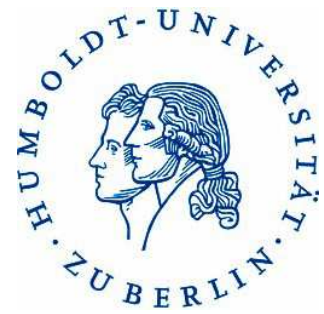


Humboldt-Universität zu Berlin
Lehrveranstaltung: HS Didaktik
Wintersemester 2009 / 2010
Dozenten: Fr. Warmuth, Hr. Giese



Ausarbeitung zum Seminarvortrag

Integralrechnung

Selçuk Yazıcı
selcuk.yazici@web.de
Studiengang: Master of Education
3. Fachsemester

Janine Schumann
sumannja@hotmail.de
Studiengang: Master of Education
3. Fachsemester

Inhaltsverzeichnis

I. Vorkenntnisse der Schüler / Rahmenlehrplan	1
II. Was ist das Integral?	2
1. Einführung	2
2. Zugänge zum Integralbegriff.	3
2.1. Zugang über Riemann-Integral	3
2.2. Zugang über Stammfunktionen	3
2.3. „Moderner Zugang“	3
3. Anwendung des „modernen Zugangs“	4
3.1. Von der Berandung zur Integralfunktion	8
3.2. Verhältnis von Berandung und Integralfunktion	9
III. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	10
IV. Thesendiskussion	14
Literatur	16
Anhang	17

Vorwort

In der folgenden Ausarbeitung wird das Thema „Was ist das Integral?“ behandelt. Zunächst wird auf die Vorkenntnisse der Schüler¹ eingegangen, die sie laut Rahmenlehrplan für die Sekundarstufe II mitbringen sollten und auf welche im Bereich der Integralrechnung aufgebaut werden kann. Zu den Schwerpunkten dieser Arbeit zählen die Einführung des mathematischen Integralbegriffs und der geometrische Beweis des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung. Am Ende unserer Ausarbeitung werden drei Thesen diskutiert, die wir dem Plenum zur Diskussion vorgegeben haben.

I. Vorkenntnisse der Schüler / Rahmenlehrplan

Im ersten Kurshalbjahr werden die Voraussetzungen für das Thema der Integralrechnung geschaffen. Im Grundkurs unter dem Schwerpunkt der Analysis lernen die Schüler das Änderungsverhalten von Funktionen, sowie die mittlere und lokale Änderungsrate in realen und in geometrischen Situationen kennen. Außerdem werden der Grenzwertbegriff und der Begriff der Ableitung inhaltlich-anschaulich vermittelt. Im Leistungskurs werden zusätzlich noch der Grenzwert von Zahlenfolgen und die für unsere Lehreinheit auch sehr wichtigen Begriffe der Stetigkeit und Differenzierbarkeit und deren Zusammenhang gelehrt.

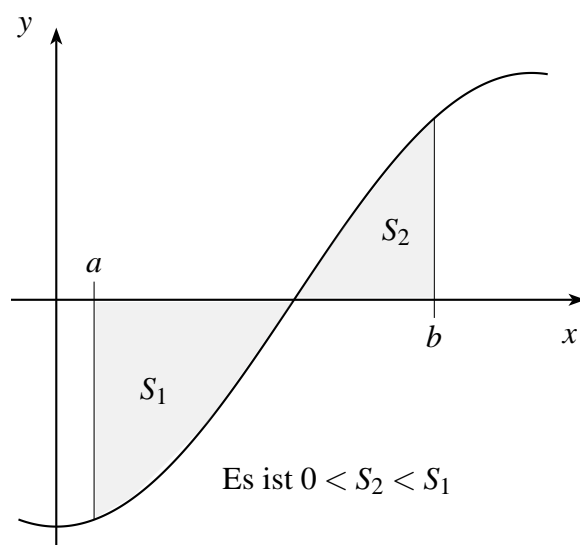
Die Integralrechnung findet man zunächst im Rahmenlehrplan der Sekundarstufe II von Berlin unter dem Punkt „Kompetenzen und Inhalte“ im dem Teilbereich (b) der Analysis. Hier werden sämtliche Inhalte für den Grundkurs als auch für den Leistungskurs von (I) Orientierungswissen – grundlegende mathematische Begriffe und Ideen über (II) Anwendungen, Vertiefung bzw. Systematisierung (Leistungskurs) bis zur (III) Erweiterung und Vernetzung allerdings nur im Leistungskurs aufgeführt. Anschließend wird zusammenfassend der Kompetenzerwerb in diesem Themenfeld festgehalten. Unter dem 5. Themenschwerpunkt des Berliner Rahmenlehrplans werden die Kurshalbjahre angeführt. Hierbei ist erkennbar, dass die Integralrechnung laut Rahmenlehrplan im zweiten Kurshalbjahr unterrichtet wird.

¹ Im weiteren Verlauf wird für Schülerinnen und Schüler kurz Schüler verwendet.

