HUMBOLDT-UNIVERSITÄT ZU BERLIN

Institut für Mathematik

Naturwissenschaftliche Fakultät II

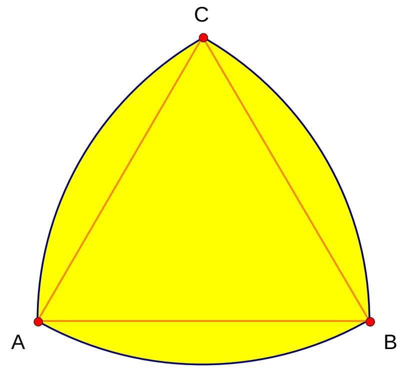
Ausgewählte Kapitel der Didaktik der Mathematik – Computerunterstützter Mathematikunterricht

Leitung: Priv.- Doz. Dr. I. Lehmann

SS 2009

Das Reuleauxsche Dreieck mit „The Geometer's SketchPad"

22.06.2009



Das Reuleauxsche Dreieck

Katja Kostrzewski 50 44 10 Katjako@t-online.de Master of education (2)

Inhaltsverzeichnis

Bemerkung:

In dieser Arbeit werden Lehrer und Lehrerinnen, Studenten und Studentinnen, Seminarteilnehmerinnen und Seminarteilnehmer sowie Schüler und Schülerinnen lediglich als Lehrer, Studenten, Seminarteilnehmer und Schüler bezeichnet.

1. Einleitung

Diese Arbeit ist eine Zusammenfassung der Inhalte und Ergebnisse des von Katja Kostrzewski gestalteten Seminars zum Thema „Das Reuleauxsche Dreieck mit „The Geometer's SketchPad"". Ziel dieses Seminars war es zum Einen den Studenten das Thema „Das Reuleauxsche Dreieck" als Thema einer computerunterstützten Unterrichtseinheit vorzustellen und zum Anderen verschiedenste Befehle und Möglichkeiten des Programmes „The Geometer's SketchPad" zu demonstrieren.

Da dieses mathematische Thema den Studenten weder aus der Schule noch aus der Universität bekannt war, erfolgte zu Beginn des Seminars eine kurze theoretische Einführung, die mit Bildern und Animationen visuell unterstützt wurde. Anschließend erarbeiteten die Studenten sich verschiedenste Eigenschaften eines Reuleauxschen Dreiecks mit Hilfe des Programms „The Geometer's SketchPad". Zur schnelleren Lösung der Aufgabenstellung wurden programmtechnische Tipps gegeben. Im Anschluss präsentierte jeweils ein Student seine Lösung. Ein Bezug zum Mathematikunterricht sollte mit der Vorstellung von verschiedenen Alltagsbezügen zum Thema und weiteren mathematischen Problemstellungen erfolgen. Abschließend diskutierten die Studenten über Probleme und Einsatzmöglichkeiten der Aufgabenstellungen im Mathematikunterricht sowie den generellen Nutzen einer Unterrichtseinheit zum Thema „Das Reuleauxsche Dreieck" mit „The Geometer's SketchPad".

Die Gliederung dieser Belegarbeit erfolgt analog zum Ablauf des Seminars. Nach einer kurzen Einführung in das Thema „Das Reuleauxsche Dreieck", werden die bearbeiteten Seminaraufgaben, ihre Lösungen und die Ergebnisse der Diskussion vorgestellt. Zum Schluss werden mögliche Alltagsbezüge und weiter mathematische Problemstellungen vorgestellt.

Hinweis:

Zur besseren Übersicht wird im laufenden Text „Reuleauxsches Dreieck" mit **RD** abgekürzt.

2. Das Reuleauxsche Dreieck (RD)

2.1 Einführung in die Thematik

[1]Bei einem Wagenrad wird die Tatsache ausgenutzt, dass sich der Mittelpunkt beim Rollen immer auf einer konstanten Höhe befindet und sich somit der Wagen horizontal, in einem gewissen Abstand zum Boden bewegt. Um schwere Lasten zu transportieren werden oft zylinderförmige Walzen anstelle achsenfester Räder genutzt. Die Last wird dabei voran geschoben und die überquerten Walzen vor der Last immer wieder abgelegt. Dabei rollt die Last in einem festen Abstand horizontal über den Boden. Im Gegensatz zum Wagenrad, das immer kreisförmig sein muss, um eine Auf- und Abbewegung zu vermeiden, müssen die Walzen keinen kreisförmigen Querschnitt aufweisen. Der Mittelpunkt spielt hier keine Rolle, sondern die konstante Breite der Walze in alle Richtungen. Diese Eigenschaft besitzt der Kreis. Es existiert aber zusätzlich noch eine große Menge anderer Kurven, die eine konstante Breite in alle Richtungen aufweisen. So z.B. das RD. Eine Geometer's SketchPad – Animation (reulroll.gsp) zur Veranschaulichung lässt sich unter folgendem Link finden: http://whistleralley.com/reuleaux/reuleaux.htm (Internetseite von P. Kunkel).

