Didaktik der Analysis und der Analytischen Geometrie/ Linearen Algebra

3. Zahlenfolgen und Grenzwerte

A. Filler

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik

Sommersemester 2016

Internetseite zur Vorlesung: http://didaktik.mathematik.hu-berlin.de/index.php?article_id=331

oder über: http://www.mathematik.hu-berlin.de/˜filler/

Zahlenfolgen und Grenzwerte

Zahlenfolgen in der Grundschule und in der Sekundarstufe I?

Didaktische Positionen zu Folgen

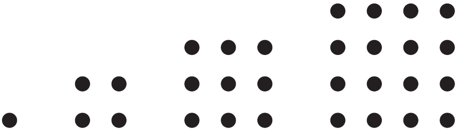
Diskrete Modellierung

Grenzwerte, Konvergenz, Nullfolgen

Reihen

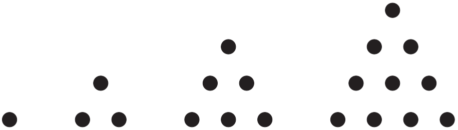
Grundschule: Leitidee „Muster und Strukturen“

Figurierte Zahlen



Quadratzahlen:

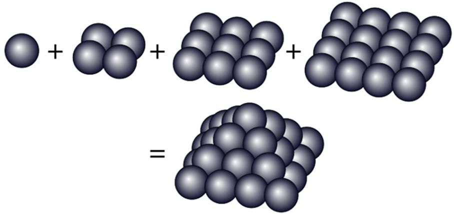
$1, 4, 9, 16, 25, \ldots$



Dreieckszahlen:

$1, 3, 6, 10, 15, \ldots$

$$\left(D_n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}\right)$$



Pyramidenzahlen:

$1, 5, 14, 30, 55, \ldots$

$$\left(P_n = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}\right)$$

Fibonacci-Zahlen

Fibonacci (Leonardo da Pisa) stieß auf diese Folge bei der einfachen mathematischen Modellierung des Wachstums einer Kaninchenpopulation.

1. Zu Beginn gibt es ein Paar neugeborener Kaninchen.
2. Jedes neugeborene Kaninchenpaar wirft nach 2 Monaten ein weiteres Paar.
3. Anschließend wirft jedes Kaninchenpaar jeden Monat ein weiteres.
4. Kaninchen leben ewig; ihr Lebensraum ist unbegrenzt.

- Berechnen Sie einige Glieder der Fibonacci-Folge F_n.
- Stellen Sie eine Rekursionsformel für F_n auf.
- Berechnen Sie mit Excel die ersten 50 Glieder der Fibonacci-Folge.
- Untersuchen Sie die „Wachstumsgeschwindigkeit", indem Sie für jedes n den Quotienten $\frac{F_n}{F_{n-1}}$ ermitteln.

$\rightarrow$ „Bekanntschaft“ mit einem Grenzwert.

Zinseszins

Auf einem Sparkonto wurden 1500 € angelegt. Das Konto wird mit 0,75% verzinst.

- Wie viel Geld befindet sich nach 1, 2, 3, 4, 5, 10, 20, ... Jahren auf dem Konto?
  Rekursive Bildungsvorschrift: $G_{n+1} = 1,0075 \cdot G_n$
  Explizite Bildungsvorschrift: $G_n =$?
- Wie lange dauert es, bis sich das Guthaben verdoppelt hat?

Weitere (bereits diskutierte) Beispiele für Zahlenfolgen:

- Dezimalzahlen
- Intervallschachtelung zur $\sqrt{n}$-Bestimmung (2 Zahlenfolgen)
- Folge der Näherungslösungen beim Heron-Verfahren

Offensichtlich sind sowohl divergente als auch konvergente Folgen relevant.

Didaktische Positionen zu Folgen

„*Wir betrachten die Folgen als natürliches Instrument zur Beschreibung iterativer Prozesse.*“

DANCKWERTS, R.; VOGEL, D.: *Analysis verständlich unterrichten*, 2006, S. 18.

Didaktische Aspekte des Umgangs mit Folgen:

- Diskrete Modellierung
- Konvergenz

Ausführliche Überlegungen zu der Thematik:

WEIGAND, H.-G.: *Zur Didaktik des Folgenbegriffs*.
BI-Wissenschaftsverlag: Mannheim, 1993.

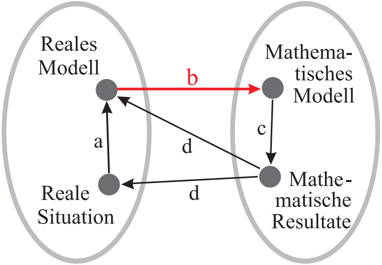
Diskrete Modellierung

Zahlenfolgen: Funktionen $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (bzw. in früheren Schuljahren: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ oder $\mathbb{N} \to \mathbb{Q}$)

- Viele Prozesse lassen sich recht gut mit Zahlenfolgen für diskrete Punkte beschreiben.

