Didaktik der Analysis und der Analytischen Geometrie/ Linearen Algebra

4. Ableitungen von Funktionen

A. Filler

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik

Sommersemester 2016

Internetseite zur Vorlesung: http://didaktik.mathematik.hu-berlin.de/index.php?article_id=331

oder über: http://www.mathematik.hu-berlin.de/˜filler/

Ableitungen von Funktionen

Funktionales Denken und Propädeutik der Analysis

Qualitative Aspekte des Verständnisses von Ableitungen

Defizite beim Verständnis des Ableitungsbegriffs

Exaktifizierung des Ableitungsbegriffs – Zugänge

Anstieg einer Kurve in einem Punkt / Tangentenproblem
Änderungsrate einer Funktion
Lineare Approximation

Umsetzungsmöglichkeiten in der Schule

Datenorientierter Zugang über Geschwindigkeiten / Beschleunigungen

Rechnen mit Ableitungen

Sätze über stetige und differenzierbare Funktionen

Aspekte funktionalen Denkens nach VOLLRATH[1]

1. „Durch Funktionen beschreibt oder stiftet man Zusammenhänge zwischen Größen: einer Größe ist eine andere zugeordnet, so dass die eine Größe als abhängig gesehen wird von der anderen
2. Durch Funktionen erfasst man, wie Änderungen einer Größe sich auf eine abhängige Größe auswirken.
3. Mit Funktionen betrachtet man einen gegebenen oder erzeugten Zusammenhang als Ganzes."

In leichter Abwandlung der Aspekte 1 und 2 von VOLLRATH formulierte MALLE zwei Aspekte von Funktionen:[2]

- Zuordnungsaspekt: Jedem x wird genau ein $f(x)$ zugeordnet.
- Kovariationsaspekt: Jede Veränderung von x zieht eine bestimmte Veränderung von $f(x)$ nach sich *und umgekehrt*.

[1] VOLLRATH, H.-J.: Funktionales Denken. In: *JMD* 10 (1989), S. 3-37.

[2] MALLE, G. (2000). Zwei Aspekte von Funktionen: Zuordnung und Kovariation. In: *Mathematik lehren* 103, S. 8-11.

Funktionales Denken und Analysispropädeutik

Materialien von Andrea Hoffkamp

`http://www2.mathematik.hu-berlin.de/~hoffkamp/`

Dreiecksfläche:

`http://www2.mathematik.hu-berlin.de/~hoffkamp/Material/dreieckmaterial.htm`

Die Reise:

`http://www2.mathematik.hu-berlin.de/~hoffkamp/Material/reisematerial.html`

Qualitative Aspekte von Ableitungen

Neuverschuldung soll sinken

Regierung will Steuerplus für Sparkurs nutzen / Keine Kurskorrektur bei Reformen

Von unserem Korrespondenten
Dietrich Eickmeier

BERLIN. Die Bundesregierung will die derzeit kräftig sprudelnden Steuerquellen vor allem zum Schuldenabbau nutzen. Es müsse die erste Pflicht sein, die 2006 veranschlagte Neuverschuldung von 38,2 Milliarden Euro zu senken, sagten Kanzlerin Angela Merkel und Vizekanzler Franz Müntefering gestern nach einer Kabinettsklausur in Berlin.

Diese Summe sei eine der höchsten Neuverschuldungen in der Nachkriegsgeschichte, betonte Merkel. Bei einer Senkung würden die Menschen in Form geringerer Zinszahlungen profitieren. Auch Finanzminister Peer Steinbrück erteilte allen Forderungen nach zusätzlichen Ausgaben sowie dem Verzicht auf die geplante Mehrwertsteuererhöhung erneut eine Absage: „Die Situation ist nach wie vor sehr ernst, trotz der erfreulichen Entwicklung." Der Finanzminister begründete den Sparkurs da-

WESER KURIER
BREMER TAGESZEITUNG

Entnommen aus:

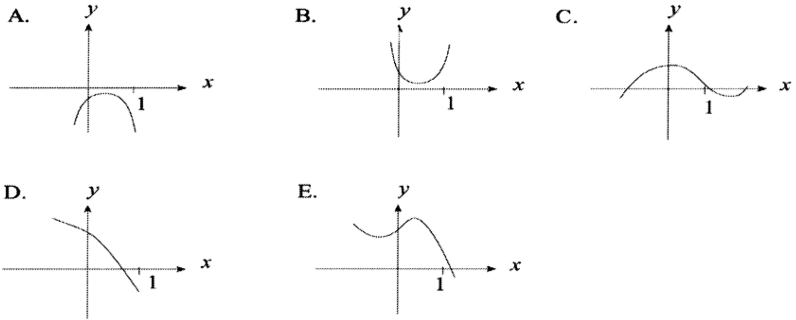
HAHN, ST.; PREDIGER, S.: Bestand und Änderung – Ein Beitrag zur Didaktischen Rekonstruktion der Analysis. *JMD* 29 (2008), 3/4.

