

# Didaktik der Analysis und der Analytischen Geometrie/ Linearen Algebra

## 2. Die reellen Zahlen

A. Filler

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik



Sommersemester 2016

# Die reellen Zahlen

## Historische Bemerkungen

### Mathematische „Hintergründe“

- Charakterisierungen der Vollständigkeit der reellen Zahlen
- Möglichkeiten der Konstruktion der reellen Zahlen
- (Unendliche) Dezimalzahlen

## Reelle Zahlen in der Sekundarstufe I

### Zugänge zu reellen (insbesondere irrationalen) Zahlen in der Sekundarstufe I

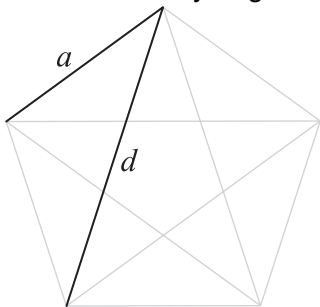
- Intervallschachtelungen
- Geometrische Zugänge

## Ohne reelle Zahlen keine Analysis

# Historische Bemerkungen zur Entdeckung irrationaler Zahlen

Irrationale Zahlen wurden zunächst als **inkommensurable Strecken** (Strecken ohne gemeinsames „Maß“, d. h. mit einem irrationalen Längenverhältnis) entdeckt.

- ▶ Pentagramm: Wahrzeichen der Pythagoreer



$$\frac{d}{a} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$$

- ▶ Hippasos von Metapont (6.-5. Jh. v. Chr.): Verhältnis von Diagonalen- und Seitenlänge im regelmäßigen Fünfeck ist irrational.
- ▶ „Grundlagenkrise“ des pythagoreischen Weltbildes oder Geheimnisverrat? („Strafe der Götter“: Hippasos ertrank im Meer.)

# Charakterisierungen der Vollständigkeit der reellen Zahlen

Die „Lückenlosigkeit“ der reellen Zahlen kann durch sehr verschiedene (aber äquivalente) Vollständigkeitsaxiome beschrieben werden (siehe auch die Vorlesung „Algebra/Zahlentheorie“)

## Axiom vom Supremum (der oberen Grenze)

Jede nicht leere, nach oben beschränkte Teilmenge von  $\mathbb{R}$  besitzt ein Supremum (obere Grenze = kleinste obere Schranke).

## Dedekindsches Schnittaxiom

Jeder Dedekindsche Schnitt wird durch ein Element von  $\mathbb{R}$  erzeugt.

Dedekindscher Schnitt: Zerlegung von  $\mathbb{R}$  in 2 disjunkte Teilmengen  $A$  und  $B$  mit  $a < b$  für alle  $a \in A$  und  $b \in B$

## Intervallschachtelungsaxiom

Zu jeder Intervallschachtelung  $([a_i; b_i])_{i \in \mathbb{N}}$ , gibt es genau ein  $c \in \mathbb{R}$  mit  $a_i \leq c \leq b_i$  für alle  $i \in \mathbb{N}$ .

## Cauchy'sches Konvergenzprinzip

Jede Cauchy-Folge konvergiert in  $\mathbb{R}$

## Zusammenhang Monotonie / Beschränktheit / Konvergenz

Jede monotone beschränkte Folge konvergiert.

# Möglichkeiten der Konstruktion der reellen Zahlen

Die meisten der angegebenen Charakterisierungen der Vollständigkeit von  $\mathbb{R}$  zeigen Wege auf,  $\mathbb{R}$  aus  $\mathbb{Q}$  zu konstruieren.

