Didaktik der Analysis und der Analytischen Geometrie/ Linearen Algebra

5. Integralrechnung

A. Filler

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik

Sommersemester 2016

Internetseite zur Vorlesung: http://didaktik.mathematik.hu-berlin.de/index.php?article_id=331

oder über: http://www.mathematik.hu-berlin.de/˜filler/

Der Integralbegriff / Integralrechnung

Zugänge zum Integral

- Überblick
- Integration als Rekonstruktion von Beständen
- Systematisierung: „Auf dem Weg“ zur Integralfunktion

Exaktifizierung des Integralbegriffs

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Zugänge zum Integral

Mögliche Zugänge zum Integralbegriff:

- Bestimmung von (orientierten!) Flächeninhalten bzw. Flächeninhaltsfunktionen unter Funktionsgraphen (Ober- und Untersummen – Riemann-Integral)
- Bestimmung von Stammfunktionen (Umkehrung des Ableitens)
- „Rekonstruktion“ von Beständen aus Änderungen

Alle drei Aspekte sind bei der Behandlung der Differentialrechnung von Bedeutung und sollten berücksichtigt werden.

Aber: In welcher Reihenfolge und mit welcher Gewichtung?

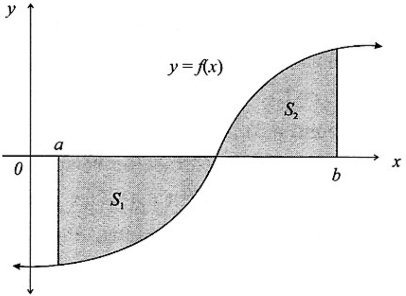
Zugänge zum Integral

Mögliche Zugänge zum Integralbegriff:

- Bestimmung von (orientierten!) Flächeninhalten bzw. Flächeninhaltsfunktionen unter Funktionsgraphen (Ober- und Untersummen)
- Bestimmung von Stammfunktionen (Umkehrung des Ableitens)
- „Rekonstruktion" von Beständen aus Änderungen

- „Klassischer Zugang", der nach wie vor einen wichtigen Aspekt bei der Behandlung des Integrals darstellen sollte
- ABER: Gefahr der Identifikation: „Integral = Flächeninhalt"
- Häufig Vernachlässigung der Orientierung

Zugänge zum Integral



S_1 ist der Inhalt der Fläche, die von der x-Achse, der Geraden $x = a$ und dem Graphen von f eingeschlossen wird,

S_2 der Inhalt der Fläche, die von der x-Achse, der Geraden $x = b$ und dem Graphen von f eingeschlossen wird.

Es ist $a < b$ *und* $0 < S_2 < S_1$.

Der Wert des Integrals $\int_a^b f(x)\,dx$ *ist dann*

A.	$S_1 + S_2$	D.	$\lvert S_1 - S_2 \rvert$
B.	$S_1 - S_2$	E.	$\frac{1}{2}(S_1 + S_2)$
C.	$S_2 - S_1$		

Aufgabe aus TIMMS

Zugänge zum Integral

Mögliche Zugänge zum Integralbegriff:

- Bestimmung von (orientierten!) Flächeninhalten bzw. Flächeninhaltsfunktionen unter Funktionsgraphen (Ober- und Untersummen)
- Bestimmung von Stammfunktionen (Umkehrung des Ableitens)
- „Rekonstruktion“ von Beständen aus Änderungen

- Zu frühe analytische Definition des Riemann-Integrals

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} = O_n \qquad \left(\text{falls } \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} = O_n\right)$$

führt zu „Missverhältnis von begrifflichem und terminologischem Anspruch gegenüber realisiertem Niveau der Diskussion“ (KIRSCH)

Mögliche Zugänge zum Integralbegriff:

- Bestimmung von (orientierten!) Flächeninhalten bzw. Flächeninhaltsfunktionen unter Funktionsgraphen (Ober- und Untersummen)
- Bestimmung von Stammfunktionen (Umkehrung des Ableitens)
- „Rekonstruktion“ von Beständen aus Änderungen

- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung als Definition:

$$\int_a^b f(x)dx := F(b) - F(a) \quad \text{mit } F'(x) = f(x)$$

$\rightarrow$ einseitig rechnerische Orientierung

- Begrifflicher Zugang (was ist ein Integral?) kommt zu kurz.
- Hauptsatz der Diff.-/Int.-rechnung sollte eine Erkenntnis sein, wird aber zur Definition „degradiert“ $\rightarrow$ „antididaktische Inversion“.