Qualitative Aspekte von Ableitungen

Aufgabe aus TIMMS III

Welcher der folgenden Graphen hat die nachstehenden Eigenschaften:

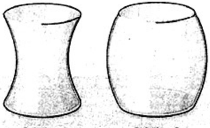
$f'(0) < 0$, $f'(1) < 0$ und $f''(x)$ ist immer negativ?



„Erfolgsquoten“: OECD: $\approx$ 45%; Deutschland: $\approx$ 35%

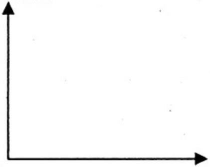
Aufgabe 5

In die Behälter 1 und 2 fließt Wasser, wobei die Zuflussrate konstant ist. Skizzieren Sie für jeden Behälter einen Graphen, der die Abhängigkeit der Höhe des Wasserspiegels von der Zeit beschreibt.

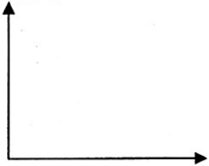


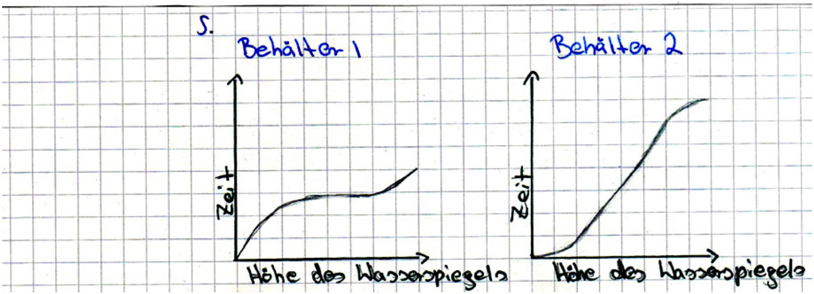
Behälter 1 Behälter 2

Behälter 1



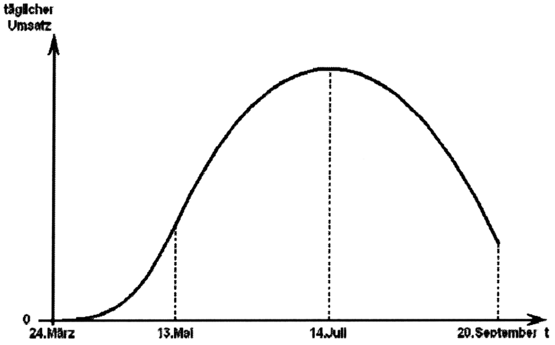
Behälter 2





Qualitative Aspekte von Ableitungen

Aufgabe Produktlebenszyklus



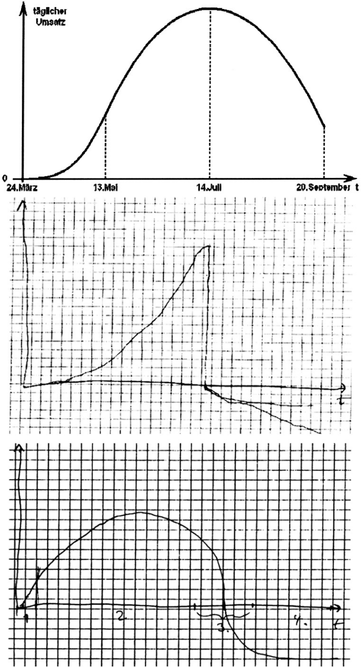
Ein Produkt wird am 24.3. erstmalig auf den Markt gebracht und bis zum 20.9. verkauft. Ab dem 21.9. gibt es dieses Produkt nicht mehr zu kaufen. In der obigen Graphik ist der mit diesem Produkt erbrachte tägliche Umsatz in Abhängigkeit von der Zeit *t* dargestellt. Am 13.5. befindet sich ein so genannter Wendepunkt. Am 14.7. befindet sich ein Hochpunkt. Unter dem Gesamtumsatz zu einem bestimmten Tag wird im Folgenden die Summe aller täglichen Umsätze vom Verkaufsbeginn an bis zu diesem Tag (einschließlich) verstanden.

Geben Sie zu jeder der folgenden Aussagen an, ob sie ***Richtig*** oder ***Falsch*** ist.

Richtig	Falsch	
☐	☐	Die Zunahme des täglichen Umsatzes sinkt jeden Tag in der Woche vom 28. Juni bis zum 04. Juli.
☐	☐	Die maximale Zunahme des täglichen Umsatzes wird an einem Tag in der Woche vom 12. Juli bis zum 18. Juli erreicht.