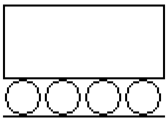


Abbildung 1: Bewegen von Lasten über zylinderförmige Lasten

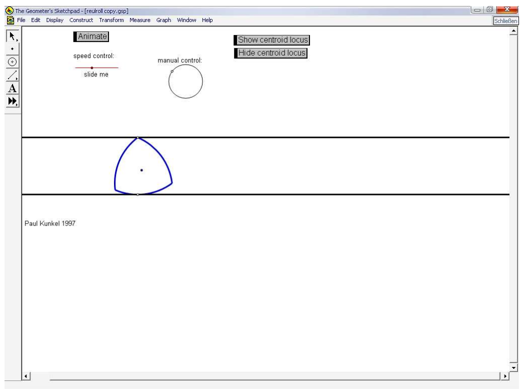


Abbildung 2: Rollendes Reuleauxsches Dreieck zwischen einem Paar Parallelen

2.2 Kurze Theorie zum Reuleauxschen Dreieck[2]

Das RD ist das einfachste, nicht triviale Beispiel eines Gleichdicks. Unter einem Gleichdick versteht man eine geschlossene, konvexe Kurve mit konstanter Breite b in jeder Richtung. Den Trivial-Fall stellt der Kreis dar, der definiert ist als eine Kurve, deren sämtliche Punkte vom Mittelpunkt den gleichen Abstand haben. Die

[1] Abbildung 1 wurde von folgender URL übernommen: http://www.mathematische-basteleien.de/gleichdick.htm

[2] Die hier vorgestellten Definitionen und Eigenschaften eines RD sind dem Buch „Von Zahlen und Figuren" von Rademacher und Toeplitz entnommen (siehe Literaturverzeichnis). Bei weiterem Interesse findet man dort die entsprechenden, Beweise zur Existenz und Eindeutigkeit der Stützgeraden sowie anderer interessanter Eigenschaften.

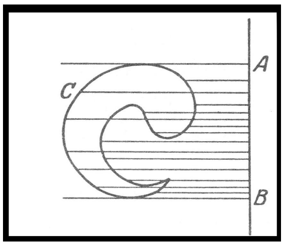


Abbildung 3: Bestimmung der Breite einer Kurve durch Projektion[3]

Breite einer solchen Kurve wird bestimmt, indem man alle Punkte der Kurve senkrecht auf eine Gerade projiziert. Die gesamte projizierte Strecke AB entspricht dann der Breite b (siehe Abbildung 3). Durch die Punkte A und B verlaufenden Projektionsgeraden haben dabei min. einen Punkt mit der projizierten Kurve gemeinsam, lassen den Rest der Kurve jedoch ganz auf einer Seite. Solche Geraden nennt man Stützgeraden. Eine geschlossene, konvexe Kurve konstanter Breite b besitzt somit in jeder Richtung genau zwei parallele Stützgeraden mit dem Abstand b. Ein Rhombus entsteht, wenn man zwei Paare paralleler Stützgeraden an solch eine Kurve anlegt. Stehen die Stützgeradenpaare senkrecht aufeinander, so ergibt sich ein Quadrat mit der Seitenlänge b, indem sich eine Kurve konstanter Breite b ohne Spielraum drehen lässt. Eine Geometer's SketchPad - Animation (reulrhom.gsp) zur Veranschaulichung lässt sich unter folgendem Link finden: http://whistleralley.com/reuleaux/reuleaux.htm.

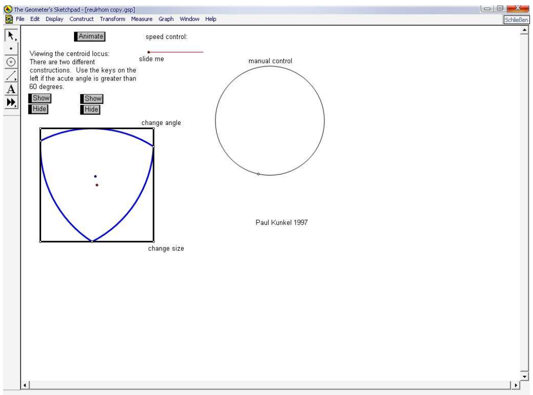


Abbildung 4: Drehendes Reuleauxsches Dreieck im Quadrat

Mit Hilfe dieser Animation kann man auch die Bahn des Schwerpunktes eines RD verfolgen. Dieser bewegt sich kreisförmig auf vier elliptischen Bögen. Nähere Informationen dazu findet man in dem Zeitungsartikel „Das Reuleaux-Dreieck - ein bizzarrer Rotor und Kurvengenerator" von G. Schierscher in der Zeitschrift *mathematik lehren 130* (2005, S. 48-51).

[3] Die Abbildung stammt aus dem Buch „Von Zahlen und Figuren" von Rademacher und Toeplitz (siehe Literaturverzeichnis)

3. Aufgaben zum Thema „ Das Reuleauxsches Dreieck“

3.1 Konstruktion eines Reuleauxschen Dreiecks

3.1.1 Aufgabenstellung

a) Konstruiere Sie ein RD. Bauen Sie ihre Konstruktion auf einem gleichseitigen Dreieck A, B, C mit der Seitenlänge a = 5 cm auf. Erstellen Sie danach ein Makro und eine Konstruktionsbeschreibung für ein RD.