Dennoch kann der Zusammenhang zwischen Integral und Ableitung bereits recht früh punktuell betrachtet werden, wenn er nahe liegt.

Zugänge zum Integral

Mögliche Zugänge zum Integralbegriff:

- Bestimmung von (orientierten!) Flächeninhalten bzw. Flächeninhaltsfunktionen unter Funktionsgraphen (Ober- und Untersummen)
- Bestimmung von Stammfunktionen (Umkehrung des Ableitens)
- „Rekonstruktion“ von Beständen aus Änderungen

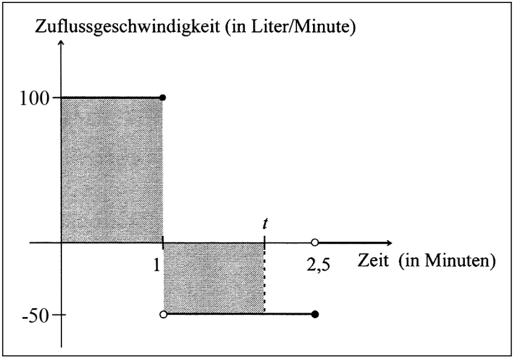
„Integrieren heißt Rekonstruieren“

(DANCKWERTS/VOGEL)

- Rekonstruktion von Beständen als Ausgangspunkt für die Herausbildung eines Grundverständnisses vom Integral.
- Die beiden anderen Aspekte lassen sich einbeziehen.

Ein Einstiegsbeispiel

In eine leere Badewanne wird eine gewisse Zeit Wasser eingelassen, dann die Wasserzufuhr gestoppt, gleichzeitig der Abfluss geöffnet und nach einer Weile wieder geschlossen:

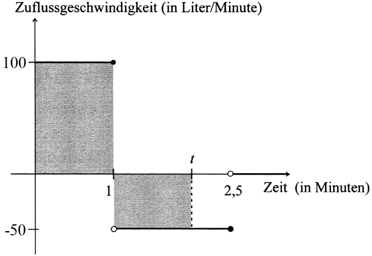


Wie viel Wasser befindet sich nach einer beliebigen Zeit t in der Wanne?

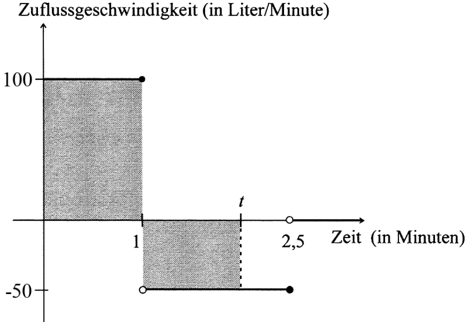
Stellen Sie die Wassermenge als (stückweise definierte) Funktion in Abhängigkeit von der Zeit dar und fertigen Sie einen Graphen dieser Funktion an.