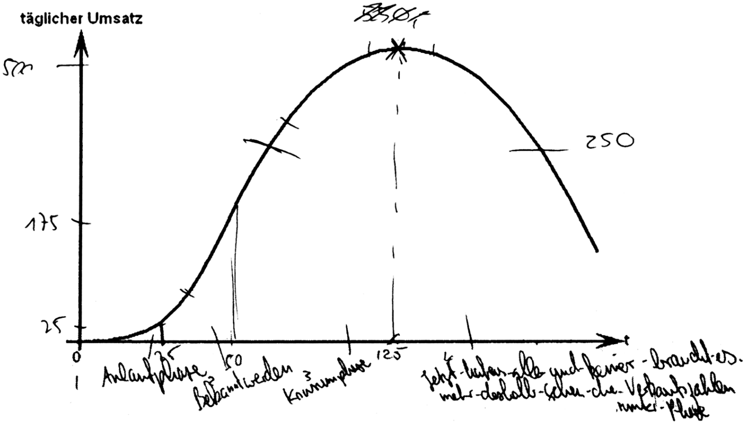
Entnommen aus:

HAHN, ST.; PREDIGER, S.: Bestand und Änderung – Ein Beitrag zur Didaktischen Rekonstruktion der Analysis. *JMD* 29 (2008), 3/4.



Umsatzsteigerungs-graphen von „Klaus“

Entnommen aus:
HAHN, ST.; PREDIGER, S.: Bestand und Änderung – Ein Beitrag zur Didaktischen Rekonstruktion der Analysis. *JMD* 29 (2008), 3/4.

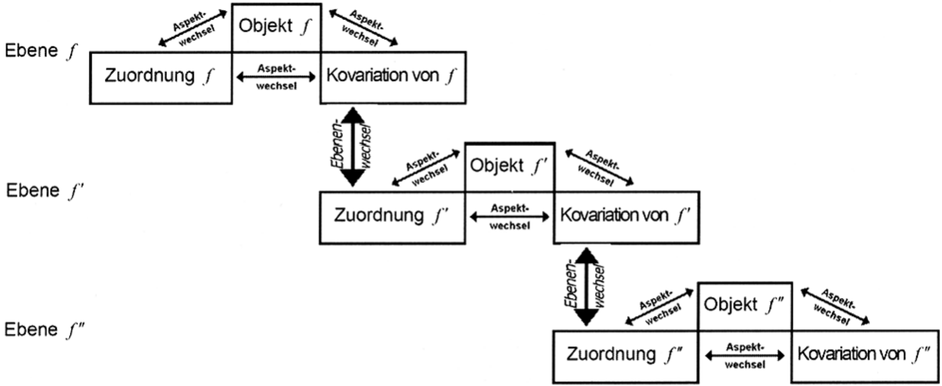


Wendepunkt und Extrempunkt selbst erfunden - Einteilung des Produktlebenszyklus in charakteristische Phasen von „Martina“ und „Henner“:

Anlaufphase — Bekanntwerden — Konsumphase — Jetzt-habens-alle-und-keiner-braucht-es-mehr-deshalb-gehen-die-Verkaufszahlen-runter-Phase

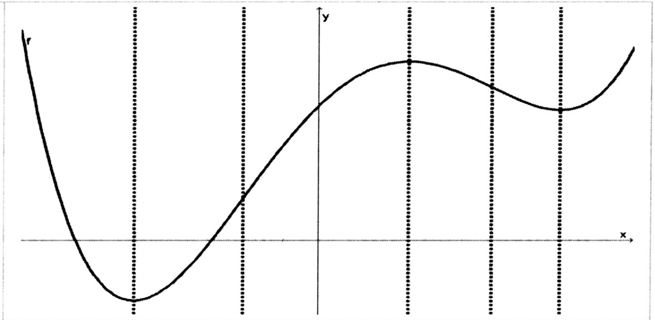
Entnommen aus:
HAHN, ST.; PREDIGER, S.: Bestand und Änderung – Ein Beitrag zur Didaktischen Rekonstruktion der Analysis. *JMD* 29 (2008), 3/4.

Ebenen- und Aspektwechsel als Herausforderungen der Analysis



Entnommen aus:
HAHN, ST.; PREDIGER, S.: Bestand und Änderung – Ein Beitrag zur Didaktischen Rekonstruktion der Analysis. *JMD* 29 (2008), 3/4.

Qualitative Aspekte von Ableitungen



Änderungsverhalten des Bestands	nimmt ab	nimmt zu		nimmt ab		nimmt zu
Änderungsverhalten der Änderung des Bestands	nimmt zu		nimmt ab		nimmt zu	
Qualität des Wachstums	gegensinnig	gleichsinnig	gegensinnig	gleich-sinnig	gegen-sinnig	gleich-sinnig

Die Qualität des Wachstums ändert sich an den Extrem- und Wendestellen

HAHN, ST.; PREDIGER, S.: Bestand und Änderung – Ein Beitrag zur Didaktischen Rekonstruktion der Analysis. *JMD* 29 (2008), 3/4.