- ▶  $\mathbb{R}$  als die Menge von Klassen aller rationalen Intervallschachtelungen. Zwei Intervallschachtelungen  $[a_n, b_n]$  und  $[A_n, B_n]$  gehören derselben Klasse an, wenn  $a_n \leq B_m$  und  $A_n \leq b_m$  für alle  $n, m \in \mathbb{N}$ .
- ▶ Konstruktion der reellen Zahlen als Äquivalenzklassen von Cauchy-Folgen. Zwei Cauchy-Folgen gehören derselben Klasse an, wenn ihre Differenzfolge eine Nullfolge ist.<sup>1</sup>

Für den Unterricht:

- ▶ Weg über **Intervallschachtelungen** (ohne Klassenbildung)
- ▶ Weg über **Cauchy-Folgen** als „Hintergrundidee“ (**Dezimalzahlen** lassen sich als Cauchy-Folgen interpretieren)

---

<sup>1</sup> Siehe KRAMER; VON PIPPICH: *Von den natürlichen Zahlen zu den Quaternionen*. Springer, 2013, S. 119ff. sowie HENN: *Elementare Geometrie und Algebra*, Vieweg, 2003, S. 182 ff.

# Unendliche Dezimalzahlen

## Dezimalzahl:

$$d = \pm (n + q_1 \cdot 10^{-1} + q_2 \cdot 10^{-2} + q_3 \cdot 10^{-3} + q_4 \cdot 10^{-4} + q_5 \cdot 10^{-5} + \dots)$$

bzw.  $n \in \mathbb{N},^2 \quad q_k \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq q_k \leq 9 \text{ für } k = 1 \dots \infty$

$$d = \pm \left( n + \sum_{k=1}^{\infty} q_k \cdot 10^{-k} \right)$$

Einer Dezimalzahl lässt sich stets eine Zahlenfolge zuordnen:

$$(d_i)_{i=1 \dots \infty} \quad \text{mit} \quad d_i = \pm \left( n + \sum_{k=1}^i q_k \cdot 10^{-k} \right)$$

- ▶  $(d_i)$  ist eine Cauchyfolge.
- ▶ Dezimalzahlen lassen sich also Cauchyfolgen zuordnen, diese wiederum repräsentieren reelle Zahlen.
- surjektive Abbildung von der Menge der Dezimalzahlen in die Menge der reellen Zahlen (Klassen von Cauchyfolgen).
- ▶ *Warum nur surjektiv und nicht bijektiv?*

<sup>2</sup>Es sind hier die natürlichen Zahlen *einschließlich der Null* gemeint.

# Unendliche Dezimalzahlen

- ▶ *Warum nur surjektiv und nicht bijektiv?*

$$0,\bar{9} = 0 + \sum_{k=1}^{\infty} 9 \cdot 10^{-k} = 0 + \sum_{k=1}^{\infty} q_k \cdot 10^{-k} \quad \text{mit } q_k = 9 \text{ für } k = 1 \dots \infty$$

und

$$1 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} 0 \cdot 10^{-k} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} q_k \cdot 10^{-k} \quad \text{mit } q_k = 0 \text{ für } k = 1 \dots \infty$$

sind wegen der ungleichen Koeffizienten verschiedene Dezimalzahlen.

**Aber:** Die Differenzfolge der beiden zugehörigen Cauchyfolgen

$$(d_i)_{i=1 \dots \infty} \text{ und } (d'_i)_{i=1 \dots \infty} \text{ mit } d_i = 0 + \sum_{k=1}^i 9 \cdot 10^{-k} \text{ und } d'_i = 1 + \sum_{k=1}^i 0 \cdot 10^{-k}$$

ist eine Nullfolge (für jedes  $\epsilon > 0$  existiert ein  $i_0$  mit  $d_i - d'_i < \epsilon$ ).

- ▶ Es besteht eine Bijektion zwischen der Menge der *echten Dezimalzahlen* (für die *nicht* ab einem bestimmten Index  $k_0$  alle Koeffizienten  $q_k$  gleich neun sind) und der Menge der reellen Zahlen.

Meist (fast immer) werden irrationale Zahlen im Zusammenhang mit Wurzeln eingeführt. Folgende Problemstellungen können in Klasse 9 auf  $\sqrt{2}$  führen:

- ▶ Bestimme die Zahl(en), deren Quadrat 2 ist.
- ▶ Bestimme zu einem gegebenen Quadrat die Seitenlänge eines Quadrats mit doppeltem Flächeninhalt.
- ▶ Wie lang ist eine Diagonale eines Quadrats der Seitenlänge 1?



