

Didaktik der Analysis und der Analytischen Geometrie/ Linearen Algebra

6. Vektorbegriff und Vektorrechnung

A. Filler

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik



Sommersemester 2016

Internetseite zur Vorlesung: http://didaktik.mathematik.hu-berlin.de/index.php?article_id=331

oder über: <http://www.mathematik.hu-berlin.de/~filler/>

Grundvorstellungen hinsichtlich der analytischen Geometrie

Zugänge zum Vektorbegriff

Geometrische Zugänge (Pfeilklassen)

Arithmetische Zugänge (n -Tupel)

Rechengesetze – Vektorraumaxiome

Erste Anwendungen von Vektoren in der Geometrie

Linearkombinationen von Vektoren; Basen und Koordinaten

Grundvorstellungen hinsichtlich der analytischen Geometrie

Grundvorstellungen und Strategien hinsichtlich folgender **fundamentaler Ideen** sind **grundlegend für die Analytische Geometrie** (sowohl mit Koordinaten als auch mit Vektoren):

1. Beschreibung von Punkten (im Sinne räumlicher Positionen) durch Koordinaten, verbunden mit „koordinatengebundener Anschauung“
2. Beschreibung geometrischer Objekte durch Gleichungen; Verständnis von Gleichungen als Bedingungen, denen jeweils Teilmengen aller Punkte des Raumes genügen; Transfer zwischen Gleichungen als algebraisch formulierten Bedingungen und der geometrischen Interpretation ihrer Lösungsmengen
3. Geometrisches und elementares algebraisches Verständnis für Schnittmengen von Objekten als Grundlage geometrischer Anwendungen der Linearen Algebra, intuitives „Dimensionsverständnis“
4. Wahl situationsadäquater Koordinatensysteme als Strategie zum Lösen geometrischer Probleme
5. Analogiebetrachtungen zwischen ebenen und räumlichen geometrischen Objekten und Sachverhalten, Rückführung räumlicher auf ebene Probleme, Betrachtungen von Schnittfiguren

Grundvorstellungen und fundamentale Ideen hinsichtlich des **Vektorbegriffs** und die Nutzung von **Vektoren in der Geometrie**:

6. Vektoren als abstrahierende Objekte, die verschiedene Sachverhalte beschreiben und miteinander in Verbindung bringen; Verbindung und Transfer zwischen arithmetisch-algebraischen und geometrischen Repräsentationsmodi von Vektoren; Gemeinsamkeiten von Zahlen und Vektoren; Rechengesetze als Grundlage eines (ansatzweisen) strukturellen Verständnisses von Vektorräumen
7. Vereinfachung von Darstellungen und Berechnungen in der Geometrie durch die Verwendung von Vektoren; Vektorrechnung als geometrische Operationen beschreibender Kalkül; Linearkombinationen als Grundlage problemangemessener Koordinatisierungen; Grundverständnis des Begriffs der Basis

Fundamentale Ideen bezüglich Parameterdarstellungen – Bindeglied zwischen den Leitideen „Raum und Form“ sowie „funktionaler Zusammenhang“:

8. Vektorielle Parameterdarstellungen von Geraden und Ebenen als Beschreibungen dieser Gebilde durch Punkte und „Ausdehnungsrichtungen“
9. Geraden und Ebenen (sowie Kurven und Flächen) als Punktmengen; Parameterdarstellungen als Funktionen der Koordinaten von Punkten des Raumes in Abhängigkeit von reellen Zahlen; kinematische Vorstellungen von durch Parameterdarstellungen beschriebenen Kurven als Bewegungsbahnen

Fundamentale Ideen der metrischen Geometrie des Raumes –
Bindeglied zwischen den Leitideen „Raum und Form“ sowie
„Messen“:

10. Skalarprodukt als Grundlage einer Metrik des Anschauungsraumes im Sinne einer analytischen Beschreibung von Längen- und Winkelmessungen
11. Metrische Beziehungen als Grundlage der Beschreibung geometrischer Objekte (z. B. von Kreisen und Kugeln durch Abstände sowie von Geraden und Ebenen durch Normalengleichungen)

Nicht obligatorisch, aber im Sinne eines stimmigen „Gesamtbildes von Geometrie“ und des Anschlusses an **abbildungsgeometrische Inhalte** des Mathematikunterrichts der S I wünschenswert ist die Berücksichtigung der folgenden fundamentalen Ideen:

- 12.** Geometrische Abbildungen als Hilfsmittel zum Erkennen und Beschreiben von Beziehungen zwischen geometrischen Objekten; Invarianten von Abbildungen als deren kennzeichnende geometrische Merkmale.
- 13.** Transfer zwischen geometrischen und algebraischen Operationen mittels matrizieller Beschreibung geometrischer Abbildungen.