Schritte hin zum gängigen Ableitungskonzept

Absolute Änderung im Zeitraum [x_0, x_0+h] $f(x_0+h)-f(x_0)$	**Durchschnittliche Änderung pro Zeiteinheit im Zeitraum [x_0, x_0+h]** $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$	**Momentane Änderung pro Zeiteinheit zum Zeitpunkt x_0** $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
konkrete Änderung des Bestands im Zeitraum [x_0, x_0+h]	durchschnittliche konkrete Änderung des Bestands pro Zeiteinheit im Zeitraum [x_0, x_0+h]	Momentane konkrete Änderung des Bestands pro Zeiteinheit zum Zeitpunkt x_0
Ratenbildung	Grenzwertbildung	

HAHN, ST.; PREDIGER, S.: Bestand und Änderung – Ein Beitrag zur Didaktischen Rekonstruktion der Analysis. *JMD* 29 (2008), 3/4.

Ableitungen von Funktionen

Funktionales Denken und Propädeutik der Analysis

Qualitative Aspekte des Verständnisses von Ableitungen
- Defizite beim Verständnis des Ableitungsbegriffs

Exaktifizierung des Ableitungsbegriffs – Zugänge
- Anstieg einer Kurve in einem Punkt / Tangentenproblem
- Änderungsrate einer Funktion
- Lineare Approximation

Umsetzungsmöglichkeiten in der Schule
- Datenorientierter Zugang über Geschwindigkeiten / Beschleunigungen

Rechnen mit Ableitungen

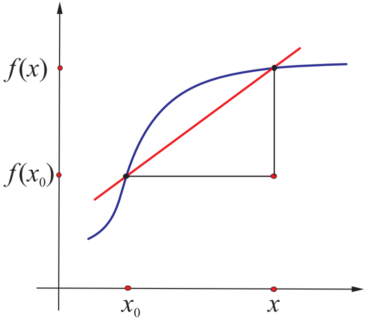
Sätze über stetige und differenzierbare Funktionen

Exaktifizierung des Ableitungsbegriffs – Zugänge

- Anstieg einer Kurve in einem Punkt bzw. Tangentenproblem (LEIBNIZ, 1646-1716)
- Änderungsrate einer Funktion (NEWTON 1643-1727)
- Lineare Approximation

Tangentenproblem

Funktion f sei in einem Intervall $]a,b[$ definiert; $x_0, x \in]a,b[$.



- Anstieg der Sekante in $[x_0, x]$: $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
- Anstieg der Tangente in $(x_0 \mid f(x_0))$: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
- Veranschaulichung des Grenzübergangs mithilfe des Computers

Änderungsrate einer Funktion

- Durchschnittliche (mittlere) Änderungsrate von f in $[x_0, x]$:
  $$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
- Lokale (momentane) Änderungsrate von f in x_0:
  $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$
- Existiert dieser Grenzwert, so ist es auch der Anstieg von f in $(x_0 \mid f(x_0))$

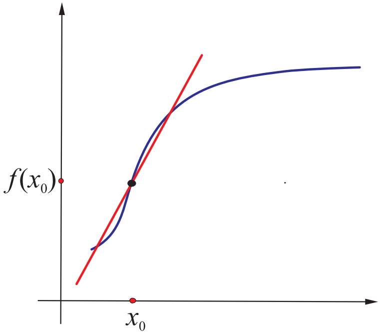
Kinematische Interpretation

- Newton: Bewegung eines Massepunktes P auf einer Geraden
- Durchschnittsgeschwindigkeit von P: $v(t) = \dfrac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$
- Momentangeschwindigkeit von P: $v(t_0) = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}$

Lineare Approximation

Ziel:

„Optimale" Approximation einer Funktion f durch eine lineare Funktion
(Mit linearen Funktionen lässt sich leichter arbeiten.)



Lineare Approximation ist ein grundlegendes Konzept in der Mathematik.

Lineare Approximation

Geg.: Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Ges.: lineare Funktion $l: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

- $l(x_0) = f(x_0)$ und
- $l(x) = m \cdot (x - x_0) + f(x_0)$ für ein geeignetes $m \in \mathbb{R}$

- Absoluter Approximationsfehler: $a(x) = f(x) - l(x)$
  (Falls f stetig in x_0, so gilt $\lim\limits_{x \to x_0} a(x) = 0$).
- Relativer Approximationsfehler:
  $$r(x) = \frac{f(x) - l(x)}{x - x_0} = \frac{f(x) - m(x - x_0) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m$$
- l approximiert „optimal“, wenn $r(x)$ in der Nähe von x_0 „klein“ ist,
- d. h., wenn $\lim\limits_{x \to x_0} r(x) = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m$.
- l approximiert f in x_0 optimal, falls l die Tangente an f beschreibt.

Zusammenfassung der Zugänge zum Ableitungsbegriff

- Alle drei Ansätze führen zu dem Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$
- Präzisierung dieser Ideen führt zu einer Definition.