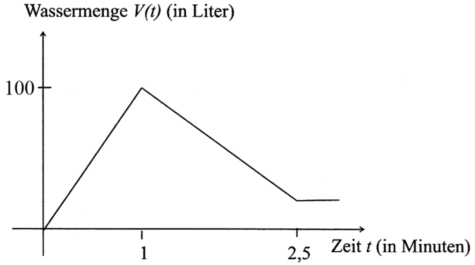
- Innerhalb der ersten Minute nimmt die Wassermenge V zu, in den darauf folgenden eineinhalb Minuten nimmt sie ab, danach ist sie konstant.
- Für $t < 1\,\mathrm{min}$ ist die zugeflossene Wassermenge $100 \cdot t$ (Liter).
- Für einen Zeitpunkt t während der Abflussphase ist von den in der ersten Minute zugeflossenen 100 Litern jene Menge abzuziehen, die wieder abgeflossen ist: $100 - 50 \cdot (t-1)$ (Liter).

$$V(t) = \begin{cases} 100\,t & \text{für} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 150 - 50\,t & \text{für} \quad 1 < t \leq 2,5 \\ 25 & \text{für} \quad t > 2,5 \end{cases}$$



Integration als Rekonstruktion von Beständen





Geometrische Deutung

- Die Produkte
  $100 \cdot t$ und
  $50 \cdot (t - 1)$
  sind Rechteckinhalte.
- In der Gesamtbilanz werden oberhalb der Zeitachse liegende Inhalte positiv und unterhalb liegende negativ gezählt.
- $V(t)$ ist eine Summe vorzeichenbehafteter Rechteckinhalte.

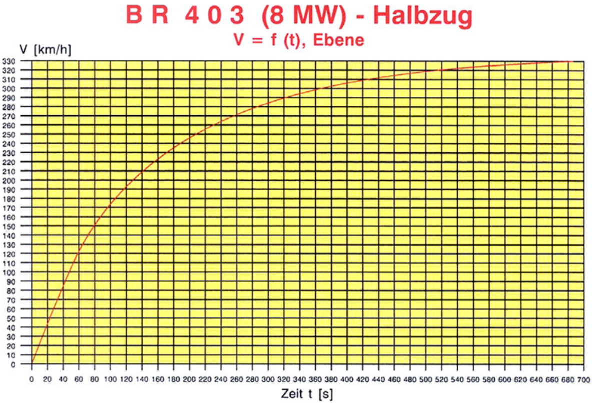
$\rightarrow$ orientierter Flächeninhalt

Rekonstruktion:

- *Aus der der Zuflussgeschwindigkeit* des Wassers zu jedem Zeitpunkt wird *auf die Wassermenge* in der Wanne zu jedem Zeitpunkt zurückgeschlossen.
- Zuflussgeschwindigkeit:
  Ableitung $V'(t)$ – momentane Änderungsrate der Wassermenge

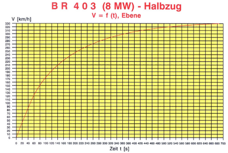
$\rightarrow$ Aus der Änderungsrate V' wird die Funktion V wiederhergestellt (rekonstruiert).

Ein weiteres Beispiel:
Rekonstruktion von Wegen aus Geschwindigkeiten



Aus dem Datenblatt soll (zunächst durch grobe Schätzungen, dann jedoch verfeinert) ermittelt werden, welchen Weg der ICE nach 100 s, 200 s, 300 s, 400 s und 500 s zurück gelegt hat.

Integration als Rekonstruktion von Beständen



a) Ermitteln Sie aus dem Diagramm minimale und maximale Werte für den nach 100 s, 200 s, 300 s, 400 s und nach 500 s zurückgelegten Weg.

b) Überlegen Sie, wie sich die unter a) ermittelten Werte verfeinern lassen, so dass die Differenzen zwischen den minimalen und maximalen Werten kleiner werden und somit eine genauere Aussage über die tatsächlich zurück gelegten Wege möglich wird.

c) Schätzen Sie unter Verwendung ihrer unter b) erhaltenen Werte, welchen Weg der ICE nach 100 s, 200 s, 300 s, 400 s und 500 s zurück gelegt hat.