II. Was ist das Integral?

1. Einführung

Die folgende Studie macht deutlich, dass es sich bei dem Integralbegriff um ein mit Missverständnissen behaftetes Themengebiet in der Schule handelt. In der internationalen Vergleichsstudie TIMSS² sollte das mathematische Grundverständnis von Zwölfklässlern und Absolventen untersucht werden. Die Teilnehmer sollten im Rahmen der Studie mit unter die folgende Aufgabe bearbeiten:



Der Wert des Integrals $\int_a^b f(x) dx$ ist dann

- A. $S_1 + S_2$
- B. $S_1 - S_2$
- C. $S_2 - S_1$
- D. $|S_1 - S_2|$
- E. $\frac{1}{2} \cdot (S_1 + S_2)$

In der im Jahre 1999 durchgeführten Vergleichsstudie kamen die deutschen Befragten auf eine Lösungswahrscheinlichkeit von 0,23.³

Auch global wurde die richtige Lösung „Antwort C“ nicht besonders häufig getroffen. Die internationale Lösungswahrscheinlichkeit lag bei nur 0,35. Aufgrund des schlechten Abschneidens aller Studienteilnehmer – nicht nur der Deutschen – sollte der Zugang zum Integralbegriff überdacht und neue Ansätze zur Vermittlung eines Grundverständnisses umgesetzt werden.

Allerdings ist zu bedenken, dass die Aufgabe auch leicht als eine Art Fangfrage aufgefasst und daher nur bedingt für die Aussage herangezogen werden kann, dass das Grundverständnis vom Integralbegriff nicht deutlich genug vermittelt wurde. Wer nämlich eine Vorstellung vom Integral als orientierten Flächeninhalt hat, kann – wenn er die Voraussetzung „ $0 < S_2 < S_1$ “ überliest – leicht auf die Antwortmöglichkeit A verfallen.

² Third International Mathematics and Science Study

³ http://www.timss.mpg.de/Die_Testaufgaben/TIMSS_3-Aufgaben.pdf

Deutsche Lösungswahrscheinlichkeit	0,23
Deutsche Lösungswahrscheinlichkeit im Grundkurs	0,18
Deutsche Lösungswahrscheinlichkeit im Leistungskurs	0,36

2. Zugänge zum Integralbegriff

Das Hauptziel der Integralrechnung in der Sekundarstufe II ist die Vermittlung der Fähigkeit, die Maßzahlen von Flächen zu berechnen, die gewisse Kurven mit der x -Achse oder mit anderen Kurven einschließen. Im Folgenden sollen die unterschiedlichen Zugänge zum Integralbegriff mit ihren Vor- und Nachteilen vorgestellt werden:

1. Definition als Riemann-Integral mit gemeinsamen Grenzwert von Ober- und Untersumme
2. Umkehrung der Differentialrechnung und Entdeckung der Stammfunktion als Flächeninhaltsfunktion
3. Ausgehend von der Präexistenz des Inhalts werden Eigenschaften der Flächeninhaltsfunktion untersucht

2.1. Zugang über Riemann-Integral

Vorteile	Nachteile
– wissenschaftlich exakt	– schwer für den Anfang – hoher Rechenaufwand – rechentechnische Schwierigkeiten – zu viele Begrifflichkeiten – Grundverständnis tritt in den Hintergrund

2.2. Zugang über Stammfunktionen

Vorteile	Nachteile
– Folgerung von Eigenschaften des Integrals aus Sätzen der Differentialrechnung	– Gleichsetzung von Integrierbarkeit und Stammfunktion besitzen – „Antididaktische Inversion“ – fehlender Anwendungsbezug – späte Einordnung als orientierter Flächeninhalt

2.3. „Moderner Zugang“

Vorteile	Nachteile
– Hauptsatz früh verfügbar – fördert das Grundverständnis des Integrals als orientierter Flächeninhalt – offen für spätere Präzisierung	– Realisierung sehr anspruchsvoll – auch hier Verkürzung auf die Bestimmung von Flächeninhalten

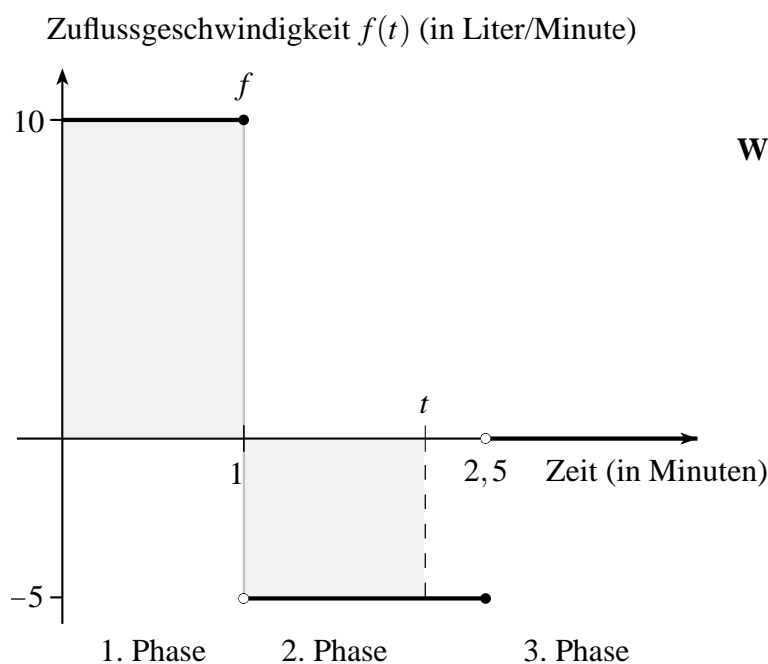
3. Anwendung des „modernen Zugangs“

Das Integrieren wird dem Schüler als Rekonstruieren dargestellt. Es wird veranschaulicht, dass sich von einer bekannten Funktion eine gesuchte Größe rekonstruieren lässt. Diese Rekonstruktion wird zunächst geometrisch dargestellt. Der Zusammenhang von rekonstruierter Funktion zur Ausgangsfunktion wird mittels Differentialrechnung untersucht und führt dann letztlich zum Hauptsatz.

