Didaktik der Analysis und der Analytischen Geometrie/ Linearen Algebra

8. Das Skalarprodukt, metrische Geometrie von Geraden und Ebenen

A. Filler

Humboldt-Universität zu Berlin, Institut für Mathematik

Sommersemester 2016

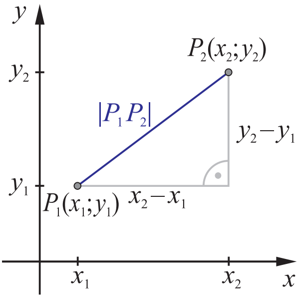
Internetseite zur Vorlesung: http://didaktik.mathematik.hu-berlin.de/index.php?article_id=331

oder über: http://www.mathematik.hu-berlin.de/~filler/

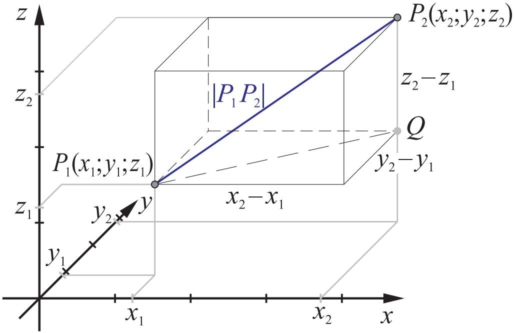
Das Skalarprodukt, metrische Geometrie von Geraden und Ebenen

Abstand zweier Punkte

Bereits in der Sekundarstufe I mit dem Satz des Pythagoras herleitbar:



Abstand zweier Punkte in der Ebene



Abstand zweier Punkte des Raumes

Abstand zweier Punkte $P_1(x_1;y_1)$ und $P_2(x_2;y_2)$ der Ebene:

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}\,.$$

Abstand zweier Punkte $P_1(x_1;y_1;z_1)$, $P_2(x_2;y_2;z_2)$ des Raumes:

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}\,.$$

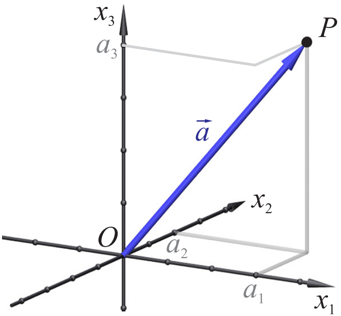
Länge (Betrag) eines Vektors

Betrag eines Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

bzw.

$$|\vec{a}|^2 = a_1 \cdot a_1 + a_2 \cdot a_2 + a_3 \cdot a_3$$



Eigenschaften:

- $|\vec{a}| \geq 0$
- $|\vec{a}| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{o}$
- $|\lambda \cdot \vec{a}| = |\lambda| \cdot |\vec{a}|$

Wege zum Skalarprodukt

1. Geometrisch orientierte Zugänge: Im Mittelpunkt steht, dass sich das Skalarprodukt $\vec{u}\cdot\vec{v}$ zweier Vektoren als Produkt ihrer Beträge (Längen) und des Kosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels ergibt:
$$\vec{u}\cdot\vec{v} \;=\; |\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\measuredangle(\vec{u},\vec{v})\,.$$

2. Arithmetrisch orientierte Zugänge: Skalarprodukt zweier als n-Tupel aufgefasster Vektoren $\vec{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{pmatrix}$ und $\vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\\vdots\\v_n\end{pmatrix}$ als Summe der Produkte der einander entsprechenden Komponenten:
$$\vec{u}\cdot\vec{v} \;=\; u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2+\ldots+u_n\cdot v_n \;=\; \sum_{i=1}^{n} u_i\cdot v_i\,.$$

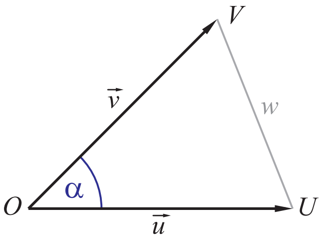
3. Strukturorientierte, axiomatische Zugänge: Skalarprodukt als *positiv definite symmetrische Bilinearform* auf einem beliebigen (reellen) Vektorraum V.

