Didaktik der Mathematik der Sekundarstufe II

Zahlenfolgen und Grenzwerte

Neumann/Rodner

Zahlenfolgen in der Grundschule und in der Sekundarstufe I

Grundschule:

Leitlinie „Muster und Strukturen“:

Figurierte Zahlen

Sekundarstufe I:

Leitlinie „Zahl“:

Zahlenfolgen und Pascalsches Dreieck

Leitlinie „Funktionaler Zusammenhang“:

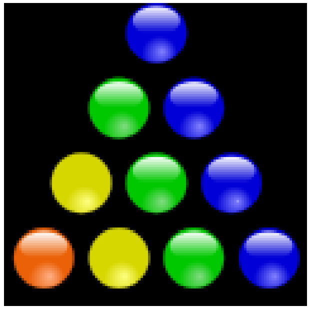
Zinseszins

Figurierte Zahlen

Die Zahl 10 ist die vierte Dreieckzahl

*Folge der **Dreieckzahlen**:1,3,6,10,15…*

Die n- te Dreieckzahl ist:



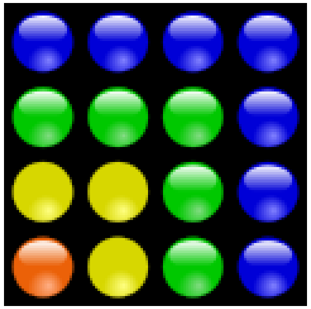
$$D_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} = \binom{n+1}{2}$$

Die Zahl 16 ist die vierte Quadratzahl

*Folge der **Quadratzahlen**: 1,4,9,16,25…*

Die Quadratzahlen erhält man auch durch Addition zweier aufeinanderfolgender Dreieckszahlen.

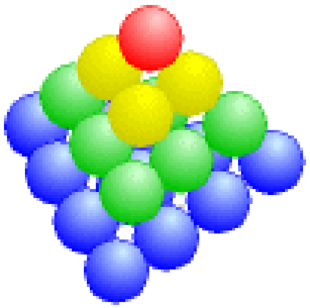
Die n- te Quadratzahl ist:



$$Q_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$$

Didaktik der Mathematik der Sekundarstufe II
Figurierte Zahlen

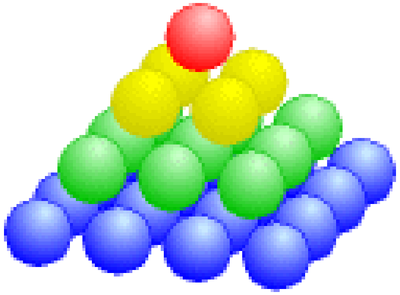
Pyramidalzahlen



Tetraederzahlen: 1,4,10,20,35…

als Summe der Dreieckzahlen

$$T_n = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (n+2)}{6} = \binom{n+2}{3}$$



Quadratische Pyramidalzahlen:

1,5,14,30…

$Pyr_n = T_n + T_{n-1}$

als Summe der Quadratzahlen

$$Pyr_n = \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Pascalsches Dreieck

1 Natürliche Zahlen

1 1 Dreieckzahlen

1 2 1 Tetraederzahlen

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

Summe aller Binomialkoeffizienten in der n-ten Zeile ergibt die Zweierpotenz 2^n.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

Aufgabe: Begründen Sie diese Aussage.

Folge der Fibonaccizahlen

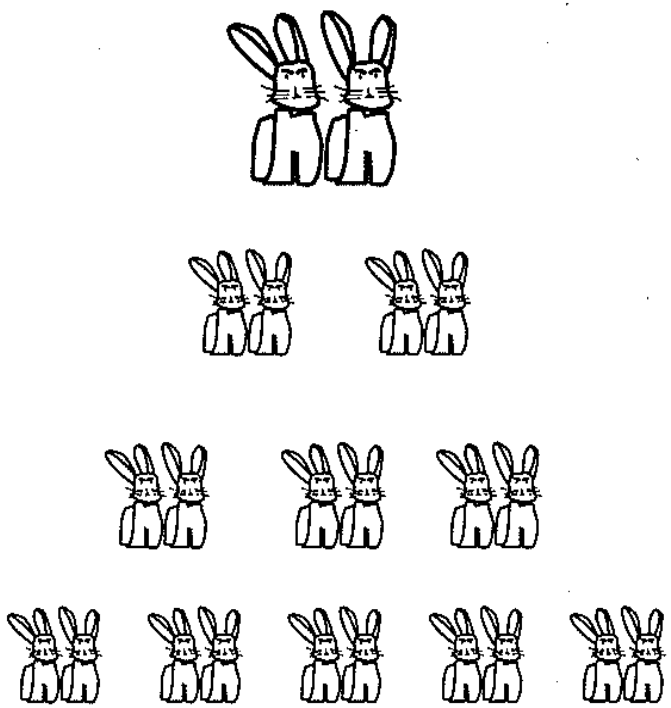
Fibonacci (Leonardo von Pisa, ca.1170-ca.1240) stieß auf diese Folge bei der einfachen mathematischen Modellierung des Wachstums einer Kaninchenpopulation.
(aus der Abteilung Unterhaltungsmathematik des *liber abbaci*)

„Jemand sperrt ein Paar Kaninchen in ein überall mit einer Mauer umgebenes Gehege, um zu erfahren, wie viele Nachkommen dieses Paar innerhalb eines Jahres haben werde, vorausgesetzt, dass es in der Natur der Kaninchen liege, dass sie in jedem Monat ein anderes Paar zur Welt bringen und dass sie im zweiten Monat nach ihrer Geburt selbst gebären…“

Didaktik der Mathematik der Sekundarstufe II

Fibonaccifolge

k	f_k
1	1
2	1
3	2
4	3
5	5
6	8
7	13
8	21
9	34
10	55
11	89
12	144



k	f_k
13	233
14	377
15	610
.	.
.	.
.	.
.	.
.	.
20	6 765
30	832 040
40	102 334 155
50	12 586 269 025

1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,…

Didaktik der Mathematik der Sekundarstufe II
Fibonaccifolge

Fibonacci-Zahlen als Summen im Pascalschen Dreieck

1 1 2 3 5 8 13 21 …

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

Didaktik der Mathematik der Sekundarstufe II

Fibonaccifolge und Goldener Schnitt

Rekursive Bildungsvorschrift:

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$; $a_1 = 1$; $a_2 = 1$

Für große n nähert sich der Quotient $x = \frac{a_n}{a_{n-1}}$ aufeinanderfolgender Glieder der Folge der Zahl nach dem Goldenen Schnitt

$\longrightarrow$ „Bekanntschaft“ mit einem Grenzwert

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \mid : a_{n-1}$$

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = 1 + \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}}$$

$$x = 1 + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

Explizite Bildungsvorschrift:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$