

Inhalt

Gruppoide

1. Algebraische Strukturen mit einer binären Operation	13
1.1. Gruppoide, Strukturtafeln und Cayley-Diagramme.	14
1.2. D-Gruppoide und K-Gruppoide.	19
1.3. Quasigruppen, lateinische Quadrate und Quasigruppen-Graphen	22
1.4. Loops.	29
1.5. Halbgruppen und Gruppen	32
1.6. Assoziativitätstest	35
1.7. Translationen in Gruppoiden	42
2. Parastrophie von Quasigruppen	47
2.1. Parastrophe Quasigruppen	47
2.2. Parastrophe lateinische Quadrate	56
2.3. Die Anzahl p der Parastrophen einer Quasigruppe	59
2.4. Parastrophe Identitäten	62
3. Homomorphie	75
3.1. Äquivalenzrelationen	75
3.2. Kongruenzrelationen und Faktorgruppoide	81
3.3. Homomorphe und isomorphe Abbildungen	88
4. Isotopie	99
4.1. Isotope und Hauptisotope	99
4.2. Isotope von Gruppen	108
5. Spezielle Gruppoide und Quasigruppen	116
5.1. Bisymmetrische Gruppoide und Quasigruppen	116
5.2. Zusammenhänge zwischen ausgewählten Identitäten	121
5.3. Totalsymmetrische Quasigruppen und Steiner-Tripel-Systeme	130

Funktionalgleichungen

6. Über gegenseitige Ableitbarkeit bekannter Eigenschaften einiger elementarer Funktionen	141
6.1. Aus den Theorien einiger elementarer Funktionen	141
7. Funktionale Charakterisierungen der linearen Funktionen $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ mit $f(x) = c \cdot x$ mit Hilfe der Funktionalgleichung $f(x + y) = f(x) + f(y)$	147
7.1. Die stetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x + y) = f(x) + f(y)$	147
7.2. Weitere funktionale Charakterisierungen der linearen Funktionen $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ mit $f(x) = c \cdot x$	149
7.3. Die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x + y) = f(x) + f(y)$	154
7.4. Zu Lösungen von $f(x + y) = f(x) + f(y)$ über eingeschränktem Definitionsbereich	156
7.5. Bemerkungen zur direkten Proportionalität	158
7.6. Anwendungen	161

8. Funktionale Charakterisierungen der Exponential- und Logarithmusfunktionen mit Hilfe von Funktionalgleichungen	165
8.1. Funktionale Charakterisierungen der Exponentialfunktionen mit Hilfe der Funktionalgleichung $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$	165
8.2. Die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$	171
8.3. Funktionale Charakterisierungen der Logarithmusfunktionen mit Hilfe der Funktionalgleichung $f(x \cdot y) = f(x) + f(y)$	172
8.4. Zusammenfassung	177
9. Verallgemeinerung der Exponential- und Logarithmusfunktionen unter Beibehaltung der Stetigkeitsforderung	179
9.1. Verallgemeinerung der Exponential- und Logarithmusfunktionen auf algebraischem Weg mit Hilfe der Funktionalgleichung $f(x + y) = F(f(x), f(y))$	179
9.2. Verallgemeinerung der Exponential- und Logarithmusfunktionen auf analytischem Weg mit Hilfe der Funktionalgleichung $f(F(x, y)) = f(x) + f(y)$	185
10. Verallgemeinerung der Exponentialfunktionen ohne Stetigkeitsforderung	190
10.1. Dividierbare Gruppen	190
10.2. Allgemeine Lösung der Funktionalgleichung $f(x + y) = F(f(x), f(y))$	191
11. Die Funktionalgleichung $h(F(x, y)) = f(x) + g(y)$	198
11.1. Rechenstäbe, Netztafeln, Fluchtlinientafeln und die Schließungsbedingung von BRIANCHON	198
11.2. Charakterisierung einer Klasse zweistelliger reellwertiger Funktionen F mit $h(F(x, y)) = f(x) + g(y)$	208
12. Funktionale Charakterisierungen von Winkelfunktionen	221
12.1. Die Additions- und Subtraktionstheoreme der Sinus- und Kosinusfunktionen	221
12.2. Äquivalente Regularitätsforderungen bei der funktionalen Charakterisierung der Sinus- und Kosinusfunktionen	232
12.3. Die Funktionalgleichungen $f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)f(y)$ und $f(x + y)f(x - y) = f(x)^2 - f(y)^2$	239
12.4. Anwendungen der d'Alembertschen Funktionalgleichung in der Geometrie und in der Physik	248
13. Lösungen der Funktionalgleichung $f(x + yf(x)) = f(x) \cdot f(y)$	270
13.1. Einige Eigenschaften der Lösungen von $f(x + yf(x)) = f(x) \cdot f(y)$	270
13.2. Reellwertige Lösungen von $f(x + yf(x)) = f(x) \cdot f(y)$	271
13.3. Die allgemeine Lösung von $f(x + yf(x)) = f(x) \cdot f(y)$	274
13.4. Die stetigen Lösungen von $f(x + yf(x)) = f(x) \cdot f(y)$ für einen Hilbertraum	277
Literatur	281
Namenverzeichnis	288
Sachverzeichnis	291