Bekannt: Länge (Betrag) eines Vektors $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

Gesucht: Maß eines Winkels $\alpha = \measuredangle\,(UOV)$

mit $\overrightarrow{OU} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$

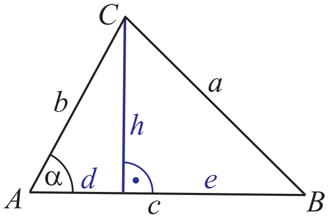
und $\overrightarrow{OV} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$



Kosinussatz

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot\cos\alpha \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2\cdot a\cdot c\cdot\cos\beta \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2\cdot a\cdot b\cdot\cos\gamma \end{aligned}$$

Beweis: Betrachten die Höhe h auf die Seite c, die c in die Strecken d und e teilt (analoges Vorgehen, wenn der Fußpunkt von h außerhalb der Seite c liegt).



Es gilt:

$$\begin{aligned} h^2 &= b^2 - d^2 \\ e^2 &= (c-d)^2 = c^2 - 2cd + d^2 \\ a^2 &= h^2 + e^2 = b^2 - d^2 + c^2 - 2cd + d^2 = c^2 + b^2 - 2cd \end{aligned}$$

Wegen $\cos\alpha = \frac{d}{b}$, also $d = b\cdot\cos\alpha$, folgt die Behauptung.

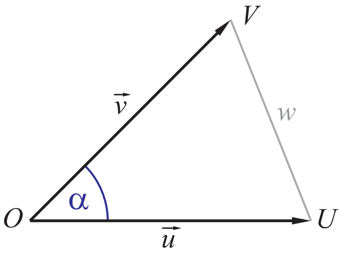
Winkelberechnung:

- Setzen $u = |OU|$, $v = |OV|$, $w = |UV|$
- Kosinussatz:

$$w^2 = u^2 + v^2 - 2 \cdot u \cdot v \cdot \cos\alpha$$

- Nach $\cos\alpha$ auflösen:

$$\cos\alpha = \frac{u^2 + v^2 - w^2}{2 \cdot u \cdot v}$$



- Zähler des obigen Bruchs durch die Koordinaten von U und V ausdrücken:

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 - w^2 &= \left(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\right) + \left(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2\right) \\ &\quad - \left[(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2\right] \\ &= 2 \cdot (x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3) \end{aligned}$$

- Erhalten:

$$\cos\alpha = \frac{x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}}$$

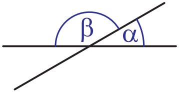
Ein geometrisch orientierter Weg zum Skalarprodukt

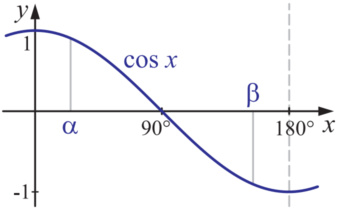
Winkelberechnung:

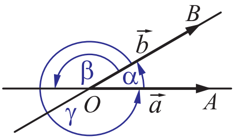
$$\cos\alpha \;=\; \frac{x_1\cdot y_1 + x_2\cdot y_2 + x_3\cdot y_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\cdot\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}}$$

Diese Formel berechnet den unorientierten Winkel:

- Sind $\beta = 180° - \alpha$ und $\gamma = 360° - \alpha$,
  so gilt $\cos\beta = -\cos\alpha$ und $\cos\gamma = \cos\alpha$.
- $\alpha = \measuredangle(AOB)$ und $\gamma = \measuredangle(BOA)$ haben denselben Kosinuswert.
- Um β zu berechnen, muss man z. B. die Vektoren $\vec{a}$ und $-\vec{b}$ benutzen.







Zusammenfassung/ Einführung des Skalarprodukts
Winkelberechnung:

$$\cos\alpha = \frac{x_1\cdot y_1 + x_2\cdot y_2 + x_3\cdot y_3}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}\cdot\sqrt{y_1^2+y_2^2+y_3^2}}$$

Wir definieren:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = x_1\cdot y_1 + x_2\cdot y_2 + x_3\cdot y_3$$

Dabei sind x_1, x_2, x_3 und y_1, y_2, y_3 die Koordinaten von $\vec{a}$ bzw. $\vec{b}$ bezüglich eines kartesischen Koordinatensystems.