Ein Einführungsbeispiel könnte wie folgt lauten:

In eine leere Badewanne wird eine gewisse Zeit lang gleichförmig Wasser eingelassen, dann die Wasserzufuhr gestoppt, gleichzeitig der Abfluss geöffnet und nach einer Weile wieder geschlossen.

Graphisch lässt sich dies wie folgt darstellen:



Wir unterscheiden 3 Phasen:

1. Phase: Zuflussphase
2. Phase: Abflussphase
3. Phase: gleichbleibende Phase

Ziel ist es, einen Rückschluss von der Zuflussgeschwindigkeit auf die Wassermenge zu ziehen. Den Schülern sollte klar gemacht werden, dass es sich hier um ein bekanntes Problem handelt. Die Schüler wissen aus dem Physikunterricht, dass die Fläche unterhalb einer Kurve in einem $v-t$ -Diagramm den zurückgelegten Weg widerspiegelt. Eine Erinnerung an die Gesetzmäßigkeiten müsste ausreichen, um die folgenden Rechnungen ohne Probleme ausführen zu können. Für einen Zeitpunkt t während der Zuflussphase ist die bis dahin zugeflossene Wassermenge gleich dem Produkt:

$$10 \frac{\text{Liter}}{\text{Minute}} \cdot t \text{ Minuten} = 10 t \text{ Liter}$$

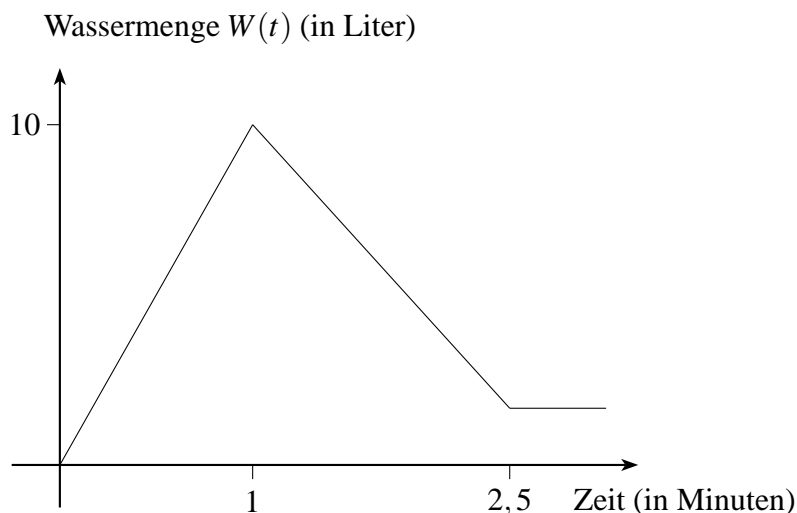
Für einen Zeitpunkt t der Abflussphase ist

$$10 \text{ Liter} - 5 (t - 1) \text{ Liter}$$

die momentane Wassermenge. Die Wassermenge W in der Wanne in Abhängigkeit von der Zeit t ist damit beschrieben durch:

$$W(t) = \begin{cases} 10 t & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ 10 - 5 (t - 1) & \text{für } 1 < t \leq 2,5 \\ 2,5 & \text{für } t > 2,5 \end{cases}$$

Auch dies lässt sich graphisch darstellen:

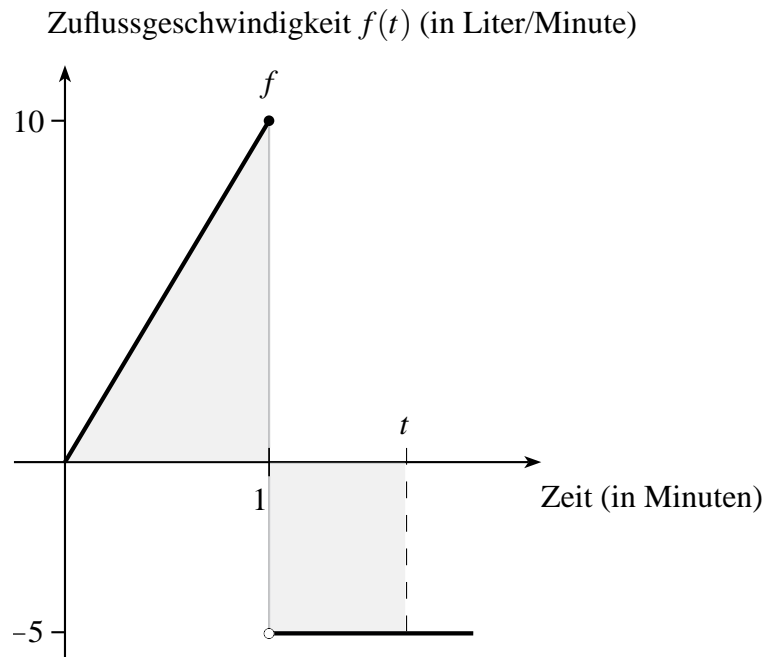


Erste gewonnene Erkenntnisse

Die Wassermenge konnte anhand der Zuflussgeschwindigkeit rekonstruiert werden. Es handelte sich dabei um eine Bilanzierung von Rechteckinhalten. Damit ist das Verständnis vom Integral als Summe vorzeichenbehafteter Rechteckinhalte, also als orientierter Flächeninhalt angeregt, auch wenn der Integralbegriff noch nicht gefallen ist.