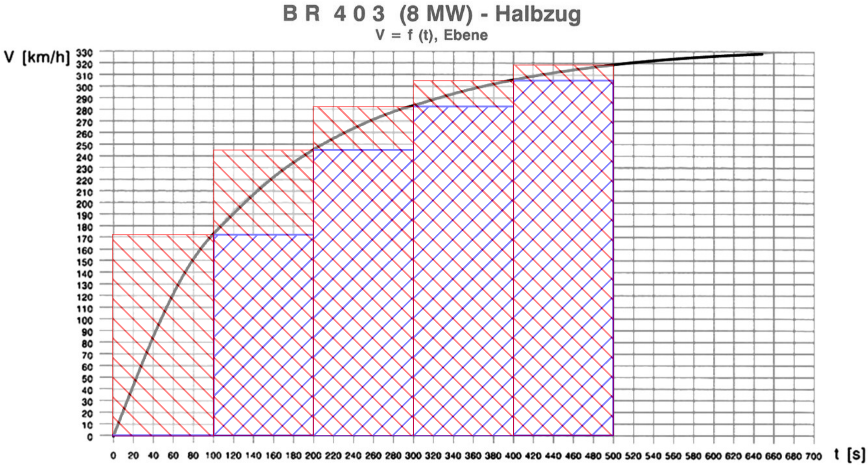
c) Skizzieren Sie auf der Grundlage ihrer Schätzwerte ein Weg-Zeit-Diagramm für die ersten 500 s nach dem Anfahren des ICE.

Rekonstruktion von Wegen aus Geschwindigkeiten

	Aufgabe a)		Aufgabe b)		Aufgabe c)
Zeit	min. Weg	max. Weg	min. Weg	max. Weg	etwa zurück gelegter Weg
100 s					
200 s					
300 s					
400 s					
500 s					

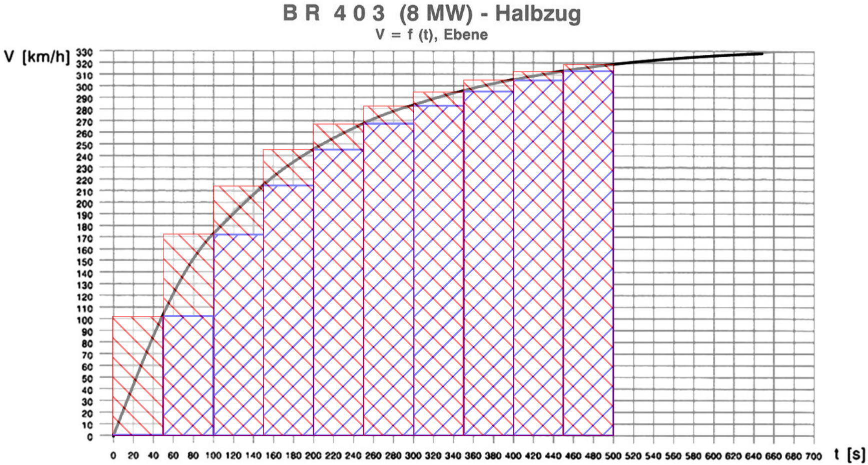
$\rightarrow$ Rekonstruktion von Wegen aus Geschwindigkeits(verläufen)

Geometrische Interpretation (Aufgabe a))



a) Ermitteln Sie aus dem Diagramm minimale und maximale Werte für den nach 100 s, 200 s, 300 s, 400 s und nach 500 s zurückgelegten Weg.

Geometrische Interpretation (Aufgabe b))



b) Überlegen Sie, wie sich die unter a) ermittelten Werte verfeinern lassen, so dass die Differenzen zwischen den minimalen und maximalen Werten kleiner werden und somit eine genauere Aussage ...