Damit ist:

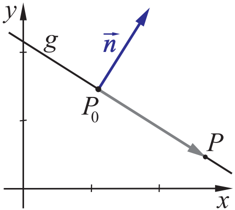
$$\cos\alpha = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

Wichtiger Spezialfall:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \;\Leftrightarrow\; \measuredangle(\vec{a},\vec{b}) = 90°.$$

Normalengleichungen von Geraden in der Ebene

Alle Punkte P der Ebene, deren Verbindungsvektoren $\overrightarrow{P_0P}$ mit einem Punkt P_0 zu einem Vektor $\vec{n}$ ($\vec{n} \neq \vec{o}$) orthogonal sind, liegen auf einer Geraden.



- Ein zu einer Geraden g orthogonaler Vektor $\vec{n}$ (mit $\vec{n} \neq \vec{o}$) heißt *Normalenvektor* der Geraden g.
- Ist g eine Gerade, P_0 ein Punkt und $\vec{n}$ ein Normalenvektor von g, so ist die Gleichung $\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$ eine *Normalengleichung der Geraden* g.

Normalengleichungen von Geraden in der Ebene

Beispiel:

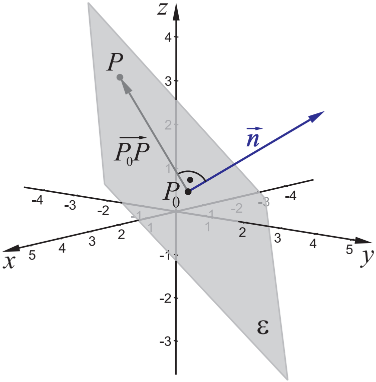
Eine Gerade g ist durch die Parametergleichung $g\colon\ \vec{x} = \binom{5}{6} + t\binom{-3}{4}$ gegeben. Gesucht ist eine Normalengleichung von g.

- Normalengleichung
- Koordinatengleichung

Normalengleichungen von Ebenen

Alle Punkte P des Raumes, deren Verbindungsvektoren $\overrightarrow{P_0P}$ mit einem Punkt P_0 zu einem Vektor $\vec{n}$ ($\vec{n} \neq \vec{o}$) orthogonal sind, liegen in einer Ebene.

- Vektor $\vec{n}$, der zu einer Ebene ε senkrecht ist: *Normalenvektor* von ε.
- Die Lage einer Ebene ε im Raum ist durch einen Punkt $P_0 \in \varepsilon$ und einen Normalenvektor $\vec{n}$ eindeutig bestimmt.
- Ein Punkt P liegt genau dann in ε, wenn $\overrightarrow{P_0P}$ zu $\vec{n}$ orthogonal ist, also $\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$.
- Ist ε eine Ebene, P_0 ein Punkt und $\vec{n}$ ein Normalenvektor von ε, so heißt $\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$ Normalengleichung der Ebene ε.



Normalengleichungen von Ebenen

Beispiel: Bestimmung einer Normalengleichung aus einer Parametergleichung einer Ebene

Gegeben ist die Parametergleichung einer Ebene

$$\varepsilon\colon\ \vec{p} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

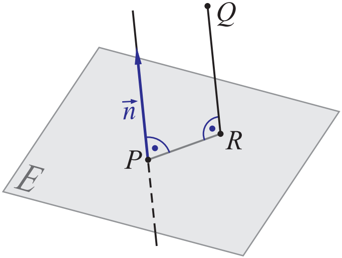
gesucht eine Normalengleichung.

- Mit oder ohne Vektorprodukt?

Satz: Ist $a\,x + b\,y + c\,z = d$ eine Gleichung einer Ebene ε, so ist der Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor von ε.

Abstand eines Punktes von einer Ebene

- Wie würde man den Abstand eines Punktes von einer Ebene messen?
- Normalengleichung einer Ebene:
  $$E:\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{PX}=0$$
- Das Lot von Q auf E schneidet E in einem Punkt R. Damit ist
  $$d\left(Q,E\right)=\left|RQ\right|$$
  der gesuchte Abstand.



