser Werte ein s-t-Diagramm für die ersten 10 Sekunden der Abfahrt.

2. Flächeninhalt unter dem Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^3$

(a) Bestimmen Sie die Ober- und Untersummen zu der Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^3$ und der x-Achse über dem Intervall [0;5] bei einer Zerlegung dieses Intervalls in 100 gleich lange Teilintervalle.

(b) Zeigen Sie (für das Beispiel aus Aufgabenteil a): Strebt die Anzahl der Teilintervalle gegen unendlich, so werden Ober- und Untersummen gleich. Berechnen Sie damit den exakten Inhalt der Fläche zwischen dem Graphen der Funktion f und der x-Achse über dem Intervall [0;5]. Merken Sie auch hier an, welche Kenntnisse zu Grenzwerten erforderlich sind, um die Aufgabe zu lösen.

(c) Leiten Sie durch Verallgemeinerung des Beispiels (d. h. ohne Nutzung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung) die Funktionsgleichung der Integralfunktion

$$F_0(x) = \int_0^x f(t)\, dt$$

her.

3. Volumina von Rotationskörpern

Lässt man den Graphen der Funktion $f : [0;2] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{x}$ im Raum um die x-Achse rotieren, so begrenzt er (zusammen mit der auf der x-Achse senkrecht stehenden Kreisscheibe mit Mittelpunkt $(2;0)$ und Radius $\sqrt{2}$) einen Rotationskörper.

(a) Wir unterteilen das Intervall $[0;2]$ in 200 gleich lange Teilintervalle und betrachten in jedem dieser Teilintervalle einen schmalen Zylinder maximalen Volumens, der vollständig innerhalb des Rotationskörpers liegt. Berechnen Sie das Gesamtvolumen des Körpers, der von diesen 200 „Innenzylindern“ gebildet wird.

(b) Nun betrachten wir für jedes Teilintervall einen schmalen Zylinder minimalen Volumens, der den Teil des Rotationskörpers in dem jeweiligen Teilintervall vollständig einschließt. Berechnen Sie das Gesamtvolumen des Körpers, den diese 200 „Außenzylinder“ bilden.

(c) Lassen Sie die Zahl der Teilintervalle gegen Unendlich gehen und berechnen Sie die Volumina des von den „Innen-“ und des von den „Außenzylindern“ gebildeten Körper.

(d) Verallgemeinern Sie nun das in den Aufgabenteilen (a)-(c) angewendete Verfahren und leiten Sie eine Formel für die Berechnung des Volumens des durch Rotation des Graphen einer stetigen Funktion $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ um die x-Achse entstehenden Rotationskörpers her.

(Siehe auch die auf der folgenden Seite wiedergegebenen Schulbuchauszüge.)

Volumen von Rotationskörpern

Mithilfe der Integralrechnung können oft auch Rauminhalte von Körpern berechnet werden. Wir werden uns im Folgenden mit der Berechnung des Volumens solcher Rotationskörpern beschäftigen.
Lässt man z.B. eine Fläche um die x-Achse oder die y-Achse rotieren, so entsteht ein **Rotationskörper**.

13. **a)** Stellen Sie sich vor, dass die Graphen der Funktionen in den Bildern 54a–c über dem angegebenen Intervall um die x-Achse rotieren. Beschreiben Sie die jeweilig entstehenden Körper. Um welche Körper handelt es sich?