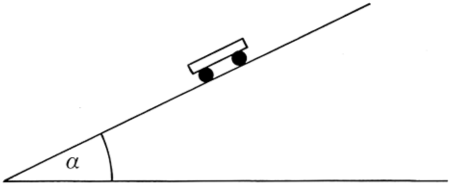
Rekonstruktion von Wegen aus Geschwindigkeiten

Potenzial des Beispiels

- Herstellung des Bezugs zu Flächeninhalten, ohne dass dies unmittelbar in dem Kontext der Aufgabe gegeben war
- Betrachtung von Ober- und Untersummen
- Annäherung an die Idee des Grenzübergangs:
  „Verfeinerung" führt zu genaueren Werten, „ideal" wäre $\Delta t \to 0$
- Vorbereitung einer (späteren) exakten Einführung des Integrals:
  $$s(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau = \lim_{\Delta t \to 0} U_n = \lim_{\Delta t \to 0} = O_n$$
- Ein und dasselbe Beispiel zur Einführung der Differential- und der Integralrechnung macht auf den Bezug aufmerksam.
- Übertragbarkeit auf andere Anwendungsbeispiele

Eine weitere Aufgabe zur Rekonstruktion von Wegen aus Geschwindigkeiten

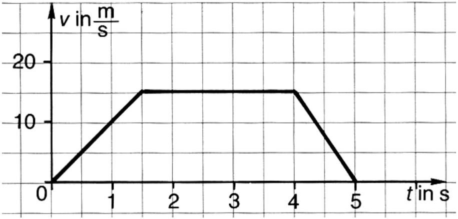
Ein Wagen, der (reibungslos) eine geneigte Ebene hinab fährt, führt eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung aus. Wenn die geneigte Ebene den Neigungswinkel α hat, erfährt der Wagen die Beschleunigung $a = g \cdot \sin\alpha$ ($g = 9,81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ist die Erdbeschleunigung).



- Zeichnen Sie für $\alpha = 30°$ ein v-t-Diagramm und bestimmen Sie aus dem Graphen, welchen Weg der Wagen nach 2 s, 4 s, 6 s, 8 s, 10 s zurücklegt, wenn er zum Zeitpunkt $t = 0$ losfährt.
- Skizzieren Sie anhand dieser Werte ein s-t-Diagramm für die ersten 10 Sekunden der Abfahrt.

Noch eine Aufgabe

Ein Wagen fährt eine geneigte Ebene hinab, anschließend bewegt er sich mit gleichförmiger Geschwindigkeit auf einer Waagerechten, bevor er eine andere geneigte Ebene hinauffährt, bis er zum Stillstand kommt. (Alle Bewegungen werden als reibungslos angenommen.) Die Abbildung unten zeigt das v-t-Diagramm der Bewegung.



- Welchen Weg hat der Wagen insgesamt (auf der ersten geneigte Ebene, in der Waagerechten, auf der zweiten geneigte Ebene) zurück gelegt?
- Skizzieren Sie ein s-t-Diagramm für die Bewegung des Wagens.

Beginn einer Systematisierung

Der Zusammenhang zwischen der „Rekonstruktion von Beständen“ und (orientierten) Flächeninhalten wurde bereits deutlich.

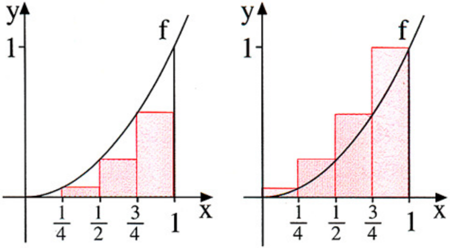
Aufgaben zur systematischen Erarbeitung von Zusammenhängen zwischen Funktionen und ihren „Flächeninhaltsfunktionen“ (später: Integral- bzw. Stammfunktionen):

- Geben Sie den Flächeninhalt $A(x)$ unter dem Graphen einer
  - konstanten
  - proportionalen
  - linearen Funktion

  über einem Intervall $[0; x]$ an.
- Auch Funktionen mit negativen Funktionswerten betrachten; „negative Flächeninhalte“ thematisieren (Bezug zum Wasserablauf).

Systematisierung: „Auf dem Weg“ zur Integralfunktion

- Abschätzung des Flächeninhalts unter dem Graphen der Funktion f mit $f(x) = x^2$ über dem Intervall $[0; 1]$ durch Bildung von Ober- und Untersummen



- Intervallverfeinerung, Grenzübergang(?)
- Verallgemeinerung auf Intervalle $[0; x_0]$
- f mit $f(x) = x^3$
- Den Zusammenhang zur Ableitung erkennen Schülerinnen und Schüler anhand dieser Beispiele erfahrungsgemäß selbst.