Fundamentale Idee zu nennen, die auch **nichtgeometrische Aspekte** des Unterrichts in Linearer Algebra umfasst:

- 14.** Vektoren und Matrizen als universelle Mathematisierungsmuster geometrischer und nichtgeometrischer Anwendungen der Mathematik.

Vektorbegriff und Vektorrechnung

Grundvorstellungen hinsichtlich der analytischen Geometrie

Zugänge zum Vektorbegriff

Geometrische Zugänge (Pfeilklassen)

Arithmetische Zugänge (n -Tupel)

Rechengesetze – Vektorraumaxiome

Erste Anwendungen von Vektoren in der Geometrie

Linearkombinationen von Vektoren; Basen und Koordinaten

Modi des Verständnisses und der Beschreibung von Konzepten der Linearen Algebra:¹

- ▶ Synthetisch-geometrischer Modus (Sprache der Geometrie)
- ▶ Arithmetischer Modus (Sprache der Arithmetik)
- ▶ Algebraisch-struktureller Modus (Sprache der Algebra)

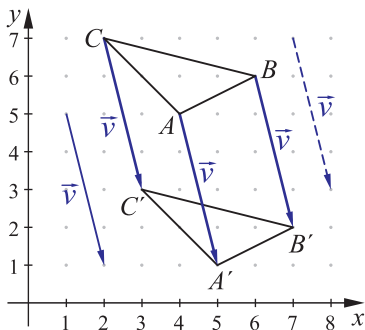
Konkretisiert für den Vektorbegriff:

- ▶ Geometrische Auffassung von Vektoren als Klassen gleich langer, paralleler und gleich gerichteter Pfeile: Pfeilklassenauffassung
- ▶ Arithmetische Auffassung von Vektoren als n -Tupel (speziell Paare und Tripel) reeller Zahlen: n -Tupel-Auffassung
- ▶ Auffassung von Vektoren als Elemente eines (axiomatisch begründeten) Vektorraumes: Vektorraumauffassung

¹ Modes of description and language of linear algebra concepts, vgl. u. a. Hillel (2000), Sierpinska (1997, 1998, 2000)

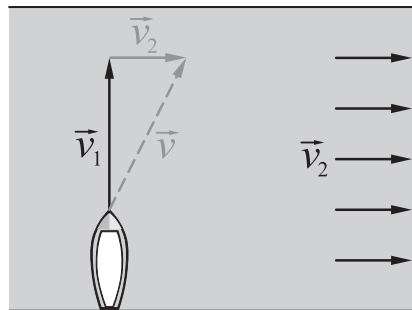
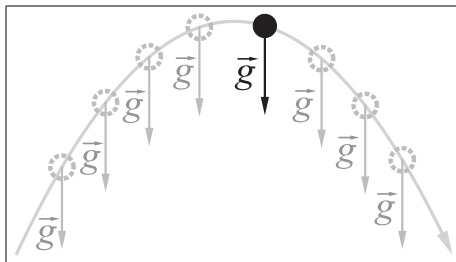
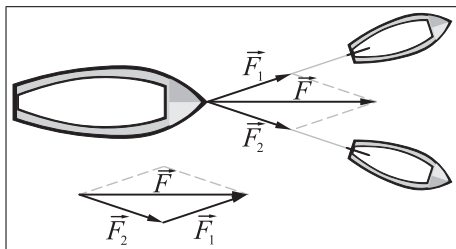
Verschiebungen

- ▶ Warum beschreiben die in der Abbildung dargestellten Pfeile dieselbe Verschiebung?
- ▶ Ermittle für jeden der Pfeile die Koordinaten des Anfangs- und des Endpunktes.
- ▶ Berechne für jeden Pfeil die Differenzen der x - und der y -Koordinaten. Was stellst du fest?