Tipp:

Zur Konstruktion eines Kreisbogens auf einem Kreis markieren Sie zunächst den ursprünglichen Kreis und anschließend die zwei Punkte zwischen denen der Kreisbogen konstruiert werden soll. Der Kreisbogen wird unter *Construct/Arc on Circle* vom ersten markierten Punkt gegen den Uhrzeigersinn zum zweiten markierten Punkt hin erstellt.

3.1.2 Lösung

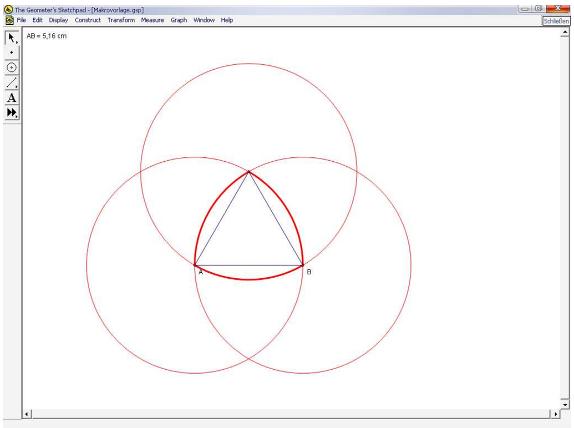


Abbildung 5: Konstruktion eines RD mit Geometer's SketchPad

Konstruktionsbeschreibung:

1) Strecke AB mit a = 5 cm
2) Kreis l um A mit r = 5 cm
3) Kreis m um B mit r = 5 cm
4) Schnittpunkt C der Kreise l und m
5) Strecke AC und BC
6) Kreise n um mit r = 5 cm
7) Kreisbögen AB,BC und CA
8) Kreise l, m und n ausblenden

3.1.3 Theorie und weiterführende Inhalte für den Unterricht

Das RD ist ein gleichseitiges Kreisbogendreieck, „von dem jede Ecke Mittelpunkt des gegenüberliegenden Kreisbogens ist.“ (Rademacher, Toeplitz, Reprint 2001 der zweiten Auflage). Zur Konstruktion dient als Ausgangsfläche ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge a. Um dessen Ecken werden Kreisbögen mit dem Radius r = a zwischen den beiden gegenüberliegenden Punkten des Dreiecks geschlagen. Auf die gleiche Art können, ausgehend von regelmäßigen Vielecken, weitere Reuleauxsche Polygone konstanter Breite b konstruiert werden, wie z.B. das Reuleauxsche Pentagon:

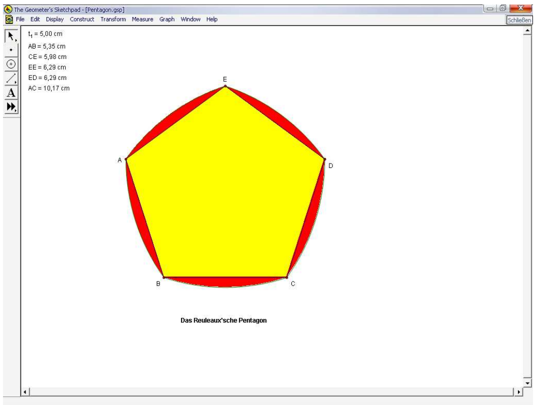


Abbildung 6: Reuleauxsches Pentagon

Ein Polygon mit konstanter Breite muss aber nicht immer symmetrisch sein, wie die folgende Konstruktionsvorschrift von Rademacher und Toeplitz (Rademacher, Toeplitz, Reprint 2001 der zweiten Auflage) zeigt. Als Konstruktionsidee dient hier ein gleichseitiges, sich überschlagendes Polygon mit (2n-1) Ecken bzw. Seiten. Der Leser möge sich selbst vergewissern, warum es immer eine ungerade Anzahl von Ecken bzw. Seiten sein muss[4].

„Man fixiere einen Punkt der Ebene als eine Ecke B und schlage um B einen Kreisbogen mit dem Radius b. Auf diesem Bogen nimmt man zwei neue Eckpunkte A und C an. Der Kreisbogen mit b als Radius um C geht nun wieder durch B, da BC = b durch die bisherige Konstruktion war. Auf diesem Kreisbogen werde nun D als eine neue Ecke angenommen. Der Kreisbogen mit dem Radius b um D geht durch C. Um nun die Figur einmal zu schließen, werde auf diesem Kreisbogen die neue Ecke E nicht willkürlich angenommen, sondern sie liege zugleich auf dem durch B gehenden Bogen um A mit dem Radius b, werde also als Schnittpunkt zweier Kreisbögen bestimmt.“

Ein Beispiel eines fünfeckigen nicht symmetrischen Kreispolygon ist in Abbildung 7 dargestellt.

[4] Ein gedanklicher Beweis ist bei Rademacher und Toeplitz (Rademacher, Toeplitz, Reprint 2001 der zweiten Auflage) beschrieben (S. 140-141).