$\to$ oft einfacher als stetige Modellierung
(z. B. stetige Verzinsung: BIGALKE/KÖHLER: Wahlpflichtthemen)

- Ein Bauer hat 200 Rinder und möchte seine Herde durch natürliche Vermehrung auf 500 Tiere erweitern. Nach einem Jahr zählt die Herde 230 Tiere. Wie lange dauert es erwartungsgemäß, bis der Bauer sein Ziel erreicht hat?

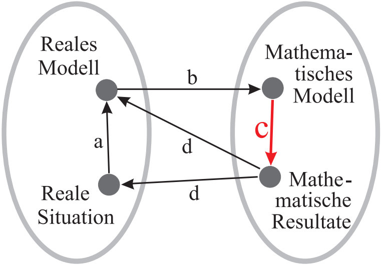


Modellannahmen:

- Die Zunahme des Bestands hängt von der Zahl der vorhandenen Tiere ab.
- Sonstige Einflüsse, die das Wachstum beeinflussen (z. B. begrenzen) gibt es nicht.
- Die Zuwachsrate ist jedes Jahr gleich.
- $\frac{x(n+1)}{x(n)} = \frac{x(1)}{x(0)} = \frac{230}{200} = 1,15$

  (für $n \in \mathbb{N}$, solange $x(n) < 500$, Dimension der Argumente: 1 Jahr)

- Ein Bauer hat 200 Rinder und möchte seine Herde durch natürliche Vermehrung auf 500 Tiere erweitern. Nach einem Jahr zählt die Herde 230 Tiere. Wie lange dauert es erwartungsgemäß, bis der Bauer sein Ziel erreicht hat?



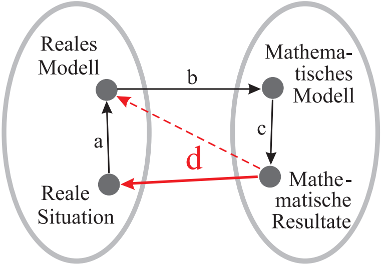
- $$\frac{x(n+1)}{x(n)} = \frac{x(1)}{x(0)} = \frac{230}{200} = 1{,}15$$

$$\Rightarrow x(2) = x(1) \cdot 1{,}15 \approx 264$$
$$x(3) = x(2) \cdot 1{,}15 \approx 304$$
$$\ldots$$
$$x(6) = x(5) \cdot 1{,}15 \approx 463$$
$$x(7) = x(6) \cdot 1{,}15 \approx 532$$

- Oder: $x(n) = 1{,}15^n \cdot x(0)$

$$\Rightarrow n = \log_{1{,}15} \frac{x(n)}{x(0)} = \frac{\ln \frac{x(n)}{x(0)}}{\ln(1{,}15)} = \frac{\ln \frac{500}{200}}{\ln(1{,}15)}$$
$$n \approx 6,56$$

- Ein Bauer hat 200 Rinder und möchte seine Herde durch natürliche Vermehrung auf 500 Tiere erweitern. Nach einem Jahr zählt die Herde 230 Tiere. Wie lange dauert es erwartungsgemäß, bis der Bauer sein Ziel erreicht hat?



- Falls der Bauer über ausreichende Ressourcen verfügt und keine unvorhergesehenen Ereignisse eintreten, kann damit gerechnet werden, dass seine Herde nach ca. 6-7 Jahren auf 500 Tiere angewachsen ist.

Geometrische Folge:

Eine Folge (a_n) heißt geometrische Folge, falls gilt:

$a_{n+1} = a_n \cdot q$ (f. a. $n \in \mathbb{N}$)

Explizite Darstellung:

$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ (f. a. $n \in \mathbb{N}$)

- Bedeutung für Modellierungen
- Zusammenhang zur Exponentialfunktion

Beispiel für diskrete Modellierung: Medikamentenspiegel

Ein weiteres Beispiel für diskrete Modellierung

(nach DANCKWERTS/VOGEL)

Angenommen, innerhalb von 4 Stunden werden jeweils 25% eines Medikaments vom Körper abgebaut und ausgeschieden. Die wirksame Anfangsdosis beträgt 100 mg und wird alle vier Stunden erneut gegeben. Wie entwickelt sich im Laufe der Zeit der Medikamentenspiegel im Körper?