Als nächster Schritt erfolgt eine Abwandlung des Badewannenbeispiels. Die Abänderung liegt darin, dass die Zuflussgeschwindigkeit nun gleichmäßig ansteigt und weiterhin eine konstante Abflussgeschwindigkeit vorliegt.

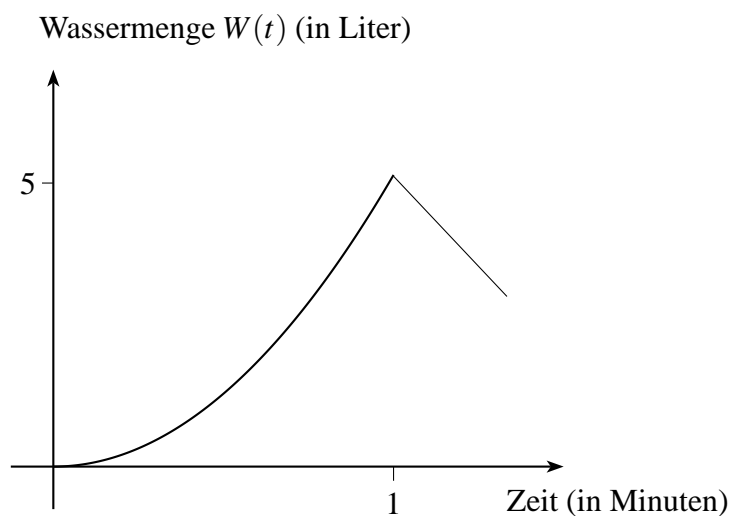
Graphisch lässt sich dies wie folgt darstellen:



Auch hier interessiert uns wieder die Wassermenge. Zur Rekonstruktion der Wassermenge berechnen wir den orientierten Flächeninhalt bis zum Zeitpunkt t :

$$W(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot t \cdot 10 \cdot t & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{2} \cdot 10 - 5 \cdot (t-1) & \text{für } t > 1 \end{cases}$$

Graphisch lässt sich dies wie folgt darstellen:

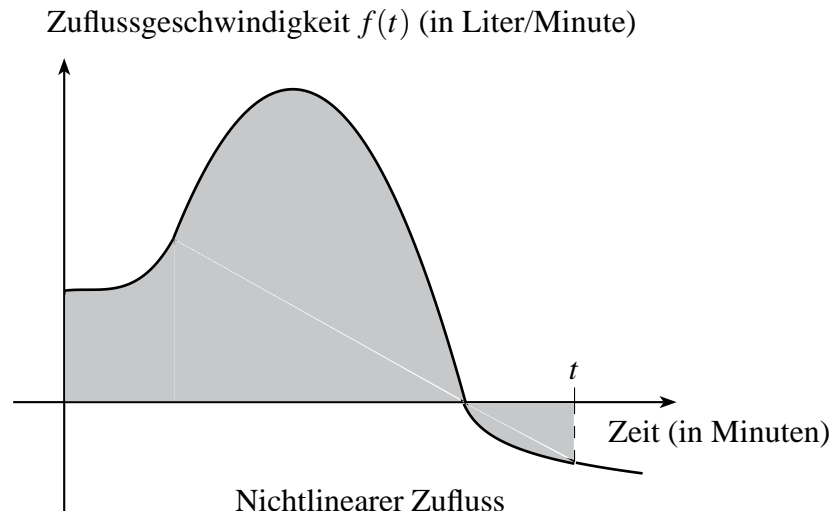


Im Anschluss erfolgt das Lösen eines Aufgabenblattes⁴, welches das abgewandelte Beispiel in der allgemeinen Form aufgreift.

⁴ Siehe Anhang.

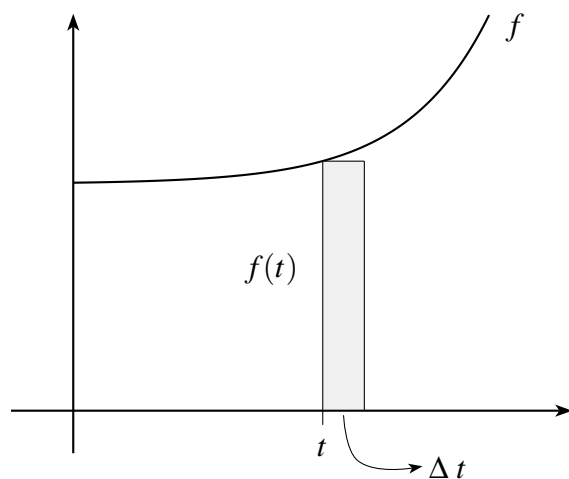
Wie das abgewandelte Beispiel gezeigt hat, ist es kein Problem durch einfache Flächenberechnungen zur rekonstruierten Funktion zu kommen, solange die Zuflussgeschwindigkeit stückweise linear verläuft.