- Es gilt $\overrightarrow{QR}=\lambda\cdot\vec{n}$, also $d\left(Q,E\right)=\left|QR\right|=\left|\lambda\cdot\vec{n}\right|$.
- Da R in der Ebene E liegt, gilt
  $$0=\vec{n}\cdot\overrightarrow{PR}=\left(\overrightarrow{PQ}+\lambda\cdot\vec{n}\right)\cdot\vec{n}=\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}+\lambda\cdot\vec{n}^2\text{ , also }\lambda=-\frac{\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}}{\vec{n}^2}$$
- Damit folgt für den gesuchten Abstand:
  $$d\left(Q,E\right)=\left|QR\right|=\left|\lambda\cdot\vec{n}\right|=\left|\lambda\right|\cdot\left|\vec{n}\right|=\frac{\left|\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}{\vec{n}^2}=\frac{\left|\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{n}\right|}$$

Hesse'sche Normalform

Abstand eines Punktes von einer Ebene:

$$d\left(Q,E\right)=\frac{|\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}$$

Hesse'sche Normalform der Ebenengleichung

- Besonders einfach wird die Formel für den Abstand eines Punktes von einer Ebene, mit einem Einheitsvektor als Normalenvektor, d. h. $|\vec{n}|=1$: Normaleneinheitsvektor.
- Damit heißt die Normalengleichung

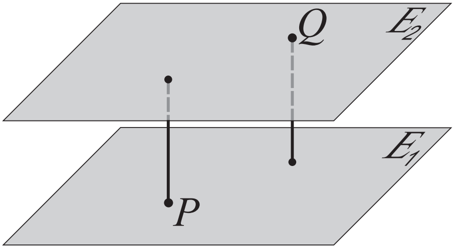
  $$\vec{n}\cdot\overrightarrow{P_0P}=0$$

  Ebenengleichung in Hesse'scher Normalform.
- Die Abstandsformel vereinfacht sich damit zu

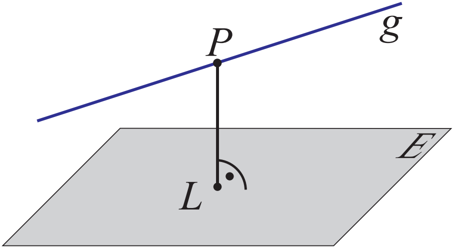
  $$d\left(Q,E\right)=|\overrightarrow{PQ}\cdot\vec{n}|$$
- In der Hesse'schen Normalform muss man also nur die Koordinaten von Q in die Gleichung einsetzen und erhält (eventuell bis auf das Vorzeichen) den Abstand $d\left(Q,E\right)$).

Weitere Abstandsberechnungen im Raum lassen sich mithilfe anschaulich-geometrischer Überlegungen auf Abstände von Punkten zu Ebenen zurückführen.

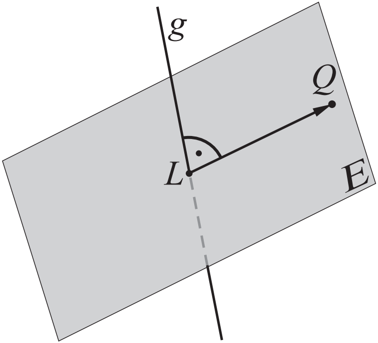
Abstand zweier paralleler Ebenen



Abstand einer Geraden von einer parallelen Ebene

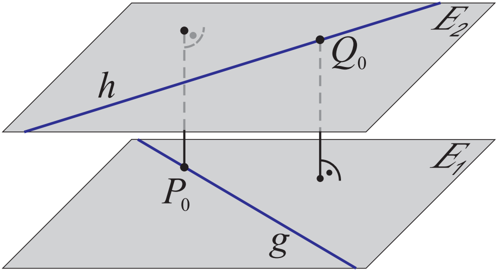


Abstand eines Punktes von einer Geraden im Raum



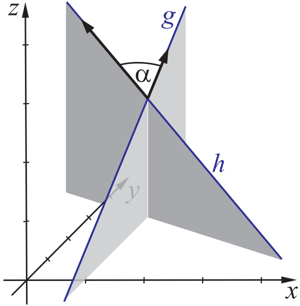
- Abstand $d(Q,g)$ eines Punktes Q von einer Geraden g: Länge $|QL|$ des Lotes von Q auf g
- Um den Fußpunkt L des Lotes von Q auf g zu bestimmen, ermittelt man die Gleichung derjenigen Ebene E, die Q enthält sowie zu g senkrecht ist.