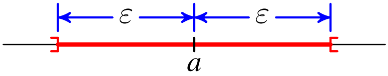
- Indizes: 4-stündige Perioden
- $d_0 = 100$
- $d_1 = \frac{3}{4} d_0 + 100$
- rekursive Bildungsvorschrift: $d_{n+1} = \frac{3}{4} d_n + 100$

Begriff der Konvergenz

ε-Umgebung einer Zahl a:[1]

nach beiden Seiten offenes Intervall, das
a als Mittelpunkt hat und dessen Intervallenden von a die Entfernung ε haben:

$$U_\varepsilon(a) \;=\;]a-\varepsilon\,;\,a+\varepsilon[\;=\; \{x \in \mathbb{R} \mid a-\varepsilon < x < a+\varepsilon\}$$



Grenzwert einer Folge

Die Zahl g heißt Grenzwert einer Folge (a_n), wenn in jeder (noch so kleinen) ε-Umgebung von g unendlich viele Glieder der Folge liegen, aber außerhalb nur endlich viele,
d. h. wenn man eine Platznummer n_0 angeben kann, sodass alle Glieder mit einer höheren Platznummer als n_0 in der Umgebung liegen.

Wir schreiben $\lim\limits_{n\to\infty} = g$ oder $a_n \to g$ für $n \to \infty$.

- Erleichtert die Redundanz dieser Definition das Verständnis?

[1] Die Beschreibungen bzw. Definitionen auf dieser Folie sind dem Schulbuch *Elemente der Mathematik* (Leistungskurs Analysis, Schroedel, 2008) entnommen.

Grenzwertsätze für Folgen

Falls die Folge (a_n) gegen A und die Folge (b_n) gegen B konvergiert, so gilt:

- Die Summenfolge $(a_n + b_n)$ konvergiert gegen $A + B$.
- Die Differenzfolge $(a_n - b_n)$ konvergiert gegen $A - B$.
- Die Produktfolge $(a_n \cdot b_n)$ konvergiert gegen $A \cdot B$.
- Die Quotientenfolge $\dfrac{a_n}{b_n}$ konvergiert gegen $\dfrac{A}{B}$.[2]

[2] Voraussetzung hierfür ist natürlich, dass (b_n) keine Nullfolge ist.

Besonderheit: Nullfolgen

- $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\forall n \geq n_0$: $|a_n| < \varepsilon$
- Ab einer bestimmten „Platznummer“ werden die Beträge aller Folgenglieder beliebig klein (kleiner als jede „noch so kleine“ positive Zahl).

Nullfolgen sind besonders bedeutsam in Hinblick auf den Differentialquotienten (Ableitung).

Besonders wichtige Folgen und Grenzwerte

- Arithmetische Folgen (a_n) mit $a_n = a_0 + n \cdot d$
- Geometrische Folgen (a_n) mit $a_n = a_0 \cdot q^n$
- einfache Nullfolgen wie (a_n) mit $a_n = \frac{1}{n}$ und (b_n) mit $b_n = -\frac{1}{n}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$

Ist (a_n) eine Folge so entsteht durch die Partialsummen

$s_n = \sum_{i=0}^{n} a_i$ oder $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ eine neue Folge (s_n):

Partialsummenfolge bzw. Reihe.

Interessant sind u. a. Reihen (s_n), die durch Nullfolgen (a_n) entstehen.

- Erklären Sie auf für Schüler verständliche Weise, dass die Reihe (s_n) mit $s_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ unbeschränkt ist und deshalb divergiert.
- Veranschaulichen Sie ikonisch, dass (t_n) mit $t_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ konvergiert.

Beispiel zu geometrischen Reihen

Ein Ball wird vom Boden aus bis zur Höhe 2,5 m hochgeworfen. Nach dem Auftippen erreicht er jeweils nur 70% der vorherigen Höhe. Welchen Weg legt er bis zum 1.,..., n.-ten Auftippen zurück?

Definition: Geometrische Reihe

Ist (a_n) eine geometrische Folge mit $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$, so entsteht die zu dieser Folge gehörende Folge (s_n) der Teilsummen durch:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_1 &&= a_1 \\ s_2 &= a_1 + a_2 &&= a_1 + a_1 \cdot q^1 \\ s_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n &&= a_1 + a_1 \cdot q^1 + \ldots + a_1 \cdot q^{n-1} \end{aligned}$$

Die Folge (s_n) heißt geometrische Reihe.

Satz:

Eine geometrische Reihe sei gegeben durch das Anfangsglied a_1 und den konstanten Quotienten q. Dann gilt für das allgemeine Glied s_n:

$$s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} = a_1 \cdot \frac{q^n-1}{q-1} \qquad (q \neq 1)$$

- Leiten Sie die Formel her. Überlegen Sie dabei, welche Hinweise Schülern helfen können, selbst zu der Formel bzw. zu ihrer Herleitung zu gelangen.