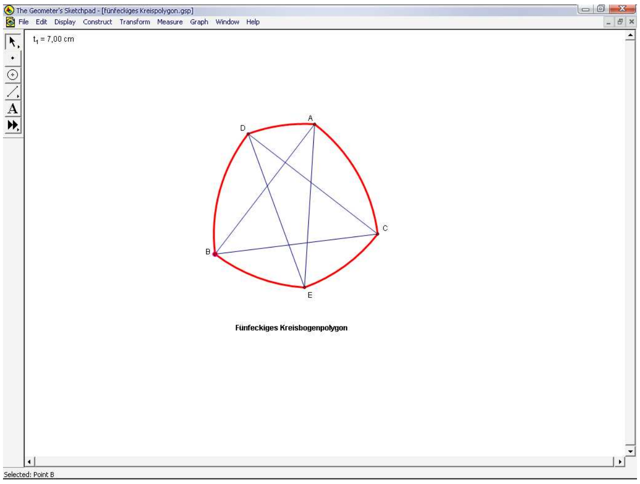
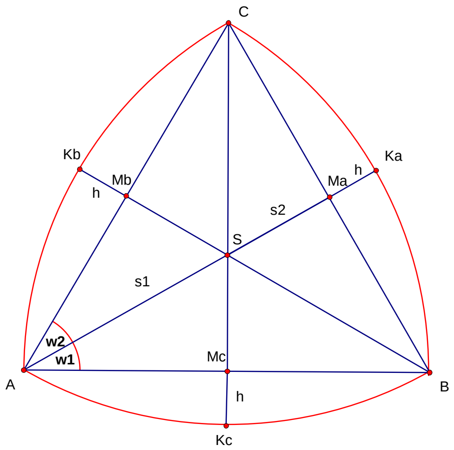


Abbildung 7: fünfeckiges Kreispolygon

3.2 Bestimmung der Strecke h in einem Releauxschen Dreieck nach I. Lehmann[5]

3.2.1 Aufgabenstellung

a) Bestimmen Sie die Länge der Strecke h eines RD. M ist der Schwerpunkt des gleichseitigen Dreiecks.



a. Erstellen Sie mit Hilfe Ihres Makros ein RD.

b. Zeichnen Sie die Strecke h ein.

c. Leiten Sie eine Formel zur rechnerischen Bestimmung der Strecke h her und bestimmen Sie diese für ein RD der Breite b = 5 cm.

Tipp:

Zur besseren Übersicht können Sie verschiedene Strecken einfärben, indem Sie mit der rechten Maus-Taste auf die entsprechende Strecke klicken und unter *Colour* die Farbe auswählen.

d. Kontrollieren Sie Ihr rechnerisches Ergebnis mit Hilfe von Geometer‘s SketchPad.

3.2.2 Lösung

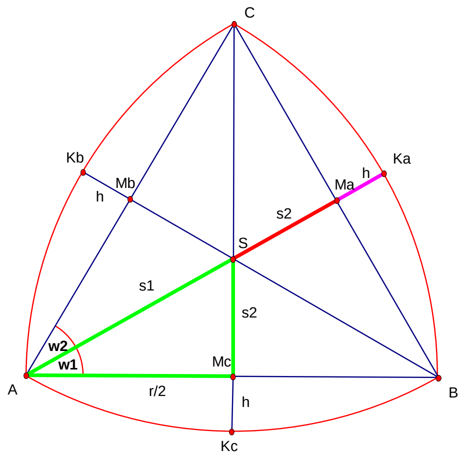


Abbildung 8: RD mit eingezeichneter Strecke h

[5] Lehmann, I. (kein Datum). *Bezirksregierung Düsseldorf.* Abgerufen am 15. Juni 2009 von http://www.nps-brd.nrw.de/BezRegDdorf/hierarchie/lerntreffs/mathe/pages/magazin/geschichten/pi/pi.pdf

Der Schwerpunkt eines gleichseitigen Dreiecks ist der Schnittpunkt der Seitenhalbierenden. Dieser teilt die Seitenhalbierenden in zwei Abschnitte, deren Verhältnis 2:1 ist. Daraus folgt: $s_1 = 2*s_2$.

Die Seiten des gleichseitigen Dreiecks entsprechen dem zu den Kreisbögen gehörendem Radius r.

$$r = |\overline{AB}| = |\overline{BC}| = |\overline{AC}| = |\overline{AK_a}| = |\overline{BK_b}| = |\overline{CK_c}|$$

Daraus folgt, dass r die Summe der Abschnitte S_1, S_2 und h ist.

$$r = s_1 + s_2 + h = 2s_2 + s_2 + h = 3s_2 + h$$

$$r = s_1 + s_2 + h = s_1 + s_1/2 + h = 3s_1/2 + h$$

Nach dem Satz des Pythagoras ($s_1^2=s_2^2+r^2/4$) erhält man damit

$$s_1 = r*\mathrm{sqrt}(1/3) = r*(\mathrm{sqrt}(3)/3)$$

$$s_2 = r*\mathrm{sqrt}(1/12) = r*(\mathrm{sqrt}(3)/6).$$

Für die Strecke h ergibt sich dann

$$h = [(2-\mathrm{sqrt}(3))/2]*r.$$

Da der Radius r gleich der Breite b eines RD ist, ergibt sich für ein RD der Breite b = 5cm eine Länge der Strecke h von h ≈ 0,67 cm.

Die Strecke h kann für ein RD mit der Breite b = 5cm ebenfalls mit Geometer‘s SketchPad bestimmt werden. Dafür markiert man die Strecke bzw. die beiden Punkte und lässt die Länge bzw. die Distanz unter *Measure/Length* bzw. *Measure/Distanze* messen. Der Vergleich zeigt, dass beide Ergebnisse übereinstimmen.