Definition: $D \subseteq \mathbb{R},\ f: D \to \mathbb{R},\ x_0 \in D$

f heißt differenzierbar (ableitbar) in x_0 :$\Leftrightarrow$ es existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit

$$c = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Gern wird die folgende Schreibweise verwendet:

$$c = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Grenzwert einer Funktion an einer Stelle

Problem:

Um die Differenzierbarkeit einer Funktion an einer Stelle zu verstehen, ist der Grenzwert einer Funktion an einer Stelle notwendig.

Die beiden gebräuchlichsten Definitionen:

- „ε-δ-Definition“
- „Folgendefinition“

Die „ε-δ-Definition“ gilt als besonders schwierig, während die „Folgendefinition“ anschaulicher ist.

Rahmenlehrplan (Berlin): „Grenzwerte (von Zahlenfolgen und Funktionen) auf der Grundlage eines propädeutischen Grenzwertbegriffs insbesondere bei der Bestimmung von Ableitung und Integral nutzen.“

Ableitungen von Funktionen

Funktionales Denken und Propädeutik der Analysis

Qualitative Aspekte des Verständnisses von Ableitungen
- Defizite beim Verständnis des Ableitungsbegriffs

Exaktifizierung des Ableitungsbegriffs – Zugänge
- Anstieg einer Kurve in einem Punkt / Tangentenproblem
- Änderungsrate einer Funktion
- Lineare Approximation

Umsetzungsmöglichkeiten in der Schule
- Datenorientierter Zugang über Geschwindigkeiten / Beschleunigungen

Rechnen mit Ableitungen

Sätze über stetige und differenzierbare Funktionen

Umsetzungsmöglichkeiten in der Schule

Zugänge zum Ableitungsbegriff

- Anstieg einer Kurve in einem Punkt bzw. Tangentenproblem
- Änderungsrate einer Funktion
- Lineare Approximation

Welcher dieser Zugänge ist für die Schule am besten geeignet?

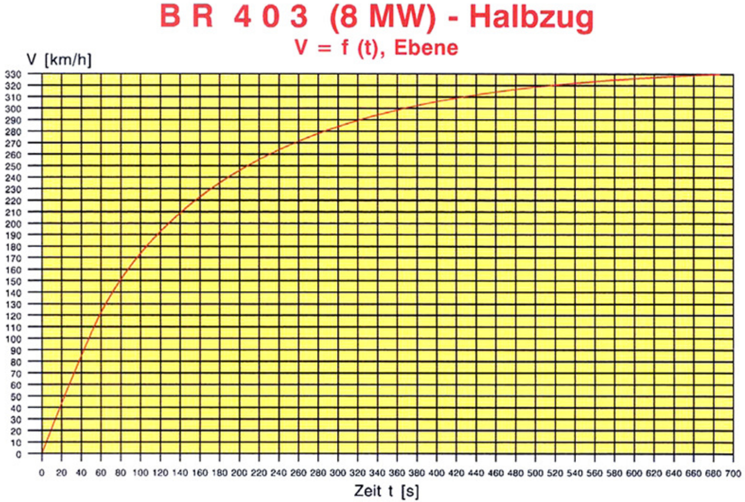
- Alle drei Zugänge haben eine gewisse Bedeutung; vor allem Anstiege / Tangenten können auch bei anderen „primären“ Zugängen der geometrischen Interpretation / Veranschaulichung dienen.
- Zugang über Änderungsraten hat einige Vorteile:
  - Anwendungsbeispiele, Anknüpfung an „Alltagserfahrungen“
  - Bezüge zu den Aspekten funktionalen Denkens
  - „Bestand und Änderung“ – tragfähiger Zugang zu Ableitung *und* Integral
  - Interpretationsmöglichkeit nicht nur der ersten, sondern auch der zweiten Ableitung (Änderung der Änderungsrate)

Umsetzungsmöglichkeiten in der Schule

„Die Ableitung ist sowohl als lokale Änderungsrate als auch als Tangentensteigung zu deuten“ (Rahmenlehrplan Berlin, S. VII).

- Zugänge über Wege / Geschwindigkeiten / Beschleunigungen eignen sich gut für Einstiege in die Analysis.
- Siehe u. a. DANCKWERTS, R.; VOGEL, D.: *Analysis verständlich unterrichten*. Spektrum, 2006, S. 51ff.
- Sinnvoll: geometrische Interpretation (Sekanten $\rightarrow$ Tangenten) simultan mit berücksichtigen.
- Der im Folgenden vorgestellte Zugang wurde in ähnlicher Form von H.-W. HENN (TU Dortmund) vorgeschlagen.