# Intervallschachtelungen

## Bestimmung eines Näherungswertes für $\sqrt{2}$ über Intervallschachtelung

(Es wird die Monotonie der quadr. Fkt. für positive Argumente vorausgesetzt.)

- ▶  $\sqrt{2}$  ist größer als 1 und kleiner als 2, denn  $1^2 < 2$  und  $2^2 > 2$ .
- ▶ Bildung der Intervallmitte – liegt  $\sqrt{2}$  zwischen 1 und 1,5 oder zwischen 1,5 und 2 (oder ist  $\sqrt{2} = 1,5$ )?
- ▶  $1,5^2 > 2$ , also liegt  $\sqrt{2}$  zwischen 1 und 1,5.
- ▶ Bildung der Intervallmitte: 1,25 ... und weiter ...

Anfangswert	Endwert	Mittelwert	Mittelwert <sup>2</sup>	Mittelwert <sup>2</sup> > 2?
1	2	1,5	2,25	ja
1	1,5	1,25	1,5625	nein
1,25	1,5	1,375	1,890625	nein
1,375	1,5	1,4375	2,06640625	ja

- ▶ Sinnvoll: Computernutzung (Tabellenkalkulation)  
→ „Gefühl“ für unendliche Fortsetzbarkeit des Verfahrens

## Bestimmung eines Näherungswertes für $\sqrt{2}$ über Intervallschachtelung

- ▶ Auch wenn das Verfahren der Intervallschachtelung über sehr viele Schritte geführt wird, ist noch nicht gesichert, dass es nicht doch irgendwann abbricht.
- ▶ Noch weniger ist gesichert, dass  $\sqrt{2}$  kein endlicher oder periodischer Dezimalbruch ist.
- ▶ Beweis der Irrationalität von  $\sqrt{2}$  ist nötig (d. h.  $\sqrt{2}$  lässt sich nicht durch  $\frac{m}{n}$  mit  $m, n \in \mathbb{N}$  darstellen).

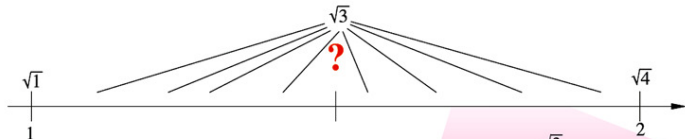
# Intervallschachtelungen

## Näherungsweise Bestimmung von $\sqrt{3}$ mittels „Intervallzehntelung“

Bestimmung von  $\sqrt{3}$  mithilfe dieses Verfahrens:

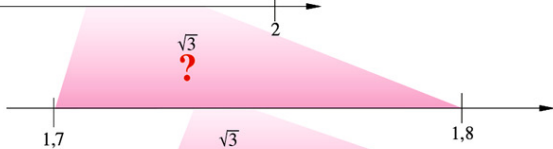
1. Finde zwei Zahlen, zwischen denen sich die gesuchte sicher befindet. Das sind die Ränder der ersten „Schachtel“:

$$1^2 = 1 < 3 < 4 = 2^2 \quad \text{bzw.} \quad 1 = \sqrt{1} < \sqrt{3} < \sqrt{4} = 2$$



2. Wähle einen kleineren Bereich, indem du eine Nachkommastelle zu Hilfe nimmst:

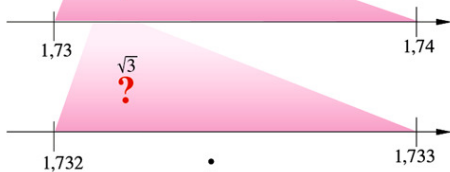
$$1,7^2 = 2,89 < 3 < 3,24 = 1,8^2$$



3. Verkleinere deinen Bereich immer mehr, indem du jeweils eine weitere Nachkommastelle zu Hilfe nimmst:

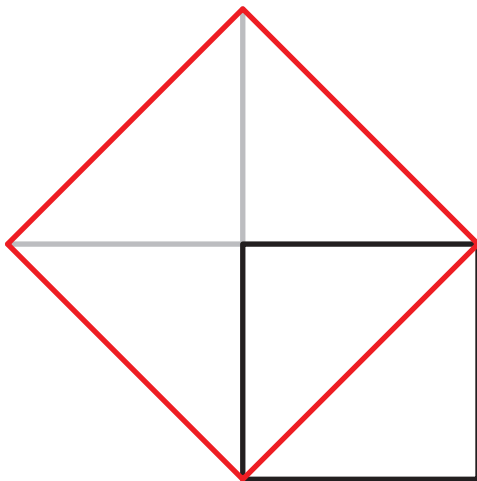
$$1,73^2 = 2,9929 < 3 < 1,74^2 = 3,0276, \\ \text{also ist } \sqrt{3} \approx 1,7$$