Pfeilklassenauffassung

Kräfte und Geschwindigkeiten



2. Vektoren

A. Vektoren als Pfeilklassen

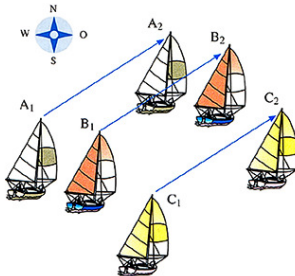
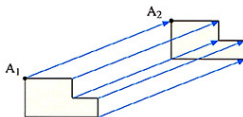
Bei Ornamenten und Parkettierungen entsteht die Regelmäßigkeit oft durch *Parallelverschiebungen* einer Figur wie auch bei dem abgebildeten Muster des berühmten Malers *Maurits Cornelis ESCHER* (1898–1972).

Eine Parallelverschiebung kann man durch einen Verschiebungspfeil oder durch einen beliebigen Punkt A_1 und dessen Bildpunkt A_2 kennzeichnen.

Bei einer Seglerflotte, die innerhalb eines gewissen Zeitraumes unter dem Einfluss des Windes abtreibt, werden alle Schiffe in gleicher Weise verschoben.

Die Verschiebung wird schon durch jeden einzelnen der gleich gerichteten und gleich langen Pfeile $\overline{A_1A_2}$, $\overline{B_1B_2}$, $\overline{C_1C_2}$ eindeutig festgelegt.

Wir fassen daher alle Pfeile der Ebene (des Raumes), die gleiche Länge und gleiche Richtung haben, zu einer Klasse zusammen. Eine solche Pfeilklassse bezeichnen wir als einen *Vektor* in der Ebene (im Raum).

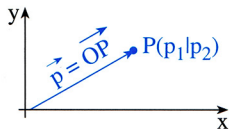


Bigalke/
Köhler
(2009)

Probleme mit den Ortsvektoren

D. Der Ortsvektor \overrightarrow{OP} eines Punktes

Auch die Lage von Punkten im Koordinatensystem lässt sich vektoriell erfassen. Dazu verwendet man den Pfeil \overrightarrow{OP} , der vom Ursprung O des Koordinatensystems auf den gewünschten Punkt P zeigt. Dieser Vektor heißt *Ortsvektor* von P . Seine Koordinaten entsprechen exakt den Koordinaten des Punktes P . Man geht in der Ebene und im Raum analog vor.



$$\vec{p} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \text{ bzw. } \vec{p} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$$

Bigalke/Köhler (2009)

Außerdem (bei der Behandlung der Parameterdarstellungen):
Geraden und Ebenen als *Punkt*mengen

n -Tupel-Auffassung

Stücklisten als n -Tupel

	Basis-sortiment	Ergänzungs-sortiment 1	Ergänzungs-sortiment 2
Gleisstück gerade (168,9 mm)	3	8	15
Gleisstück gebogen (45°)	8	4	8
Anschluss-Gleisstück	1	0	1
Weiche links	0	1	2
Weiche rechts	0	1	2
Weichenantrieb	0	2	4



Anschluss-Gleisstück



Gleisstück (gerade)



Gleisstück (gebogen)



Weichenantrieb



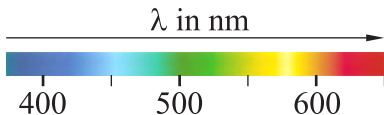
Weiche (rechts)



Weiche (links)

Das RGB-Modell

- ▶ Sichtbarer Bereich des elektromagnetischen Spektrums: 380-780 nm.
- ▶ Tristimulustheorie: Auge besitzt drei Arten von Sensoren (Synapsen) mit unterschiedlicher wellenlängenabhängiger Empfindlichkeit.



- ▶ Dies wird beim RGB-Modell genutzt: Jede Farbe wird durch drei Grundfarben (Rot, Grün, Blau) gemischt (addiert).
- ▶ Farben werden durch Tripel $\begin{pmatrix} r \\ g \\ b \end{pmatrix}$ beschrieben.

n -Tupel-Auffassung

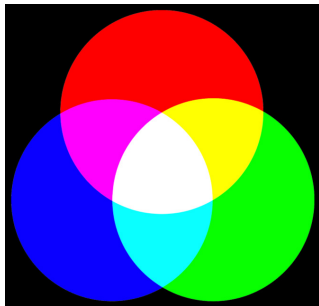
Vektoraddition u. Multiplikation mit Skalaren sind innerhalb des Definitionsbereichs $[0; 1]$ der Komponenten sinnvolle Operationen für Farben:

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ g_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_2 \\ g_2 \\ b_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \min(r_1 + r_2, 1) \\ \min(g_1 + g_2, 1) \\ \min(b_1 + b_2, 1) \end{pmatrix}$$

Beispiele:

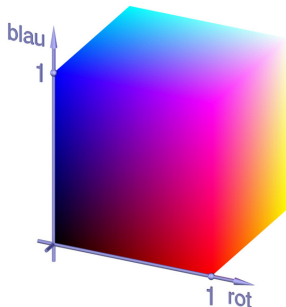
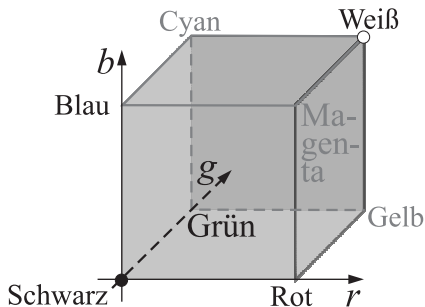
$$\mathbf{R} + \mathbf{G} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{W}$$

$$\mathbf{R} + \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{Y}$$



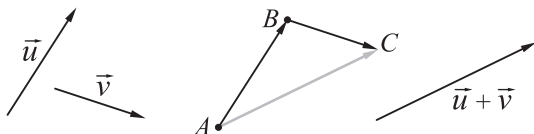
Der RGB-Würfel

- ▶ Menge aller Farb„vektoren“: Teilmenge von \mathbb{R}^3 , die als Würfel im Anschauungsraum dargestellt werden kann (Farbwürfel).
- ▶ Komplementären Farben entsprechen gegenüberliegende Punkte des Würfels.



„Rechnen“ mit Pfeilklassen und n -Tupeln

Es seien \vec{u}, \vec{v} Pfeilklassen sowie $\overrightarrow{AB} \in \vec{u}$ und $\overrightarrow{BC} \in \vec{v}$ Pfeile, die diesen Klassen angehören. Als **Summe der Pfeilklassen** \vec{u} und \vec{v} wird die Pfeilklassse bezeichnet, welche den Pfeil \overrightarrow{AC} als einen Repräsentanten besitzt:



Summe zweier n -Tupel $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$:

$$\vec{x} + \vec{y} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

(analog für die skalare Multiplikation)

- Vorbereitung eines strukturellen Verständnis des Vektorbegriffs durch **Erkennen der Gemeinsamkeiten von Pfeilklassen und n -Tupeln** (sowie der Gemeinsamkeiten mit den reellen Zahlen)
- ▶ Koordinatenbeschreibung von Pfeilklassen
 - ▶ Rechengesetze als Gemeinsamkeiten

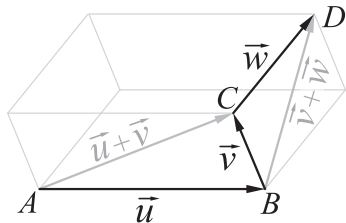
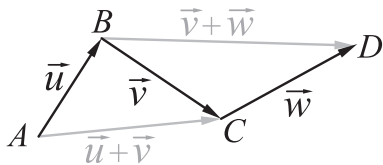
Stufen der Herausbildung eines Verständnisses grundlegender Begriffe (nach Vollrath)²

1. Stufe: Intuitives Begriffsverständnis
2. Stufe: Inhaltliches Begriffsverständnis
3. Stufe: Integriertes Begriffsverständnis
4. Stufe: Strukturelles Begriffsverständnis
5. Stufe: Formales Begriffsverständnis

²Vollrath, H.-J. (1984): Methodik des Begriffslernens im Mathematikunterricht. Klett, Stuttgart, S. 219.

Beispiel: Assoziativität der Pfeilklassenaddition

Für beliebige Pfeilklassen $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ gilt $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.



Beweis:

Es sei \overrightarrow{AB} ein Repräsentant der Pfeilklassse \vec{u} ($\overrightarrow{AB} \in \vec{u}$), $\overrightarrow{BC} \in \vec{v}$, $\overrightarrow{CD} \in \vec{w}$.
Nach der „geometrischen Definition“ der Addition von Pfeilklassen ist dann $\overrightarrow{AC} \in \vec{u} + \vec{v}$ und $\overrightarrow{BD} \in \vec{v} + \vec{w}$.

