Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Institut für Mathematik
A. Filler

Sommersemester 2016

Didaktik der Analysis und der Analytischen Geometrie/ Linearen Algebra

Aufgaben zur Vorbereitung auf die Übungen
Teil 7: Affine und metrische Geometrie von Geraden und Ebenen

(Vorlesung am 07.07. und Übung am 12.07.)

1. Lagebeziehungen

In einer Abituraufgabe aus dem Jahr 2012 heißt es:

Ein Raubvogel befindet sich … im Punkt $P_0(3260\,|\,-1860\,|\,830)$ und eine Sekunde später in $P_1(3248\,|\,-1848\,|\,829)$. Im selben Zeitraum fliegt ein Singvogel geradlinig gleichförmig im morgendlichen Frühnebel von $Q_0(800\,|\,-600\,|\,200)$ nach $Q_1(796\,|\,-592\,|\,201)$, 1 LE = 1 m.

… Zeigen Sie, dass die Fluggeraden windschief zueinander verlaufen, indem Sie die lineare Unabhängigkeit der Richtungsvektoren nachweisen und den Abstand der beiden Geraden berechnen.

- Bewerten Sie Sinn/Unsinn des gegebenen Lösungshinweises.
- Lösen Sie dazu die Aufgabe mit dem gegebenen Lösungshinweis.
- Lösen Sie die Aufgabe auf rein affine Weise ohne Abstandsberechnung.

2. Abstandsberechnungen

Lösen Sie die folgenden Aufgaben unter Hauptaugenmerk auf die Lösungs*ansätze* und *-wege*. Überlegen Sie insbesondere, was an Faktenwissen erforderlich ist, um die Aufgaben zu lösen. Versuchen Sie, mit so wenig Faktenwissen (Formeln, Kalküle) wie möglich auszukommen und statt dessen anschaulich-inhaltliche Überlegungen anzustellen. Vergleichen Sie weiterhin Umfang und Schwierigkeitsgrad der Lösungen *ohne und mit Nutzung des Vektorprodukts* (sofern dieses sinnvoll genutzt werden kann).

1. Berechnen Sie den Abstand des Punktes $Q(4;1;-1)$ von der Ebene $\varepsilon\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\8\\6\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}$.

2. Bestimmen Sie den Abstand des Punktes $Q(12;-3;13)$ von der Ebene ε mit der Koordinatengleichung $-5x - 8y + 2z = 32$.

3. Bestimmen Sie den Abstand der zueinander parallelen Ebenen ε_1 und ε_2.

   a) $\varepsilon_1\colon\ \vec{p} = \begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}8\\-6\\1\end{pmatrix},\ \varepsilon_2\colon\ \vec{p} = \begin{pmatrix}0\\3\\3\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}14\\-12\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}0\\6\\7\end{pmatrix}$

   b) $\varepsilon_1\colon\ -3x - 4y + 5z = -20,\ \varepsilon_2\colon\ 4{,}5x + 6y - 7{,}5z = 15$

4. Zeigen Sie, dass die Gerade $g\colon\ \vec{p} = \begin{pmatrix}3\\-4\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}5\\-7\\2\end{pmatrix}$ zu der Ebene $\varepsilon\colon\ x + y + z = -68$ parallel ist und bestimmen Sie den Abstand von g zu ε.

5. Überprüfen Sie, ob die Geraden g und h parallel oder windschief sind und berechnen Sie ihren Abstand.

   a) $g\colon\ \vec{p} = \begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix},\ h\colon\ \vec{p} = \begin{pmatrix}-1\\-3\\7\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-4\\-2\\4\end{pmatrix}$

   b) $g\colon\ \vec{p} = \begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}2\\1\\-2\end{pmatrix},\ h\colon\ \vec{p} = \begin{pmatrix}0\\11\\7\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$

Ergebnisse (zur Kontrolle):

1. $d(Q,\varepsilon) = \frac{18}{\sqrt{26}} \approx 3{,}530$; 2. $d(Q,\varepsilon) = \frac{42}{\sqrt{93}} \approx 4{,}355$; 3. a) $d(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = \frac{7}{11}$; b) $d(\varepsilon_1,\varepsilon_2) = \sqrt{2}$; 4. $d(g,\varepsilon) = \frac{68}{\sqrt{3}} \approx 39{,}26$ 5. a) parallel, $d(g,h) = 3$; b) windschief, $d(g,h) = 4$