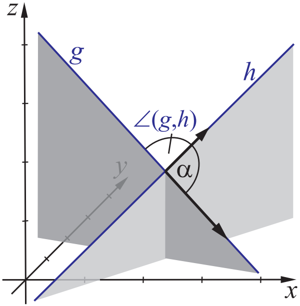
Abstand zweier windschiefer Geraden



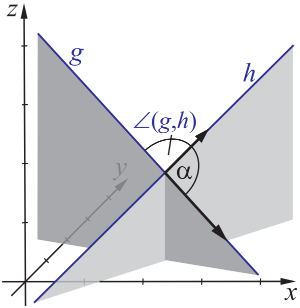
Winkel zweier sich schneidender Geraden in der Ebene oder im Raum

Zwei sich schneidende Geraden g und h schließen zwei Winkel miteinander ein, die sich zu $180°$ ergänzen. Derjenige dieser beiden Winkel, der nicht größer als $90°$ ist, heißt Schnittwinkel der Geraden g und h.





Winkel zweier sich schneidender Geraden in der Ebene oder im Raum

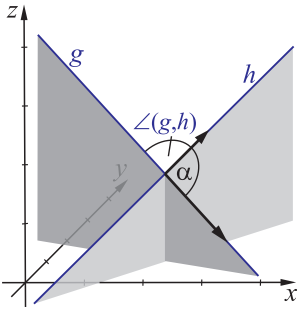


$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -0,5 \\ 2 \\ 3,5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1{,}25 \\ -0{,}5 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0{,}75 \\ 1 \\ 0{,}75 \end{pmatrix}$$

$$\cos\alpha = \frac{1{,}25\cdot 0{,}75 - 0{,}5\cdot 1 - 1\cdot 0{,}75}{\sqrt{1{,}25^2+0{,}5^2+1}\cdot\sqrt{0{,}75^2+1+0{,}75^2}} \approx -0,1278 \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 97,3^\circ$$

$$\angle(g,h) \approx 180^\circ - 97{,}3^\circ = 82{,}7^\circ\,.$$

Winkel zweier sich schneidender Geraden in der Ebene oder im Raum

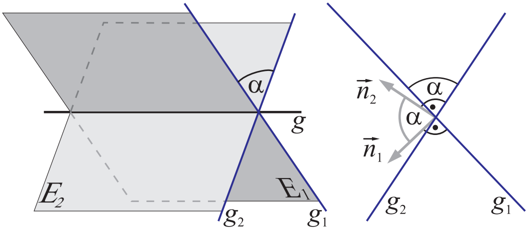


Alternative: Absolutbetrag des Skalarproduktes für die Berechnung nutzen:

Für den Schnittwinkel $\angle(g,h)$ zweier sich schneidender Geraden g: $X = P_1 + t\,\vec{a}$ und h: $X = P_2 + s\,\vec{b}$ gilt:

$$\cos\angle(g,h) = \left|\cos\angle(\vec{a},\vec{b})\right| = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

Schnittwinkel zweier Ebenen



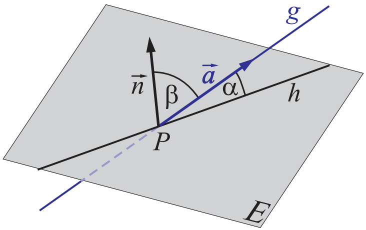
Schnittwinkel zweier Ebenen E_1 und E_2 mit der Schnittgeraden g:
Winkel zwischen zwei sich schneidenden Geraden g_1 und g_2, die in E_1 bzw. E_2 liegen und auf der Schnittgeraden g senkrecht stehen

Für den Schnittwinkel α zweier sich schneidender Ebenen E_1 und E_2 mit den Normalenvektoren $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ gilt:

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}.$$

Schnittwinkel zwischen einer Geraden *g* und einer Ebene *E*:

Winkel α zwischen g und derjenigen Geraden h in der Ebene E, die von allen in E liegenden Geraden den kleinsten Winkel mit g einschließt



α ergänzt sich mit dem Winkel β zwischen *g* und einer zu E senkrechten Geraden zu 90°.

Falls eine Gerade g mit dem Richtungsvektor $\vec{a}$ eine Ebene E mit dem Normalenvektor $\vec{n}$ schneidet, so gilt für den Winkel α zwischen g und ε:

$$\sin\alpha = \frac{|\vec{n}\cdot\vec{a}|}{|\vec{n}|\cdot|\vec{a}|}\,.$$