Die Summe $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$ wird durch $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD}$ und $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ durch $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}$ repräsentiert, also gilt $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.




Beispiel: Assoziativität der n -Tupel-Addition

Für beliebige n -Tupel $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ gilt $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.

Beweis mithilfe des Assoziativgesetzes in den reellen Zahlen:

$$\begin{aligned}(\vec{x} + \vec{y}) + \vec{z} &= \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right] + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + z_1 \\ x_2 + y_2 + z_2 \\ \vdots \\ x_n + y_n + z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 + z_1 \\ y_2 + z_2 \\ \vdots \\ y_n + z_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \right] \\ &= \vec{x} + (\vec{y} + \vec{z}).\end{aligned}$$

Simultane Veranschaulichungen von Rechengesetzen für Pfeilklassen und n -Tupel

- ▶ Assoziativität der Addition 
- ▶ Kommutativität der Addition 
- ▶ 1. Distributivgesetz 

Die meisten der Vektorraumaxiome lassen sich derartig als gemeinsame Rechenregeln für Pfeilklassen und n -Tupel herausarbeiten bzw. zumindest veranschaulichen.

→ *Ansätze strukturellen Begriffsverständnisses*

- ▶ Vertiefung durch einfache Beweise von Eigenschaften mithilfe der VR-Axiome ist möglich.
- ▶ I. Allg. ist nicht zu erwarten, dass Schülerinnen und Schüler vollständig erfassen, dass aus den VR-Axiomen alle relevanten Eigenschaften von Vektoren folgen.

Grundvorstellungen hinsichtlich der analytischen Geometrie

Zugänge zum Vektorbegriff

Geometrische Zugänge (Pfeilklassen)

Arithmetische Zugänge (n -Tupel)

Rechengesetze – Vektorraumaxiome

Erste Anwendungen von Vektoren in der Geometrie

Linearkombinationen von Vektoren; Basen und Koordinaten

Anwendung des Pfeilklassenkonzepts

Aus $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ folgt stets:

- ▶ Die Geraden AB und CD sind parallel (bzw. im Spezialfall identisch).
- ▶ Die Strecken \overline{AB} und \overline{CD} sind gleich lang.
- ▶ Da die Pfeile \overrightarrow{AB} und \overrightarrow{CD} gleich gerichtet sind, sind auch die Geraden AC und BD parallel.

Satz von Varignon

Die Mittelpunkte M_{AB} , M_{BC} , M_{CD} und M_{DA} der Seiten eines beliebigen (auch räumlichen) Vierecks $ABCD$ bilden ein Parallelogramm.

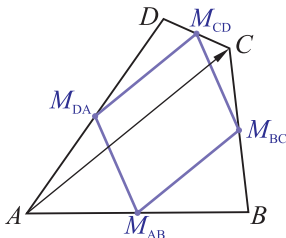
Beweis: Man muss nur zeigen, dass $\overrightarrow{M_{AB}M_{BC}} = \overrightarrow{M_{DA}M_{CD}}$ gilt.

Da M_{AB} der Mittelpunkt von \overline{AB} und M_{BC} der Mittelpunkt von \overline{BC} ist, gilt

$$\overrightarrow{M_{AB}M_{BC}} = \overrightarrow{M_{AB}B} + \overrightarrow{BM_{BC}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \quad \text{und analog dazu}$$

$$\overrightarrow{M_{DA}M_{CD}} = \overrightarrow{M_{DA}D} + \overrightarrow{DM_{CD}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}.$$

Damit ist die Behauptung $\overrightarrow{M_{AB}M_{BC}} = \overrightarrow{M_{DA}M_{CD}}$ erfüllt. □



Anwendungen von Vektoren für Beweise geometrischer Sätze

Schwerpunkt eines Dreiecks

In einem beliebigen Dreieck $\triangle ABC$ schneiden sich die Seitenhalbierenden in einem Punkt (der als *Schwerpunkt* des Dreiecks bezeichnet wird). Dieser teilt die Seitenhalbierenden jeweils im Verhältnis 2:1.