Der Integralbegriff / Integralrechnung

Zusammentragen bisheriger Erkenntnisse

Funktion f mit	Flächeninhaltsfunktion A mit
$f(x) = c$	$A(x) = c \cdot x$
$f(x) = a \cdot x$	$A(x) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot x^2$
$f(x) = x^2$	$A(x) = \frac{1}{3} \cdot x^3$
$f(x) = x^3$	$A(x) = \frac{1}{4} \cdot x^4$

Weitere Schritte

- Thematisierung des Vorzeichens – orientierte Flächeninhalte

$\rightarrow$ besonders elementar bei konstanten Funktionen

- Bestimmung weiterer Ober- und Untersummen

$\rightarrow$ Experimente mit dem PC (z. B. Geogebra)

- Diskussion des Zusammenhangs zur Ableitung

Exaktifizierung des Integralbegriffs

Definitionen

Eine Funktion f sei in einem Intervall $[a, b]$ definiert und beschränkt.
$\zeta = [t_0, \ldots, t_n]$ sei eine Zerlegung von $[a, b]$.

Untersumme von f bei der Zerleg. ζ: $\underline{S}f(\zeta) = \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \cdot \inf_{x \in [t_i, t_{i+1}]} f(x)$

Obersumme von f bei der Zerleg. ζ: $\overline{S}f(\zeta) = \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \cdot \sup_{x \in [t_i, t_{i+1}]} f(x)$

Probleme

- Warum untere und obere Grenze (inf, sup) und nicht min, max?

$\rightarrow$ für stetige Funktionen kein Unterschied

- Gegenbeispiele wirken für Schüler eher „gekünstelt“

Alternative:

Sei f eine in $[a; b]$ definierte Funktion, die in jedem abgeschlossenen Teilintervall von $[a; b]$ ein Minimum und ein Maximum besitzt. . . .

Exaktifizierung des Integralbegriffs

Exakte (und allgemeine) Definitionen von Ober- und Unterintegral:

Die untere Grenze der Menge aller Obersummen heißt Oberintegral (Infimum aller Obersummen).

Die obere Grenze der Menge aller Untersummen heißt Unterintegral (Supremum aller Untersummen).

$\rightarrow$ Erneut Infimum und Supremum

- Außerdem:
  inf bzw. sup *beliebiger* Ober- bzw. Untersummen schwer fassbar
- Nur „konkrete“ Zerlegungen können rechnerisch nachvollzogen werden (sowohl endlich als auch unendlich)

Leichter nachvollziehbar:

- Beschränkung auf äquidistante Zerlegungen (in n Teilintervalle)
- Betrachtung des Grenzwertes $n \rightarrow \infty$
  (bzw. „riesig groß werdender“ n)

Exaktifizierung des Integralbegriffs

Sind Ober- und Unterintegral gleich, dann heißt die Funktion f in $[a, b]$ integrierbar und der gemeinsame Wert von Ober- und Unterintegral heißt bestimmtes (Riemann-)Integral von f in $[a, b]$.

- Das bestimmte Integral ist eine Zahl.
- Es wird mit folgendem Symbol bezeichnet,

  das auf Cauchy zurückgeht: $\int_a^b f(x)\, dx$

Exaktifizierung des Integralbegriffs

Beispiel dafür, dass Ober- und Unterintegral verschieden sein können:

Sei $[a,b] = [0,1]$ und $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x \text{ rational} \\ 2 & \text{falls } x \text{ irrational} \end{cases}$

Sei $\zeta = (t_0, \ldots, t_n)$ eine beliebige Zerlegung von $[0,1]$.

Dann existiert in jedem Teilintervall wenigstens eine rationale Zahl und eine irrationale Zahl.