Was passiert, wenn jemand am Zuflusshahn und am Abflusstöpsel herumspielt und f etwa so aussieht:



Idee:

Die Zuflussgeschwindigkeit kann im Kleinen als nahezu konstant betrachtet werden. Zu diesem Zweck kann die Fläche, welche von der Kurve umrandet wird, in einzelne Teilstücke zerlegt werden. In jedem dieser Teilintervalle kann man dann wie oben verfahren:



$f(t)$ ist im Kleinen
nahezu konstant

Der Zuwachs der Wassermenge im Zeitintervall Δt , geometrisch zu deuten als kleiner (orientierter) Rechteckinhalt, ist:

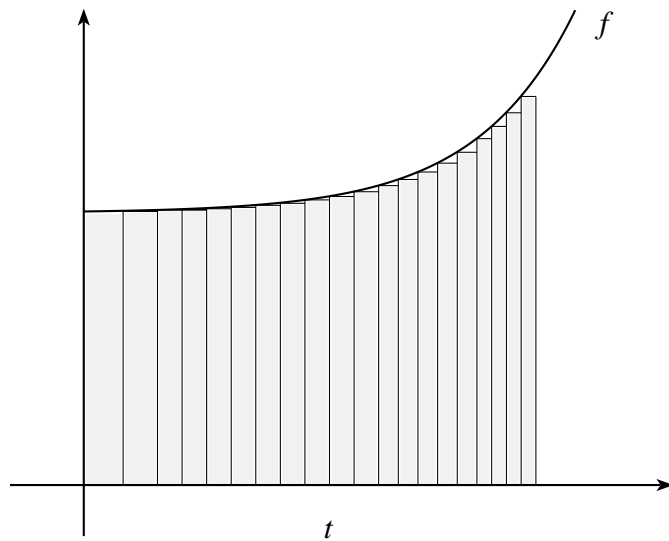
$$\Delta W \approx f(t) \cdot \Delta t$$

Nach $f(t)$ umgestellt:

$$f(t) \approx \frac{\Delta W}{\Delta t}$$

Man kann sehen, dass für kleine Δt in guter Näherung f die momentane Änderungsrate von W ist.

Zur Rekonstruktion der Wassermenge zu einem beliebigen Zeitpunkt t sind die Zuwächse längs aller Teilintervalle, in die das Intervall $[0, t]$ zerlegt gedacht war, aufzusummieren.



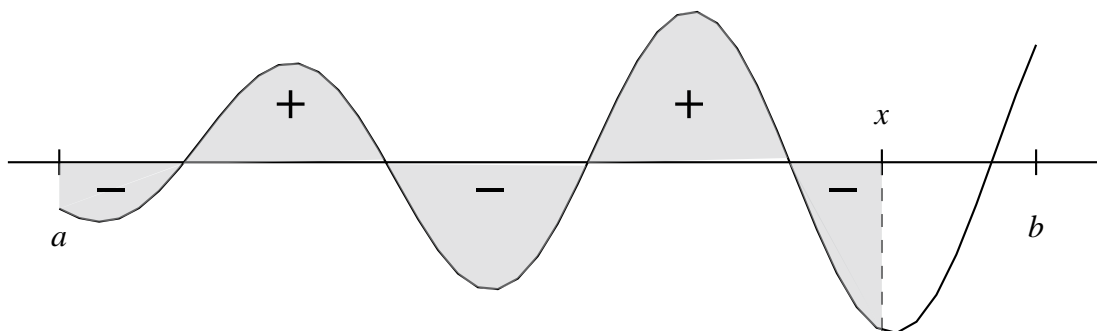
Die Summe der genäherten Zuwächse
 Geometrische Deutung von $W(t)$ als Summe aller orientierter Rechteckinhalte.
 Je kleiner die Teilintervalle, desto geringer der Unterschied zum tatsächlichen Inhalt unter f .

Idee:

Die rekonstruierten Funktionswerte sind interpretier- und berechenbar als orientierte Flächeninhalte. Kennt man die lokale Änderungsrate in einem Intervall, kann man dort die Funktionswerte rekonstruieren.

3.1. Von der Berandung zur Integralfunktion

Definition 1. Zu einer Berandung $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ gehört die Integralfunktion I_a , die jedem $x \in [a, b]$ den **orientierten** Inhalt der Fläche zuordnet, die f mit der x -Achse zwischen a und x einschließt. Die Funktionswerte der Integralfunktion heißen **Integrale**.



$I_a(x) :=$ (Summe der Inhalte aller oberhalb der x -Achse gelegenen Flächenstücke zwischen a und x) $-$ (Summe der Inhalte aller *unterhalb* der x -Achse gelegenen Flächenstücke zwischen a und x)

3.2. Verhältnis von Berandung und Integralfunktion

Das Verhältnis von der Berandung und der Integralfunktion soll durch eine Gegenüberstellung der jeweiligen Funktionsterme aus den Beispielen erfolgen.

Dies sieht dann wie folgt aus:

$$f(t) = \begin{cases} 10 & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ -5 & \text{für } 1 < t \leq 2,5 \\ 0 & \text{für } t > 2,5 \end{cases} \quad I_o(t) = \begin{cases} 10t & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ -5t + 15 & \text{für } 1 < t \leq 2,5 \\ 0 & \text{für } t > 2,5 \end{cases}$$

bzw. für die Abwandlung I

$$f(t) = \begin{cases} 10t & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ -5 & \text{für } t > 1 \end{cases} \quad I_o(t) = \begin{cases} 5t^2 & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ -5t + 10 & \text{für } t > 1 \end{cases}$$

Hier sollen die Schüler die Vermutung aufstellen, dass die Ableitung der Integralfunktion gleich der Berandung ist. Dies führt uns zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, welcher dann geometrisch bewiesen werden soll.

III. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Die Aussage des Hauptsatzes, dass die Ableitung der Integralfunktion zur berandenden Funktion (Berandung) zurückführt wird am Eingangsbeispiel gezeigt. Dazu stellen wir die Funktionswerte der Zuflussgeschwindigkeit (Berandung W') und der rekonstruierten Wassermenge (Integralfunktion $I_o = W$) jeweils gegenüber, um einen möglichen Zusammenhang zeigen zu können.

Es scheint so zu sein, dass überall dort, wo die Integralfunktion differenzierbar ist, ihre Ableitung mit der Randfunktion übereinstimmt. Diese Vermutung

$$I'_a(x_o) = f(x_o)$$

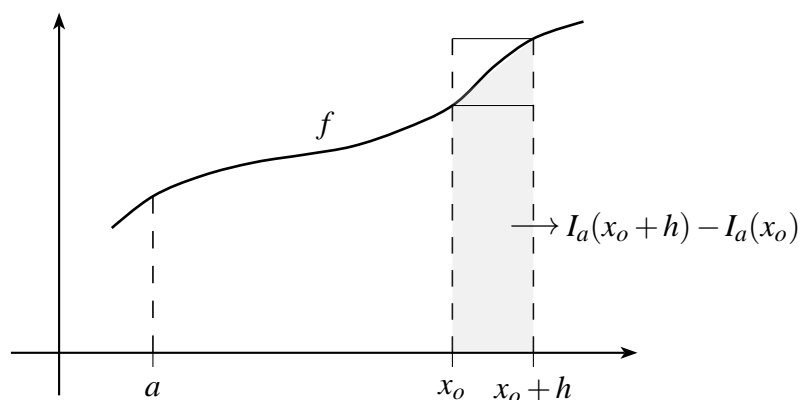
muss allgemein untersucht werden.

Dabei beginnt f an einer beliebigen Stelle a , wobei I_a die zugehörige Integralfunktion sei.

Interessant für uns ist zunächst hier die Differenzierbarkeit der Integralfunktion I_a an einer Stelle $x_o (> a)$. Somit betrachten wir das Verhalten des Differenzenquotienten:

$$\frac{I_a(x_o + h) - I_a(x_o)}{h}$$

Der Zähler $I_a(x_o + h) - I_a(x_o)$ ist als Flächenstück zu sehen (für monoton wachsendes f).



Damit kann man das oben genannte Flächenstück durch Rechteckflächen abschätzen.

$$f(x_o) \cdot h \leq I_a(x_o + h) - I_a(x_o) \leq f(x_o + h) \cdot h$$

Nach dividieren durch h erhalten wir:

$$f(x_o) \leq \frac{I_a(x_o + h) - I_a(x_o)}{h} \leq f(x_o + h) \tag{1}$$

Jetzt ist erkennbar, dass I_a genau dann an der Stelle x_o differenzierbar ist, wenn f die Eigenschaften hat, dass $f(x_o + h)$ für $h \rightarrow 0$ gegen $f(x_o)$ strebt. Das heißt, wenn

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_o + h) = f(x_o) \quad (2)$$

ist. Das folgt genau dann, wenn f an der Stelle x_o stetig ist.

Aus (1) und (2) folgt

$$f(x_o) \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{I_a(x_o + h) - I_a(x_o)}{h} \leq f(x_o)$$

Da die untere Grenze gleich der oberen Grenze ist, folgt daraus, dass der Grenzwert gleich $f(x_o)$ ist.

Somit folgt wie vermutet:

$$I'_a(x_o) = f(x_o) \quad (3)$$

Wir erhalten das Ergebnis, dass die Differenzierbarkeit der Integralfunktion an der Stelle x_o , sowie die vermutete Beziehung (3) dann gesichert sind, wenn die Berandung f an der Stelle x_o stetig ist.

Daraus ergibt sich folgender Satz:

Satz 1. *Ist $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist die zugehörige Integralfunktion I_a in x_o differenzierbar, und es gilt:*

$$I'_a(x_o) = f(x_o).$$

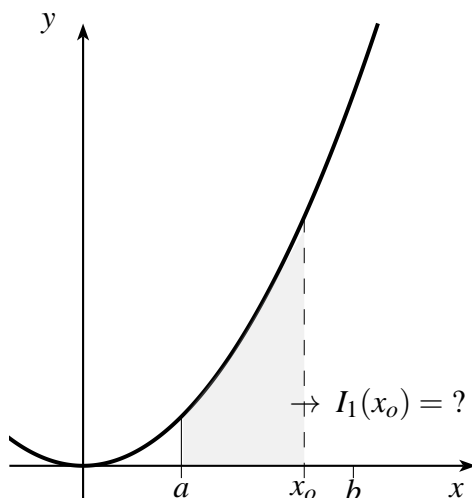
Hierbei sagt man, I_a ist Stammfunktion von f . f entsteht aus I_a durch Ableitung und stammt also von f ab. Aus dem Grund kommt der Begriff Stammfunktion zu Stande. Allgemein definiert man:

Definition 2. *Eine Funktion F heißt **Stammfunktion** von f , wenn*

$$F' = f.$$

Ziel war es ein Verfahren zu entwickeln, zu einer stetigen Berandung f die Integralfunktion I_a zu finden. Dies versuchen wir an einem Beispiel vorzustellen.

Beispiel 1. Normalparabel $f(x) = x^2$, $a = 1$



Wegen Satz 1 kommen für gesuchte I_1 nur solche Funktionen in Frage, deren Ableitungen mit f übereinstimmen, somit nur Stammfunktionen von f . Beispielsweise ist $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ eine Stammfunktion von $f(x) = x^2$, aber auch $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2$ oder $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{8}$ usw.