Datenblatt ICE



Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm:
Geschwindigkeit $v = f(t)$ in Abhängigkeit von der Zeit t

Konkrete Daten:

a. $0\,\mathrm{s}$ bis $100\,\mathrm{s}$: ICE beschleunigt von $0\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ auf $173\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$

b. $100\,\mathrm{s}$ bis $200\,\mathrm{s}$: ICE bescheunigt von $173\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ auf $245\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$

c. $200\,\mathrm{s}$ bis $300\,\mathrm{s}$: ICE beschleunigt von $245\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ auf $285\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$

Quantifizierung der Beschleunigungsaussage:

Geschwindigkeitszunahme von $y\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ in $x\,\mathrm{s}$, also

a. $$\frac{173\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}{100\,\mathrm{s}}$$

b. $$\frac{245\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} - 173\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}{200\,\mathrm{s} - 100\,\mathrm{s}} = \frac{72\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}{100\,\mathrm{s}}$$

c. $$\frac{285\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} - 245\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}{300\,\mathrm{s} - 200\,\mathrm{s}} = \frac{40\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}{100\,\mathrm{s}}$$

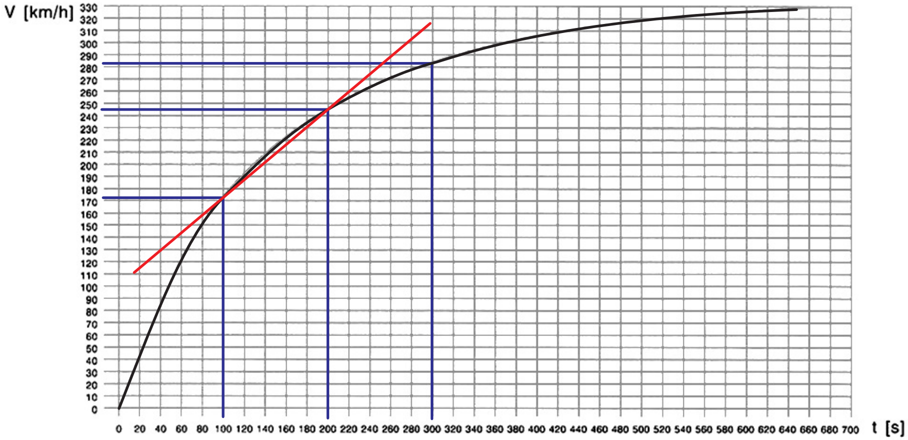
Bemerkungen:

- Es handelt sich um „mittlere Beschleunigungen“ für $100\,\mathrm{s}$-Zeitintervalle.
- Einheit $\frac{\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}{\mathrm{s}}$ wird üblicherweise in $\frac{m}{\mathrm{s}^2}$ umgerechnet, z. B.:

$$\frac{173\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}{100\,\mathrm{s}} = \frac{173 \cdot \frac{1000\,\mathrm{m}}{3600\,\mathrm{s}}}{100\,\mathrm{s}} = \frac{173\,\mathrm{m}}{360\,\mathrm{s}^2} \approx 0{,}481\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Umsetzungsmöglichkeiten in der Schule

- Die mittlere Beschleunigung zwischen 100 s und 200 s lässt sich als Steigung der Geraden durch die beiden Datenpunkte deuten.



- Die mittlere Beschleunigung entspricht der Änderung der Geschwindigkeit im Zeitintervall von 100 s und 200 s.

Umsetzungsmöglichkeiten in der Schule

Eine genauere Aussage über das Beschleunigungsverhalten bei $t = 100\,\mathrm{s}$ erhält man durch mittlere Änderungsraten wie

$$\frac{v(110\,\mathrm{s}) - v(100\,\mathrm{s})}{110\,\mathrm{s} - 100\,\mathrm{s}} \quad \text{oder} \quad \frac{v(100\,\mathrm{s}) - v(90\,\mathrm{s})}{100\,\mathrm{s} - 90\,\mathrm{s}}$$

oder allgemein

$$\frac{v(t_1) - v(100\,\mathrm{s})}{t_1 - 100\,\mathrm{s}} \quad \text{mit} \quad t_1 \neq 100\,\mathrm{s}$$

Anschaulich ist klar:

Wird das Zeitintervall kleiner, so wird die Beschleunigungsaussage genauer.

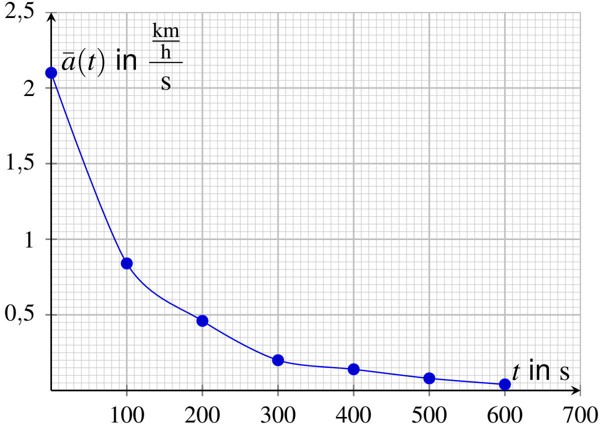
Durchschnittliche Beschleunigung im Intervall $[t; t + \Delta t]$:

$$\bar{a}(t) = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

Aus dem ICE-Diagramm lassen sich einige Werte für $\Delta t = 50\,\mathrm{s}$ ablesen:

t in s	$v(t)$ in $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$	$v(t+\Delta t)$ in $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$	$\bar{a}(t)$ in $\frac{\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}}{\mathrm{s}}$
0	0	105	2,10
100	173	215	0,84
200	245	268	0,46
300	285	295	0,20
400	305	312	0,14
500	319	323	0,08
600	327	329	0,04