$$1,732^2 = 2,999824 < 3 < 1,733^2 = 3,003289 \\ \text{also ist } \sqrt{3} \approx 1,73$$



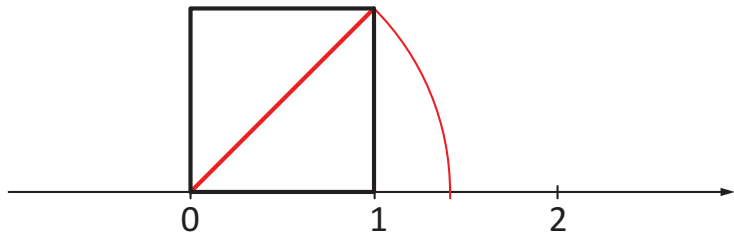
Aus: Fokus 4 (Mathematik 8 B/W), Cornelsen, 2007.

Der Zahlenteufel (Hans Magnus Enzensberger)



# Geometrische Zugänge zu den reellen Zahlen

- ▶ Die rationalen Zahlen liegen auf der Zahlengerade zwar dicht.
- ▶ Dennoch bleiben „Löcher“.

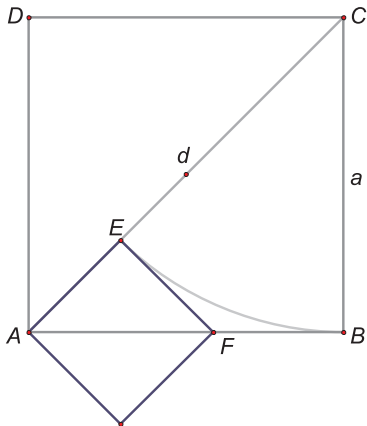


# Geometrische Zugänge zu den reellen Zahlen

## Inkommensurabilität von Seiten- und Diagonalenlänge im Quadrat

### Verfahren der „Wechselwegnahme“

Wechselwegnahme: übliche Methode, um das gemeinsame Maß zweier Strecken zu finden: man beginnt mit zwei Strecken  $a$  und  $b$  mit  $a > b$ , geht dann über zu  $b$  und  $a - b$  und so weiter, bis irgendwann einmal die kleinere Strecke in der größeren ganzzahlig enthalten ist.



# Ohne reelle Zahlen keine Analysis

oder: keine „richtige“ Analysis auf  $\mathbb{Q}$

**Vollständigkeit der reellen Zahlen:** unverzichtbare Voraussetzung für fundamentale Sätze der Analysis und damit für die Rechtfertigung nahezu aller in der Schulanalysis (u. a. bei Kurvendiskussionen) auftretenden Schlüsse.

**Nullstellensatz von Bolzano (Spezialfall des Zwischenwertsatzes):**  
*Wechselt eine in einem abgeschlossenen Intervall  $I$  stetige Funktion dort ihr Vorzeichen, so hat sie in  $I$  wenigstens eine Nullstelle.*

In  $\mathbb{Q}$  gilt dieser Satz nicht.

Gegenbeispiel:  $I = [1; 2]$ ,  $f(x) = x^2 - 2$ .

**Monotoniekriterium:**

Eine auf einem Intervall  $I$  differenzierbare Funktion mit überall auf  $I$  positiver Ableitung ist dort überall streng monoton wachsend.

In  $\mathbb{Q}$  gilt auch dieser Satz nicht.

Gegenbeispiel:  $I = [1; 2]$ ,  $f(x) = \frac{1}{2 - x^2}$ .