3.3 Bestimmung des Umfangs eines Reuleauxschen Dreiecks

3.3.1 Aufgabenstellung

a) Der Satz von Emile Barbier (1839-1889) besagt, dass der Umfang U eines RD mit der Formel $\mathbf{U_{RD} = \pi r}$ berechnet werden kann.

   a. Leiten Sie die Formel zur Berechnung des Umfangs U_{RD} eines RD selbst her.

   b. Bestimmen Sie anhand dieser Formel den Umfang U_{RD} eines RD mit der Breite b = 5 cm.

   c. Erstelle Sie mit Hilfe Ihres Geometer's SketchPad - Makros ein RD der Breite b = 5cm und messen Sie Ihren rechnerisch bestimmten Umfang U_{RD} nach.

Tipp:

Zur Bestimmung der Länge eines Kreisbogens markieren Sie diesen und lassen sich die Länge unter *Measure/Arc Length* ausgeben.

   d. Vergleichen Sie den Umfang U_{RD} des RD aus Aufgabenteil b mit dem Umfang U_K eines Kreises der <u>gleichen</u> Breite b. Was fällt Ihnen auf? ($U_K = 2\pi r$ mit r – Radius des Kreises)

3.3.2 Lösung

Ein RD setzt sich aus drei 60°-Bögen zusammen. Somit berechnet sich der Umfang eines RD aus der dreifachen Kreisbogenlänge eines 1/6-Kreises mit dem Radius r = b (b – konstante Breite eines RD).

$U_{RD} = 3[(1/6)(2\pi r)] = \pi r = \pi b$

Ein RD mit der Breite b = 5 cm besitzt einen Umfang $U_{RD} = \pi 5\text{cm} \approx 15{,}71$ cm.

Der Vergleich dieses Ergebnisses mit dem Ergebnis aus Geometer's SketchPad (Siehe Abbildung 9) zeigt, dass beide übereinstimmen.

Ein Kreis der gleichen Breite b, d.h. mit einem Durchmesser d = b und einem Radius r = (b/2), weist ebenfalls einen Umfang $U_K \approx 15{,}71$ cm auf!

$$U_K = 2\pi r = 2\pi(b/2) = \pi b = \pi 5\text{cm} \approx 15{,}71 \text{ cm}$$

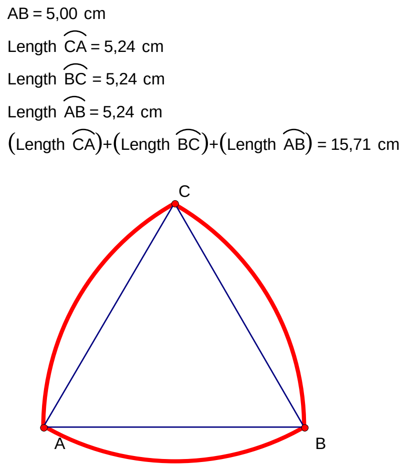


Abbildung 9: Bestimmung des Umfangs U_{RD} mit Geometer's SketchPad

Für den Mathematikunterricht ist es ausreichend mit den Schülern den Vergleich zwischen RD und Kreis zu ziehen. Verallgemeinernd kann man jedoch sagen, dass alle Kurven derselben konstanten Breite b den gleichen Umfang $U = \pi b$ haben. Ein Beweis ist im Buch „Convex Sets and Their Applications“ (Lay, 1992, Reprint Edition) zu finden. Dieser ist für die Sekundarstufe I nicht geeignet. Ein möglicher Einsatz in einem leistungsstarken Leistungskurs Mathematik ist jedoch denkbar.

3.4 Bestimmung des Flächeninhalts eines Reuleauxschen Dreiecks

3.4.1 Aufgabenstellung

a) Leiten Sie eine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A_{RD} her.

   a. Konstruieren Sie ein RD der Breite b = 5 cm mit Hilfe Ihres Geometer's SketchPad – Makros.

   b. Aus wie vielen Teilflächen berechnet sich A_{RD}? Färben Sie die entsprechenden Teilflächen ein.

Tipp:

Zum Einfärben einer gradlinig begrenzten Fläche markieren Sie die Eckpunkte und klicken auf *Construct/… Interior*. Zum Einfärben von Kreissegmenten markieren Sie den Kreisbogen und klicken auf *Construct/Arc Interior/Arc Segment.*

   c. Stellen Sie eine entsprechende Formel zur Berechnung des Flächeninhalts A_{RD} auf und berechnen Sie diesen für ein RD der Breite b = 5 cm.

   d. Messen Sie den Flächeninhalt mit Hilfe Geometer's SketchPad und vergleichen Sie Ihre Ergebnisse.

Tipp:

Zur Bestimmung des Flächeninhalts einer konstruierten Figur, muss die Fläche bzw. müssen die Teilflächen eingefärbt sein. Markiert man diese, so kann man unter *Measure/Area* den Flächeninhalt bestimmen lassen.

   e. Vergleichen Sie den Flächeninhalt A_{RD} eines RD mit dem Flächeninhalt A_K eines Kreises der gleichen Breite b. Was fällt Ihnen auf?