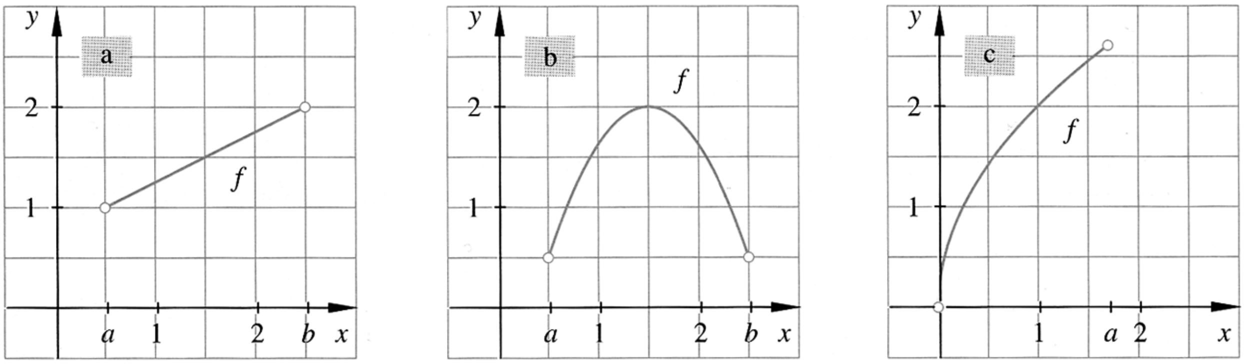
b) Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der durch die Funktion f in Bild 54a bei Rotation um die x-Achse entsteht.

c) Stellen Sie sich vor, dass die in a) beschriebenen Körper durch Ebenen geschnitten werden, die senkrecht zur x-Achse verlaufen. Beschreiben Sie möglichst genau die Schnittfläche der Körper.

d) Stellen Sie sich vor, dass die Graphen der Funktionen in den Bildern 54a–c jeweils um die y-Achse rotieren. Beschreiben Sie die entstehenden Körper. Über welchem Intervall erfolgt die Rotation?

e) Bei welchen Funktionen entstehen bei Rotation der Graphen um die x-Achse als Rotationskörper gerade Kreiskegel bzw. gerade Kreiszylinder?

f) Nennen Sie Beispiele für in der Realität auftretende Rotationskörper.



54

14. Im Bild 55 ist ein Rotationskörper abgebildet. Er wird von einigen Zylindern umschlossen.

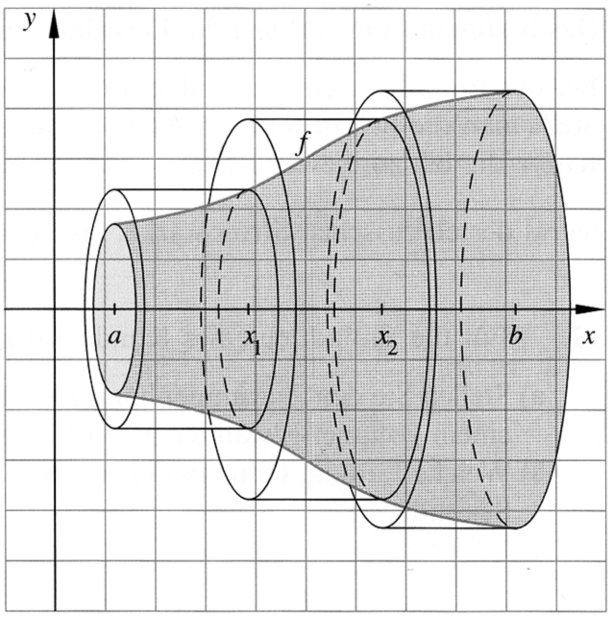
a) Beschreiben Sie diese Zylinder möglichst genau.

b) In welcher Beziehung steht die Summe der Rauminhalte der Zylinder zum Volumen des Rotationskörpers?

c) Welche Radien haben möglichst große Zylinder, deren Höhe nicht verändert wird, die aber von dem Rotationskörper umschlossen werden?

d) In welcher Beziehung steht die Summe der Rauminhalte der Zylinder aus c) zum Volumen des Rotationskörpers?

e) Beschreiben Sie, wie man mithilfe der beschriebenen Zylinder immer bessere Näherungswerte für das Volumen des Rotationskörpers erhalten kann.



55

Quelle: Schulz, W.; Stoye, W.: Mathematik Sekundarstufe II, Analysis Leistungskurs. Volk und Wissen, Berlin 1997.