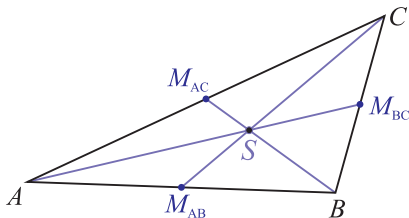
Beweis: Wir zeigen, dass alle Seitenhalbierenden durch den Punkt S mit

$$\overrightarrow{AS} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

verlaufen und dass S alle Seitenhalbierenden im Verhältnis 2:1 teilt.

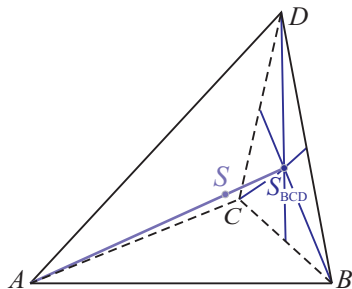
Dies ist genau dann der Fall, wenn gilt:

$$\overrightarrow{AS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM_{BC}}, \quad \overrightarrow{BS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BM_{AC}} \quad \text{sowie} \quad \overrightarrow{CS} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CM_{AB}}.$$



Schwerpunkt eines Tetraeders

In einem beliebigen Tetraeder $ABCD$ schneiden sich die vier Schwerlinien, d. h. die Verbindungsstrecken $\overline{AS_{BCD}}$, $\overline{BS_{ACD}}$, $\overline{CS_{ABD}}$ und $\overline{DS_{ABC}}$ der Eckpunkte mit den Schwerpunkten der jeweils gegenüberliegenden Seitenflächen, in einem Punkt. Dieser teilt die Schwerlinien jeweils im Verhältnis 3:1.



Beweis: Wir zeigen, dass alle Schwerlinien durch den Punkt S mit

$$\overrightarrow{AS} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}$$

verlaufen und dieser Punkt alle Schwerlinien im Verhältnis 3:1 teilt.

Grundvorstellungen hinsichtlich der analytischen Geometrie

Zugänge zum Vektorbegriff

Geometrische Zugänge (Pfeilklassen)

Arithmetische Zugänge (n -Tupel)

Rechengesetze – Vektorraumaxiome

Erste Anwendungen von Vektoren in der Geometrie

Linearkombinationen von Vektoren; Basen und Koordinaten

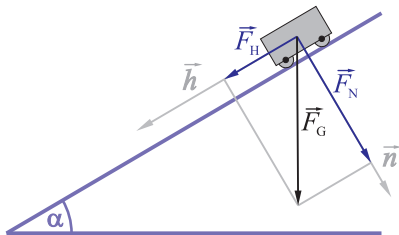
Linearkombinationen in Anwendungssituationen

Bewegung eines Körpers entlang einer geneigten Ebene

- ▶ Hangabtriebskraft, Normalkraft: **Komponenten** der Gewichtskraft entlang zweier vorgegebener Richtungen, angegeben durch \vec{h} , \vec{n}
- ▶ Gewichtskraft des rollenden Objekts lässt sich in Hangabtriebskraft \vec{F}_H und Normalkraft \vec{F}_N zerlegen: $\vec{F}_G = \vec{F}_H + \vec{F}_N$.
- ▶ Zur Bestimmung dieser Kräfte müssen (bei bekannter Gewichtskraft \vec{F}_G) **Koeffizienten** λ und μ ermittelt werden, so dass

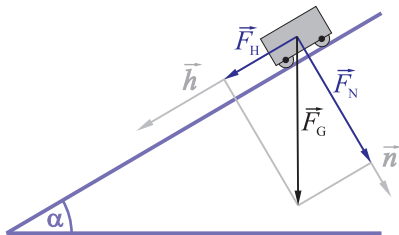
$$\vec{F}_G = \lambda \vec{h} + \mu \vec{n}.$$

- ▶ Hangabtriebs- und Normalkraft: $\vec{F}_H = \lambda \vec{h}$, $\vec{F}_N = \mu \vec{n}$.