3.4.2 Lösung

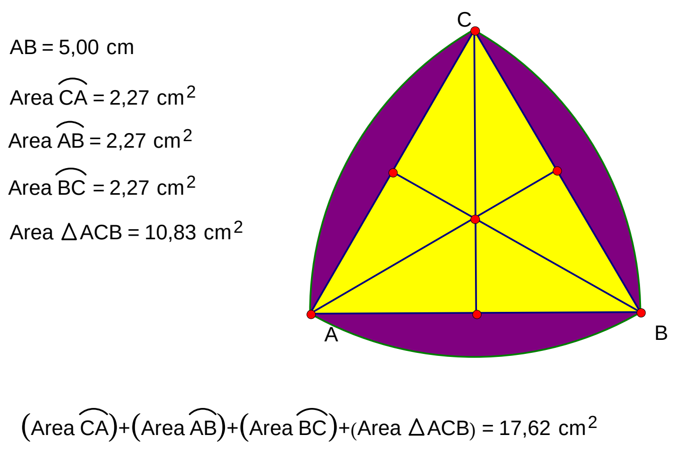


Abbildung 10: Bestimmung des Flächeninhalts A_{RD} mit Geometer's Sketchpad

Der Flächeninhalt eines RD der Breite b ist die Summe des Flächeninhalts A_{GD} des gleichseitigen Dreiecks und der Flächeninhalte A_{KS} der drei Kreissegmente AB, BC, AC, wobei die Breite b = r_K (Kreisradius) = $|\overline{AB}|$... ist.

$$A_{RD} =((¼)\ b^2\ sqrt(3)) + 3\ [(⅙)\ b^2\ \pi - (¼)\ b^2\ sqrt(3)] = b^2/2\ (\pi - sqrt(3))$$

Damit lässt sich der Flächeninhalt eines RD mit der konstanten Breite b = 5 cm berechnen.

$$A_{RD} = (¼)(5cm)^2 sqrt(3) + 3[(⅙)(5cm)^2\pi- (¼)\ (5cm)^2 sqrt(3)] \approx 17{,}62\ cm^2$$

Die Ergebnisse zur Bestimmung des Flächeninhalts A_{RD} eines RD anhand der hergeleiteten Formel und mit Hilfe von Geometer's SketchPad stimmen überein. (Siehe Abbildung 10).

Der Flächeninhalt A_K eines Kreises der Breite b (=Durchmesser) berechnet sich mit folgender Formel:

$$A_K = \pi\ r^2 =\pi\ (b/2)^2 = \pi\ (b^2/4)$$

Vergleicht man die Formeln zur Berechnung der Flächeninhalte folgt, dass die Fläche A_K eines Kreises größer ist als die Fläche A_{RD} eines RD der selben Breite, da

$$b^2/2\ (\pi - sqrt(3))< \pi\ (b^2/4)$$

$$\Leftrightarrow \quad 1/2\ (\pi - sqrt(3))< \pi\ (1/4)$$

$$\Leftrightarrow \quad \pi < 2\ sqrt(3)$$

3,141…<3,464… ist.

$$\Rightarrow \quad A_{RD}<A_K$$

Allgemein lässt sich beweisen, dass der Kreis den größten Flächeninhalt und das RD den kleinsten Flächeninhalt aller Gleichdicken selber Breite besitzt. Den Beweis lieferte W. Blaschke[6].

[6] Im Literaturverzeichnis sind zwei Quellen von W. Blaschke angegeben unter denen der Beweis nachzulesen ist.

4. Alltagsbezüge und weiterführende Problemstellungen

4.1 Warum ist ein Kanaldeckel rund?[7]

Der Kanaldeckel ist rund und somit in jeder Richtung gleich Breit. Beim „Schrägaufsetzen“ fällt er deshalb nicht durch die Kanalöffnung (siehe Abbildung 11). Wäre er z.B. quadratisch, würde er diagonal leicht hindurch passen. Ein weiteres oft angeführtes Argument für eine kreisrunde Form ist die Möglichkeit den Kanaldeckel einfach wegrollen zu können.

Sinnvoller wäre es jedoch die Kanaldeckel in Form eine RD zu gestalten. Aufgrund ihrer konstanten Breite in jeder Richtung passen sie ebenfalls nicht durch die Kanalöffnung, wenn sie schräg aufgesetzt werden. Ein weiterer Vorteil ist die Tatsache, dass ein solch geformter Kanaldeckel einfach weggerollt werden kann, dieser aber selbstständig nicht wegrollt. Da ein RD konstanter Breite einen kleineren Flächeninhalt als ein Kreis mit der selben Breite besitzt, benötigt man weniger Material zu Herstellung. Der Kanaldeckel wird dadurch leichter und billiger, was aus wirtschaftlicher und ökonomischer Sicht als ein weiterer Vorteil angesehen werden kann.