$\rightarrow$ In jedem Teilintervall ist $\inf f(x) = 1$ und $\sup f(x) = 2$.

Damit ist jede Untersumme

$$\underline{S}f(\zeta) = \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \cdot \inf_{x \in [t_i, t_{i+1}]} f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} (t_{i+1} - t_i) \cdot 1 = (b-a) \cdot 1 = 1$$

Analog ergibt sich für jede Obersumme 2.

Supremum der Menge aller Untersummen ist 1,
Infimum der Menge aller Obersummen ist 2.

Sind Ober- und Unterintegral gleich, dann heißt die Funktion f in $[a, b]$ integrierbar und der gemeinsame Wert von Ober- und Unterintegral heißt bestimmtes (Riemann-)Integral von f in $[a, b]$.

Alternative:

Sei f eine in einem Intervall $[a; b]$ definierte Funktion, die in jedem abgeschlossenen Teilintervall von $[a; b]$ einen kleinsten und einen größten Funktionswert hat.

Haben die Folge (U_n) der Untersummen und die Folge (O_n) der Obersummen einen gemeinsamen Grenzwert, d. h.

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} O_n,$$

so heißt dieser gemeinsame Grenzwert bestimmtes Integral der Funktion f im Intervall $[a; b]$: $\int_a^b f(x)\,dx$

- Bei dieser Definition werden bereits, ohne dies explizit zu erwähnen, spezielle Folgen von Unter- und Obersummen vorausgesetzt.

Definition der Integralfunktion:

Sei f integrierbar über $[a,x]$ für alle $x \in [a,b]$, so heißt

$$F_a : x \to F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \text{für } x \in [a,b]$$

Integralfunktion von f zur unteren Grenze a und oberen Grenze x.

Der Integralbegriff / Integralrechnung

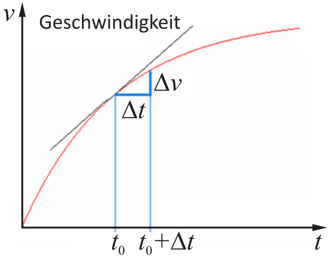
Zugänge zum Integral

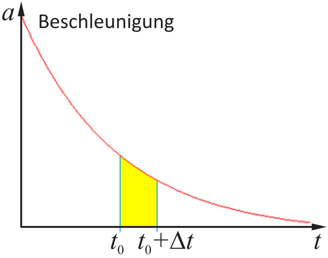
- Überblick
- Integration als Rekonstruktion von Beständen
- Systematisierung: „Auf dem Weg“ zur Integralfunktion

Exaktifizierung des Integralbegriffs

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Anschaulicher Zusammenhang von Ableiten und Integrieren





Änderungsrate $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

Lokale Änderungsrate für $\Delta t \to 0$,

geometrische Deutung: Tangentensteigung

Allgemein:
Aus Bestandsfunktion F die Änderungsratenfunktion $f = F'$ ermitteln.

Geschwindigkeits„gewinn“ $\approx a(t) \cdot \Delta t$

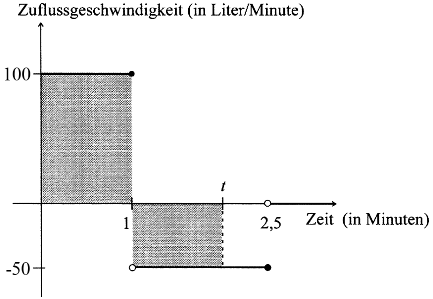
Für $\Delta t \to 0$: $v(t + \Delta t) = v(t) + a(t) \cdot \Delta t$

Rekonstruktion der Geschwindigkeitsfunktion aus den Änderungsraten

Allgemein:
Aus Änderungsfunktion f die Bestandsfunktion $F = \int f$ ermitteln.