Linearkombinationen von Vektoren; Basen und Koordinaten

- ▶ Der Vektor \vec{F}_G wird durch $\vec{F}_G = \lambda \vec{h} + \mu \vec{n}$ als **Linearkombination** der Vektoren \vec{h} und \vec{n} dargestellt.
- ▶ Durch \vec{h} und \vec{n} lässt sich jeder Vektor in der Ebene darstellen: \vec{h} , \vec{n} bilden ein **Erzeugendensystem** für alle Vektoren der Ebene.
- ▶ Erzeugendensysteme der Ebene müssen offensichtlich immer aus mindestens zwei Vektoren bestehen. \vec{h} und \vec{n} bilden daher in der Ebene ein **minimales Erzeugendensystem**, genannt **Basis**.
- ▶ Die Koeffizienten λ und μ in der o. a. Linearkombination nennt man **Koordinaten des Vektors \vec{F}_G bezüglich der Basis $\{\vec{h}; \vec{n}\}$** .



Linearkombinationen von Vektoren; Basen und Koordinaten

Essenziell:

- ▶ **anschaulich-plausibles Grundverständnis** von Basen, Koordinaten
- ▶ **Fähigkeit**, für inner- oder außermathematische Anwendungen geeignete **Basisvektoren auszuwählen**

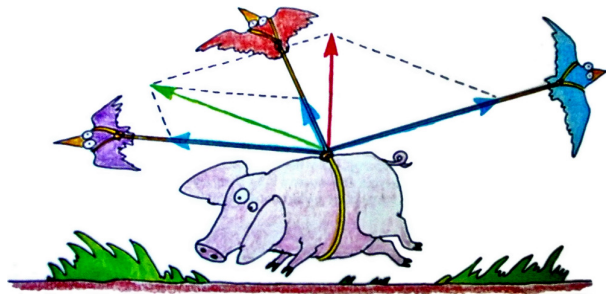
Betrachtungen zu Basen im Ein- bis Dreidimensionalen

- ▶ Im **Eindimensionalen** kann jeder Vektor eindeutig als Vielfaches eines beliebigen Vektors (außer $\vec{0}$) dargestellt werden.
- ▶ Im **Zweidimensionalen** kann jeder Vektor als Linearkombination zweier „geeigneter“ Vektoren, im **dreidimensionalen Fall** dreier „geeigneter“ Vektoren dargestellt werden.
- ▶ Was „geeignet“ heißt, lässt sich auf ikonischer Ebene mithilfe von zwei bzw. drei Bleistiften gut veranschaulichen.
- ▶ Die „geeigneten“ Vektoren heißen **linear unabhängig**.
- ▶ Bei „nicht geeigneten“ Vektoren lässt sich einer durch die anderen darstellen – sie heißen **linear abhängig**.
Etwas präziser: n Vektoren heißen linear unabhängig, wenn keiner als Linearkombination der anderen dargestellt werden kann.

Linearkombinationen von Vektoren; Basen und Koordinaten

Ziel: mit möglichst wenigen Vektoren alle anderen eindeutig darstellen zu können

- ▶ Die Vektoren einerseits **linear unabhängig** sein.
- ▶ Es müssen andererseits **genügend viele** sein, damit sich **alle Vektoren** daraus erzeugen lassen.



Basisvektoren in einem ungarischen Schulbuch:
Sokszínű matematika
(Vielfarbige Mathematik)
© Mozaik Verlag Szeged

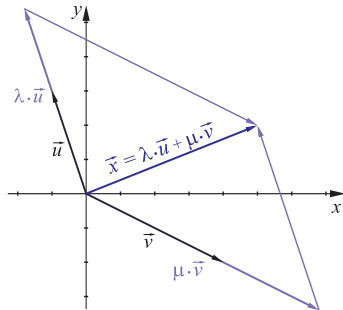
Linearkombinationen von Vektoren; Basen und Koordinaten

Als **Linearkombination** von Vektoren $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ bezeichnet man die Darstellung eines Vektors \vec{x} mit

$$\vec{x} = \lambda_1 \cdot \vec{u}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{u}_2 + \dots + \lambda_k \cdot \vec{u}_k \quad (\text{mit } \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}).$$

Beispiel: Der Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ soll als Linearkombination der Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ dargestellt werden.

Dazu sind geeignete Koeffizienten λ und μ so zu bestimmen, dass $\vec{x} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$ gilt, also $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.