Schon zu Zeiten der Römer wurden die ersten Kanaldeckel aus Stein gehauen. Schnell etablierte sich aus oben genannten Gründen eine kreisrunde Form. Bis Anfang des 19. Jh. waren die Mathematiker der Meinung, dass der Kreis die einzige Kurve konstanter Breite ist und nutzten diese Eigenschaft einen Kreis zu definieren. Das es auch andere Kurven mit dieser Eigenschaft gibt, entdeckte als erster der dt. Ingenieur Franz Reuleaux, nachdem das Reuleauxsche Dreieck benannt worden ist, als er sich mit klassischen Bewegungsmechanismen beschäftigte. Die kreisrunde Form eines Kanaldeckels hatte sich bis dahin jedoch schon soweit etabliert, dass bis heute die Kanaldeckel entgegen der vielen Vorteile einer RD-Form rund geblieben sind.

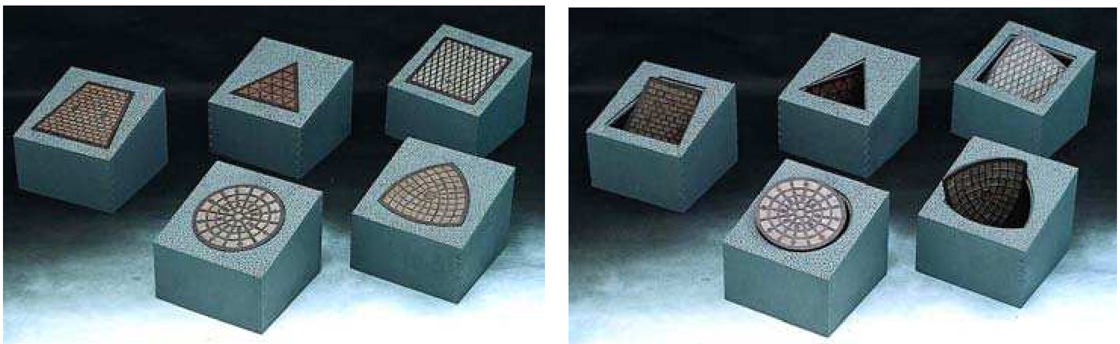


Abbildung 11: Verschiedenen Kanaldeckelformen

[7] Abbildung 11 ist von der Seite http://www.eurocg.org/www.us.es/ewcg04/cosmoakiyama.pdf übernommen (Seite abgerufen am 21.06.2009 um 13:20 Uhr)

4.2 Der CD-Wechsler

Der Plattenhalter für drei CDs eines CD-Wechslers ist von der Form ein RD. Diese Grundfigur, ein RD mit drei Berührungskreisen, kann viele interessante Fragestellungen aufwerfen. Zum einen die Konstruktion selbst, für die ich bis jetzt keine elementargeometrische Lösung gefunden habe. Zum Anderen die Größe des Radius der drei Berührungskreise innerhalb des RD. Ein interessantes Arbeitsblatt zu dieser Fragestellung findet man unter folgendem Link:

http://www.herder-oberschule.de/madincea/aufg0009/reuleaux.pdf[8]

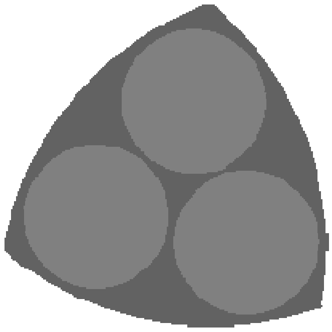


Abbildung 12: CD-Wechsler in Form eines RD[9]

4.3 Eckige Bohrlöcher[10][11]

Lässt man ein RD rotieren, beschreiben die Eckpunkte eine abgerundete quadratische Bahn. Dieser Umstand wird genutzt, um mit Bohrern, wie in Abbildung 13 gezeigt, Bohrlöcher solcher Form zu bohren. Besonders zu beachten ist bei der Konstruktion einer entsprechenden Bohrmaschine, dass der Schwerpunkt eines RD sich kreisförmig auf vier elliptischen Bögen (siehe Animation reulrhom.gsp auf der Internetseite: http://whistleralley.com/reuleaux/reuleaux.htm) bewegt. Dementsprechend muss der Bohrer elliptisch wackelnd aufgehängt sein.

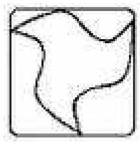


Abbildung 13: RD-Bohrer

Interessant für den Mathematikunterricht kann in diesem Zusammenhang die mathematische Beschreibung der Ellipsenbahnen sowie der Rotation der RD selbst sein. Ausführliche Informationen sind unter anderem in dem Artikel von G Schierscher sowie unter folgender URL

http://mathworld.wolfram.com/ReuleauxTriangle.html zu finden.

[8] Madincea, A. (15. 05 2009). *Materialien für Mathematikunterricht.* Abgerufen am 18. Juni 2009 von http://www.herder-oberschule.de/madincea/aufg0009/reuleaux.pdf

[9] Abbildung 12 ist von der Seite http://www.wundersamessammelsurium.info/mathematisches/reuleaux/index.html übernommen (Seite abgerufen am 21.06.2009 um 13:25Uhr)

[10] Das Bild wurde von folgender URL http://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Drill_bits übernommen (abgerufen 21.06.2009, 13:42 Uhr)

[11] Nähere Informationen finden Sie in dem Artikel von G. Schierscher (siehe Literaturverzeichnis)

5. Diskussionsbeiträge und abschließende Bemerkungen zum Seminar

Als Konsens diese Seminars ist festzuhalten, dass alle Studenten das Thema „Das Reuleauxsche Dreieck“ für den Mathematikunterricht als sehr gut geeignet fanden. Bei der Entdeckung der verschiedenere Eigenschaften des RD, wie z.B. der Umfang, der Flächeninhalt oder die konstante Breite, müssen die Schüler auf ihr vorhandenes Wissen zurückgreifen und diese anwenden. Viele, oft isoliert voneinander unterrichtete, geometrische Themen über den Kreis und das Dreieck werden in dieser Unterrichtseinheit miteinander verbunden und können so von den Schülern vernetzt und wiederholt werden.