Graph der Funktion $t \to \bar{a}(t)$
(für die mittleren Beschleunigungen $\bar{a}(t)$ mit $\Delta t = 50\,\mathrm{s}$)



Umsetzungsmöglichkeiten in der Schule

Man verbessert die Aussage, indem man die Intervalle Δt immer kleiner wählt. Anschaulich bedeutet das:

- Übergang von der mittleren zur lokalen Beschleunigung
- Übergang von der mittleren zur lokalen Änderungsrate
- Übergang von der Steigung der Sekanten zur Steigung der Tangenten („Tangente“ in anschaulichem, nicht präzisem Sinne)

Mathematisch stellt sich an dieser Stelle das Problem des Grenzwerts:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \quad (\Delta t \neq 0)$$

In dem Beispiel ist die Existenz des Grenzwerts *anschaulich* recht klar.

Die Existenz dieses Grenzwertes ist gleichbedeutend damit, dass der Graph „lokal linear“ ist, d. h. beim „Zoomen“ auf einen Punkt des Graphen wird der Graph zu einer Geraden.

Ableitungen von Funktionen

Funktionales Denken und Propädeutik der Analysis

Qualitative Aspekte des Verständnisses von Ableitungen

Defizite beim Verständnis des Ableitungsbegriffs

Exaktifizierung des Ableitungsbegriffs – Zugänge

Anstieg einer Kurve in einem Punkt / Tangentenproblem

Änderungsrate einer Funktion

Lineare Approximation

Umsetzungsmöglichkeiten in der Schule

Datenorientierter Zugang über Geschwindigkeiten / Beschleunigungen

Rechnen mit Ableitungen

Sätze über stetige und differenzierbare Funktionen

Rechnen mit Ableitungen

Ausgangspunkt:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

- Grenzwert kann unterschiedlich fundiert behandelt worden sein: „propädeutische Einführung“, Folgen oder „ε-δ-Definition“

$\rightarrow$ Unterschiede GK-LK

- Was muss zur Verfügung stehen, wenn mit dem Differentialquotienten gearbeitet werden soll?

$\rightarrow$ Grenzwertsätze sind unverzichtbar:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to x_0} (f(x) + g(x)) &= \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) \\
\lim_{x\to x_0} (c \cdot g(x)) &= c \cdot \lim_{x\to x_0} f(x) \\
\lim_{x\to x_0} (f(x) - g(x)) &= \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x) \\
\lim_{x\to x_0} (f(x) \cdot g(x)) &= \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) \\
\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} \quad (\text{Vor.: } g(x) \neq 0 \text{ in einer } \varepsilon\text{-Umg. von } x_0)
\end{aligned}$$

Rechnen mit Ableitungen

Ableitungen elementarer Funktionen

- f mit $f(x) = x^2$
- f mit $f(x) = x^n \ (n \in \mathbb{N})$
  (allgemeiner: $n \in \mathbb{Z}$)
- f mit $f(x) = \sqrt{x}$
- f mit $f(x) = x^n \ (n \in \mathbb{Q})$
- f mit $f(x) = \mathrm{e}^x$
  (Verallgemeinerung: a^x)
- f mit $f(x) = \ln(x)$
  (Verallgemeinerung: $\log_a x$)
- trigonometrische Funktionen

Ableitungsregeln

- Summen, Differenzen, konstanter Faktor
- Produktregel
- g mit $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$
- Quotientenregel
- Kettenregel
- Ableitungsregel für Umkehrfunktionen

Herleitung der Produktregel

- Nahe liegende Vermutung:

  $(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g'(x)$

- Entkräftung:

  $f(x) = x, \;\; g(x) = x$

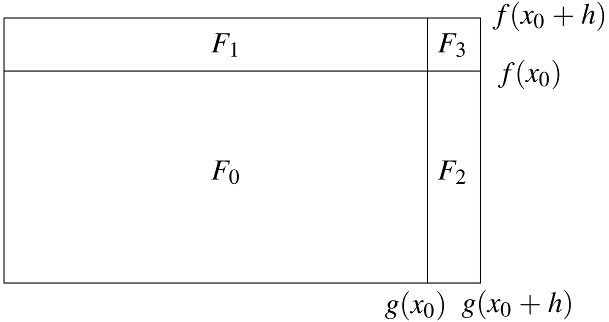
  $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = x^2$