Geometrische Deutung der Darstellung eines Vektors \vec{x} als Linearkombination zweier Vektoren \vec{u} und \vec{v} :

\vec{u} und \vec{v} geben die Richtungen der Seiten eines Parallelogramms an. Gesucht sind Koeffizienten λ, μ , mit denen \vec{u} und \vec{v} multipliziert werden müssen, damit der Vektor \vec{x} eine Diagonale des von $\lambda \vec{u}$ und $\mu \vec{v}$ aufgespannten Parallelogramms beschreibt.

Linearkombinationen von Vektoren; Basen und Koordinaten

Geometrische Deutung der Darstellung eines Vektors $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ als Linearkombination dreier Vektoren \vec{u} , \vec{v} und \vec{w} :

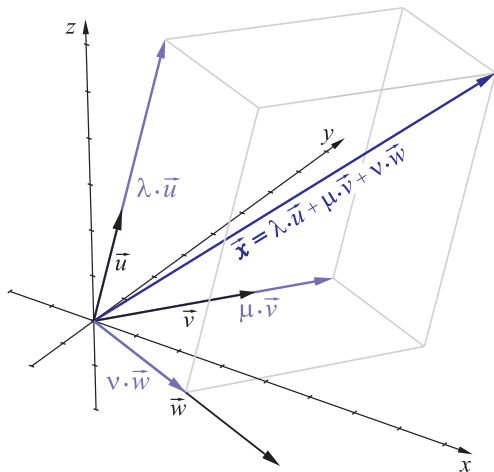
Die Vektoren \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} geben die Richtungen der Seiten eines Parallelepipeds (Spats) vor.

Werden \vec{u} , \vec{v} , \vec{w} mit den aus

$$\vec{x} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} + \nu \vec{w}$$

ermittelten Koeffizienten λ , μ , ν multipliziert, so spannen die Vektoren $\lambda \vec{u}$, $\mu \vec{v}$ und $\nu \vec{w}$ ein Paralleleiped auf, in dem der Vektor* \vec{x} eine Diagonale beschreibt.

* Genauer: ein Pfeil, der den Vektor \vec{x} repräsentiert



Linearkombinationen von Vektoren

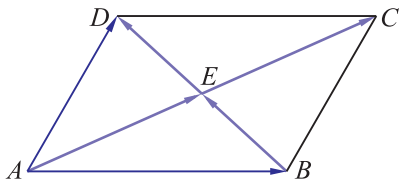
- ▶ verschiedene Beispiele rechnerisch bearbeiten und geometrisch interpretieren
- ▶ auch Spezialfälle betrachten:
 - ▶ das sich aus der LK ergebende LGS ist nicht lösbar
 - ▶ das sich aus der LK ergebende LGS hat unendlich viele Lösungen

Anwendung von Linearkombinationen in der Geometrie

Strategie: durch Punkte geometrischer Figuren gegebene Vektoren als Linearkombinationen geeigneter Basisvektoren ausdrücken

Beispiel: In jedem Parallelogramm halbieren die Diagonalen einander.

- ▶ Die Vektoren \overrightarrow{AE} und \overrightarrow{AC} sowie \overrightarrow{BE} und \overrightarrow{BD} sind jeweils kollinear. Somit existieren also $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\overrightarrow{AE} = \lambda \cdot \overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BE} = \mu \cdot \overrightarrow{BD}$.
- ▶ Zeigen, dass $\lambda = \mu = \frac{1}{2}$ sein muss.
- ▶ Dazu wählen wir \overrightarrow{AB} und \overrightarrow{AD} als Basisvektoren und stellen \overrightarrow{AE} und \overrightarrow{BE} als Linearkombinationen dieser Basisvektoren dar.



Anwendung von Linearkombinationen in der Geometrie

Noch ein Beispiel:

In jedem Parallelogramm schneiden sich die Verbindungsstrecke eines beliebigen Eckpunktes mit dem Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite und die Diagonale durch die benachbarten Eckpunkte im Verhältnis 1:2.

- ▶ Wählen wiederum \overrightarrow{AB} und \overrightarrow{AD} als Basisvektoren.
- ▶ \overrightarrow{BE} und \overrightarrow{BD} sowie \overrightarrow{AE} und $\overrightarrow{AM_{BC}}$ sind jeweils kollinear.
- ▶ Es existieren also $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{BD}$ und $\overrightarrow{AE} = \mu \overrightarrow{AM_{BC}}$.
- ▶ Koeffizientenvergleich bezüglich der Basisvektoren