Doch welche dieser Stammfunktionen ist das gesuchte I_1 ?

Allgemeiner lässt sich schreiben:

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + C, \quad C \in \mathbb{R}, \quad C \text{ konstant}$$

Daraus folgt, dass $I_1 = \frac{1}{3}x^3 + C$ der Form entspricht.

Nun müssen wir die Konstante C bestimmen. Der Flächeninhalt unter f von 1 bis 1 ist 0, also wissen wir, dass $I_1(1) = 0$ gilt.

Daraus folgt:

$$0 = I_1(1) = \frac{1}{3} \cdot 1 + C$$

Nach der Umstellung ergibt sich:

$$C = -\frac{1}{3}$$

Somit ist die gesuchte Integralfunktion durch

$$I_1(x) = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3} \quad x \in [1, b]$$

gegeben.

III. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Ausgehend von $F(x) = \frac{1}{3}x^3$ als gegebene Stammfunktion folgt als Ergebnis:

$$I_1(x) = F(x) - F(1)$$

Allgemein folgt so der Hauptsatz.

Satz 2 (Hauptsatz). Für stetige Berandungen $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ lässt sich die zugehörige Integralfunktion I_a finden, indem man irgendeine Stammfunktion F von f sucht. Dann ist:

$$I_a(x) = F(x) - F(a) \quad x \in [a, b]$$

Beweis. Nach Satz 1 ist I_a Stammfunktion von f . Wenn F eine beliebige Stammfunktion von f ist, so kann sie sich von I_a nur durch eine additive Konstante unterscheiden.

$$I_a(x) = F(x) + C \quad \forall x \in [a, b], C \in \mathbb{R} \quad (4)$$

Wegen

$$I_a(a) = 0 = F(a) + C$$

folgt nun:

$$C = -F(a)$$

Somit folgt mit (4):

$$I_a(x) = F(x) - F(a) \quad \forall x \in [a, b]$$

□

Rückblickend lässt sich zusammenfassen, dass Integrieren bedeutet, von der Randfunktion zur Integralfunktion überzugehen. Mit dem Hauptsatz wurde ein Verfahren zur Bestimmung der Integralfunktion von stetigen Berandungen entwickelt. In dem Sinne kann Integrieren als das Umkehren des Differenzierens verstanden werden.

IV. Thesendiskussion

Folgende Thesen wurden im Plenum diskutiert:

These 1: Die Berechnung einer Fläche unter einem Graphen sollten die Schüler auch unbedingt mit Ober- und Untersumme können.

Der Übergang zwischen der Grenzbetrachtung der Ober- und Untersumme zum Integral muss verstanden werden. Die Ober- und Untersumme sollte man nicht in der Einführung der Integralrechnung unterrichten. Die Einführung mit der Vorgehensweise nach dem „modernen Zugang“ und die anschließende Lehrgang der Ober- und Untersumme ermöglichen den Schülern ein gutes Verständnis des Integralbegriffs und sichern dieses ab, da die Ober- und Untersumme mathematisch sauber und richtig sind. Außerdem ist es eine schöne Verbindung, zumindest im Leistungskurs, zum Grenzwertbegriff (eine weitere Anwendung). Ein weiterer Standpunkt des Plenums war, dass die Idee der Vorgehensweise bei der Berechnung von Ober- und Untersumme sehr schön sei und aus diesem Grund nicht rausfallen dürfe. Die Schüler müssen dies nicht unbedingt in einer Klausur genau berechnen, aber die Idee, die dahinter steckt, muss verstanden werden.

Eine andere Meinung zu der These ist, dass die Schüler die Ober- und Untersummen schon berechnen können müssen, da dies eine Anwendung eines Einschachtelungsverfahrens ist. Außerdem ist der Grenzwertbegriff schon nicht mehr im Rahmenlehrplan. Es reicht aus, wenn das Verfahren nur an einigen Funktionen erarbeitet wird, dann ist es auch nicht zu zeitaufwendig. Des Weiteren ist es nicht schwer die Ober- und Untersummen zu berechnen, da man nur den Flächeninhalt von Vierecken berechnen muss. Dies muss auch nicht mit 100 Streifen geschehen, um die Methode zu verdeutlichen. Es genügt, wenn erst zwei Streifen und dann acht berechnet werden, um zu erkennen, dass sich die Fläche annähert. Außerdem ist es ein praktisches Verfahren, welche für die Schule sehr geeignet ist. Ganz besonders wichtig ist es, dass die Schüler verstanden haben, dass eine krummlinig begrenzte Fläche von oben und von unten eingeschachtelt werden kann. Wenn sie dies verstanden haben, müssen sie keine Formeln mehr auswendig lernen, sondern können die Formeln wieder herleiten, so dass ein mathematisches Verständnis entwickelt wird.

These 2: Die Frage der Integrierbarkeit von Funktionen ist für Schüler nicht relevant.