Dass die konzipierten Aufgaben nicht nur das Arbeiten mit dem Programms Geometer's SketchPad vorsah, sondern auch Eigenleistung forderte, wurde als sehr gut befunden. Wichtig ist es den Schülern das Programm „The Geometer's SketchPad“ als nützliches Hilfsmittel näher zu bringen, dass ihnen aber die eigentliche „Denkarbeit“ nicht abnimmt. Angemerkt wurde, dass die Aufgaben teilweise zu kleinschrittig waren. Vor allem bei der dritten Aufgabe „Bestimmung des Umfangs eines RD“ könnten die Aufgabenteile b. und c. zusammengefasst werden.

Während des Seminars waren deutliche Unterschiede in der Bearbeitungszeit der Aufgaben bei den Studenten festzustellen. Eine Differenzierung im Schwierigkeitsgrad der Aufgaben wäre somit gerade für Schulklassen von Vorteil, um unproduktive Phasen bei den schneller arbeitenden Studenten bzw. Schülern zu vermeiden. Dies könnte durch das Weglassen von Hilfslinien in Skizzen, Bemerkungen und Aufgabenteilen erreicht werden.

Als Anregung wurde für die Behandlung des Begriffs der konstanten Breite neben einer Computeranimation auch visuelles Anschauungsmaterial zum Anfassen und selber Ausprobieren vorgeschlagen. Damit soll die Vorstellung des Begriffs der konstanten Breite erfahrbarer und einsichtiger werden, da gerade schwächere Schüler Schwierigkeiten damit haben könnten.

Abschließend bleibt festzuhalten, dass ich das Seminar sehr angenehm und produktiv empfand. Die Studenten arbeiteten selbstständig und wissbegierig an den Aufgaben und kamen teilweise sehr schnell auf die Lösungen. Kleine, zusätzliche Knobelaufgaben hätten verhindert, dass mehrere Studenten auf die anderen Studenten warten mussten. Die Diskussionsbeiträge und persönlichen Feedbacks zeigten mir, dass ich meine selbstgesteckten Seminarziele erreicht habe. Die Studenten konnten das Thema „Das Reuleauxsche Dreieck“ als mögliches, spannendes, mathematisch interessantes, computerunterstütztes Unterrichtsthema selbst erfahren und zusätzlich weitere Möglichkeiten des Programms „The Goemeter's

SketchPad“, wie Umfänge und Flächeninhalte von verschiedensten Figuren zu bestimmen, kennenlernen und ausprobieren.

Abschließend hoffe ich, dass in Zukunft sich mehr Schüler mit diesen spannenden Reuleauxschen Dreiecken im Mathematikunterricht beschäftigen werden!

6. Literaturverzeichnis

Blaschke, W. (1915). Konvexe Bereiche gegebener konstanter Nreite und kleinsten Inhalts. *Mathematische Annalen. Bd. 76* , S. 504-513.

Blaschke, W. (1956). Kreis und Kugel. Berlin: Walter De Gruyter & Co.

Köller, J. (2005). *Mathematische Basteleien*. Abgerufen am 2. Juni 2009 von http://www.mathematische-basteleien.de/gleichdick.htm

Kunkel, P. (last update 4. September 2003). *Whistler Alley.* Abgerufen am 13. Juni 2009 von http://whistleralley.com/reuleaux/reuleaux.htm

Lay, S. (Reprint Edition 1992). Convex Sets and their Applications. New York: Wiley & Sons.

Lehmann, I. (kein Datum). *Bezirksregierung Düsseldorf.* Abgerufen am 15. Juni 2009 von http://www.nps-brd.nrw.de/BezRegDdorf/hierarchie/lerntreffs/mathe/pages/magazin/geschichten/pi/pi.pdf

Madincea, A. (15. 05 2009). *Materialien für Mathematikunterricht.* Abgerufen am 18. Juni 2009 von http://www.herder-oberschule.de/madincea/aufg0009/reuleaux.pdf

Mehl, I. (24. Januar 2004). *Wundersames Sammelsurium*. Abgerufen am 16. Juni 2009 von http://www.wundersamessammelsurium.info/mathematisches/reuleaux/

Rademacher, & Toeplitz. (Reprint 2001 der zweiten Auflage). Von Zahlen und Figuren. Berlin: Springer.

Schierscher, G. (2005). Das Reuleaux-Dreieck-ein bizzarrer Rotor und Kurvengenerator. *mathematik lehren 130* , S. 48-51.

Weisstein, E. W. (last update 13. Juni 2009). *Wolfram Mathworld.* Abgerufen am 13. Juni 2009 von http://mathworld.wolfram.com/ReuleauxTriangle.html