  $(f \cdot g)'(x) =$

  $f'(x) \cdot g'(x) =$

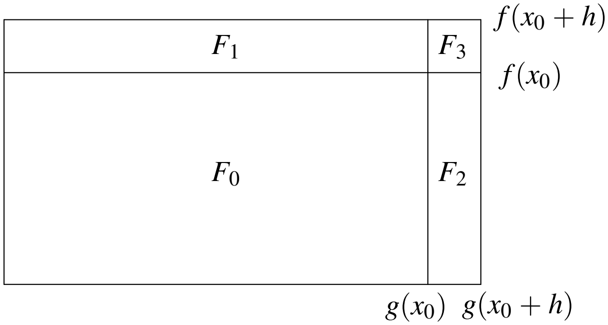
Herleitung der Produktregel – „Ikonisieren als Findungsheuristik“

- Veranschaulichung von Produkten als Flächeninhalte
- Zuordnung von Flächeninhalten F zu $f \cdot g$



Man entnimmt der Zeichnung:

$$(f \cdot g)(x_0+h) - (f \cdot g)(x_0) \;=\; F(x_0+h) - F(x_0) = F_1 + F_2 + F_3$$



$$
\begin{aligned}
(f\cdot g)(x_0+h)-(f\cdot g)(x_0) &= F(x_0+h)-F(x_0)=F_1+F_2+F_3\\
&= \big(f(x_0+h)-f(x_0)\big)\cdot g(x_0) \;+\; f(x_0)\cdot\big(g(x_0+h)-g(x_0)\big)\\
&\quad + \big(f(x_0+h)-f(x_0)\big)\cdot\big(g(x_0+h)-g(x_0)\big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{(f\cdot g)(x_0+h)-(f\cdot g)(x_0)}{h} &= \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot g(x_0) \;+\; f(x_0)\cdot\frac{g(x_0+h)-g(x_0)}{h}\\
&\quad + \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\cdot\big(g(x_0+h)-g(x_0)\big)
\end{aligned}
$$

Eine anspruchsvolle Klausuraufgabe

Ist eine Funktion f differenzierbar an einer Stelle x_0 und gilt $f'(x_0) \neq 0$, so ist auch die Funktion g mit $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ differenzierbar an der Stelle x_0 und es gilt:

$$g'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{\left(f(x_0)\right)^2}$$

a) Beweisen Sie diesen Satz mit Hilfe des Differenzenquotienten.

b) Welche Bedeutung hat der Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit für den Beweis des Satzes?

Ableitungen von Funktionen

Funktionales Denken und Propädeutik der Analysis

Qualitative Aspekte des Verständnisses von Ableitungen

- Defizite beim Verständnis des Ableitungsbegriffs

Exaktifizierung des Ableitungsbegriffs – Zugänge

- Anstieg einer Kurve in einem Punkt / Tangentenproblem
- Änderungsrate einer Funktion
- Lineare Approximation

Umsetzungsmöglichkeiten in der Schule

- Datenorientierter Zugang über Geschwindigkeiten / Beschleunigungen

Rechnen mit Ableitungen

Sätze über stetige und differenzierbare Funktionen

Sätze über stetige und differenzierbare Funktionen

(Nicht nur) theoretische Grundlage für Kurvendiskussionen

Sätze über stetige Funktionen

- Zwischenwertsatz (Spezialfall: Nullstellensatz von Bolzano)
- Satz vom Minimum und Maximum

Sätze über differenzierbare Funktionen

- Differenzierbarkeit $\to$ Stetigkeit
- Satz von Rolle, Mittelwertsatz
- Monotoniesatz
- Kriterien für lokale Extrema und Wendepunkte

Aufgaben zum Satz von Rolle und zum Mittelwertsatz

1. Belegen Sie durch ein Beispiel, dass man im Satz von Rolle *nicht* formulieren kann: Es existiert *genau* ein x_0 mit $a < x_0 < b$ und $f'(x_0) = 0$.

2. Es sei f eine beliebige quadratische Funktion. Zeigen Sie, dass die Sekante von f in einem beliebigen Intervall $[a;b]$ parallel zur Tangente an f an der Stelle x_0 verläuft, wobei x_0 der Mittelpunkt von $[a;b]$ ist.

3. Untersuchen Sie für die folgenden Funktionen, ob es im Intervall $[a;b]$ eine Stelle x_0 gibt, an der die Tangente an f parallel zur Sekante in $[a;b]$ verläuft.

- **a)** $f(x) = \sqrt{x}\,, \quad [a;b] = [1;4]$
- **b)** $f(x) = x^3\,, \quad [a;b] = [-3;3]$

4. Sie wissen bereits, dass die Ableitung einer auf $\mathbb{R}$ konstanten Funktion f die Funktion f' mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ ist.

- **a)** Formulieren Sie die Umkehrung dieser Aussage.
- **b)** Beweisen Sie diese Aussage. Wenden Sie dazu den Mittelwertsatz auf eine Funktion an, deren Ableitung überall Null ist.