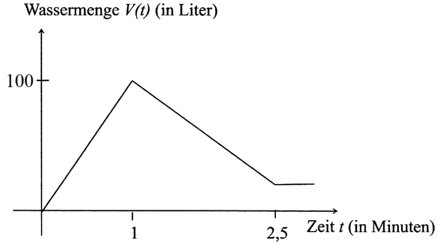
Zusammenhang von Ableiten und Integrieren

Auch anhand des Beispiels „Badewanne“ lässt sich der Zusammenhang von Ableiten und Integrieren rückblickend diskutieren.



$\rightarrow$ Anschauliche „Erfahrung“:

Ableiten und Integrieren sind „Umkehroperationen“.



- Die gleich lautende „rechnerische Erfahrung“ sollte ebenfalls bereits gemacht worden sein.

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Der Begriff „Stammfunktion“

Definition:

Seien f, F Funktionen, definiert in einem Intervall $[a;b]$.

F ist eine Stammfunktion von f in $[a;b]$, wenn F differenzierbar in $[a;b]$ ist und $F' = f$ gilt.

Satz:

Sind F_1, F_2 Stammfunktionen einer Funktion f in einem Intervall $[a;b]$, dann unterscheiden sich F_1 und F_2 höchstens um eine additive Konstante.

- Beispiele betrachten
- Begründung finden
- Analoge Überlegungen ggf. vorher schon bei „Flächeninhaltsfunktionen“ anstellen

Der Begriff „Stammfunktion“ Begriffe

- *Eine* Stammfunktion $F(x) = \int f(x)\,dx$: Funktion F, deren Ableitung f ist
- *Alle* Stammfunktionen: $F(x) = \int f(x)\,dx + c\,,\ c \in \mathbb{R}$
- Bestimmtes Integral: $\int_a^b f(x)\,dx$ mit $a, b \in \mathbb{R}$
- Integralfunktion: $F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt$

Untersuchen Sie diese Begriffe in Hinblick auf die Funktion F mit $F(x) = \sin(x) + c\,,\ c \in \mathbb{R}$.

– Für welche c ist F Stammfunktion?

– Für welche c ist F Integralfunktion?

Die Hauptsätze der Differential- und Integralrechnung – Singular/Plural?

Zwei (zusammenhängende) Fragen:

1. Wie lässt sich ermitteln, ob eine Funktion f eine Stammfunktion besitzt? Wenn ja, wie lässt sich eine Stammfunktion bestimmen?
2. Wie lässt sich eine Funktion F aus ihrer als bekannt angenommenen Änderungsrate F' allgemein rekonstruieren?

Zwei Antworten (Hauptsätze):

1. f sei stetig in $[a;b]$ und es sei $F_a(x) := \int_a^x f(t)\,dt$, $x \leq b$. Dann gilt $F_a'(x) = f(x)$ für alle $x \in [a;b]$.

$\rightarrow$ Integralfunktion ist bei stetigen Fkt. diff.bar und eine Stammfkt.

2. Sei f integrierbar über $[a;b]$ und F eine beliebige Stammfkt. von f. Dann gilt für $a \leq x \leq b$: $F_a(x) = \int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$

$\rightarrow$ Best. Int. $\int_a^b f(x)dx$ lassen sich mithilfe einer bel. St.fkt. berechnen.

Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

- Es lässt sich auch folgende Formulierung finden (Schulb. VuW):

  Ist f *stetig* im Intervall $[a;b]$ und F irgendeine Stammfunktion von f, so gilt $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

- Dieser Teil des Hauptsatzes wird mitunter in der mathematischen Literatur als Korollar bezeichnet.

- In der Schule spielt er jedoch die zentrale Rolle.

  Schwerpunkt liegt oft einseitig auf Berechnungen, die Frage nach der Existenz der Stammfunktion oder der Rekonstruktion einer Funktion aus ihrer Änderungsrate gerät häufig in den Hintergrund.

Weitere Themen, Anwendungen

Anschließende Themen:

- Uneigentliche Integrale

Anwendungen:

- Volumina von Rotationskörpern
- Bogenlänge
- …