Es ist bedeutsam bei den Schülern ein Bewusstsein zu schaffen, dass man sich, bevor man integriert, erst einmal die Frage stellt, ob die Funktion integrierbar ist. In der Schule kommt diese Frage zu kurz oder gar nicht vor. Die Integrierbarkeit von Funktionen wird im Unterricht nicht thematisiert, da nur mit Funktionen umgegangen wird, welche die Integrierbarkeit *nicht* ver-

neint. Bei Schülern wird somit ein Kalkül vermittelt. Sie durchlaufen einen Algorithmus, genau wie sie Ableitungen bestimmen, ohne dass sie sich fragen, ob die Funktion überhaupt differenzierbar ist. Möchte man dieses Bewusstsein allerdings schaffen, dann muss man Funktionen behandeln, die nicht integrierbar sind. Hingegen zeigen sogar Untersuchungen, dass es keinen Wert hat dies zu thematisieren, weil sich Schüler eben nie die Frage stellen, ob die Funktion nun integrierbar ist. Sie ist es eben und daran zweifelt auch niemand.

These 3: Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung soll auch im Grundkurs in Grundzügen bewiesen werden.

Der geometrisch-anschauliche Beweis ist sehr einfach und elegant. Somit könnte man diesen auch im Grundkurs behandeln, ohne die Schüler zu überfordern.

Ein Standpunkt des Plenums war, dass es darauf ankommt, ob der Grenzwertbegriff vorher schon thematisiert wurde. Wenn dies der Fall ist, dann würde sich der Beweis anbieten. Wenn dies allerdings nicht der Fall ist, müsste man den Stetigkeitsbegriff und den Grenzwertbegriff noch vorher thematisieren. Mit diesem Aufwand muss man genau überlegen, ob es sich lohnt den Hauptsatz zu beweisen. Laut Rahmenlehrplan wird der Begriff der Stetigkeit im Grundkurs nicht thematisiert. Aber die Einschachtelung kann man trotzdem machen (h wird immer kleiner und damit nähern sich die linke und die rechte Seite an). *Aber ganz ohne Grenzwert geht es nur mit „Schummeln“, obwohl man bei der Stetigkeit ganz schön schummeln müsste.*

Man kann den Sachverhalt auch physikalisch untermauern. Man stelle sich vor, man malt ein Flächenstück von links nach rechts mit Farbe an. Der Farbverbrauch ist proportional zur Fläche. Die momentane Änderungsrate des Farbverbrauches ist gleich der Funktionswert der Berandungsfunktion. Somit wäre dies ein Beispiel für die physikalische Interpretation, dass die Ableitung der Integralfunktion gleich die Berandungsfunktion ist.

Literatur

Danckwerts, R. / Vogel, D. (2006). *Analysis verständlich unterrichten*. München: Elsevier.

Danckwerts, R. / Vogel, D. (2001). *Elementare Analysis*. Norderstedt: Books on Demand.

Tietze, U.-P. / Klika, M. / Wolpers, H. (1997). *Mathematikunterricht in der Sekundarstufe II: Band I*. Braunschweig: Vieweg.

Schulbücher

Griesel, H. / Postel, H. (1991). *Grundkurs Analysis - Gesamtband*. Hannover: Schroedel.

Schmid, A. / Schweizer, W. (1989). *Analysis Zwei - Grundkurs*. Stuttgart: Ernst Klett.

Bigalke, A. / Köhler, N. (1988). *Mathematik 12.1*. Düsseldorf: Cornelsen.

Internetquellen

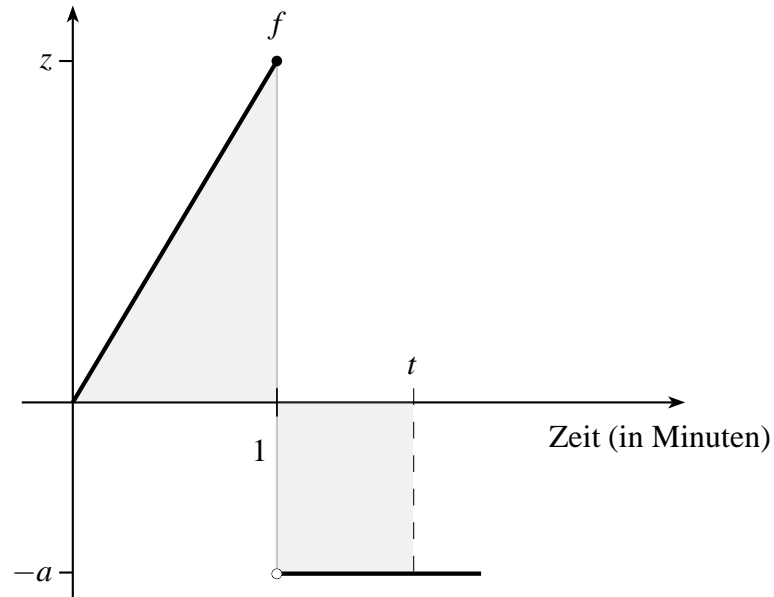
<http://www.berlin.de/sen/bildung/schulorganisation/lehrplaene/>

<http://www.timss.mpg.de/>

Anhang

Aufgabenblatt

Zuflussgeschwindigkeit $f(t)$ (in Liter/Minute)



Aufgabe:

- Geben Sie den Funktionsterm von $f(t)$ an!
- Wie lautet der Funktionsterm der rekonstruierten Funktion für die Wassermenge $W(t)$?
- Zu welchem Zeitpunkt t ist die Wanne leer?

Lösung:

a) Die Funktion lautet $f(t) = \begin{cases} z \cdot t & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ -a & \text{für } t > 1 \end{cases}$

b) Die Funktion lautet $W(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot t \cdot z \cdot t & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{2} \cdot z - a \cdot (t-1) & \text{für } t > 1 \end{cases}$

c) Für $t = \frac{1}{2a}z + 1$ ist die Wanne leer.