Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Institut für Mathematik
A. Filler

Sommersemester 2016

Übungsaufgaben zur Vorlesung **Analysis II** (Kombinationsbachelor-Studiengang)

Übungsserie 2

Abgabe am 02. 05. 2016

Hinweise zur Abgabe der Übungsaufgaben:
- Lösen Sie jede Aufgabe auf einem extra Blatt.
- Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen, der Matrikelnummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe (Montag/Mittwoch).
- Sie dürfen die Lösungen einzeln oder (maximal) zu zweit abgeben.
- Die Aufgaben werden Montags **vor** der Vorlesung abgegeben. Verspätete oder elektronische Abgaben werden **nicht** akzeptiert.

Aufgabe 2.1

(a) Weisen Sie auf der Grundlage der Definitionen $\cos x := \operatorname{Re}\left(e^{\mathrm{i}x}\right)$ und $\sin x := \operatorname{Im}\left(e^{\mathrm{i}x}\right)$ nach, dass die Sinus- und die Kosinusfunktion jeweils auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind.
(Die Stetigkeit der Exponentialfunktion über $\mathbb{C}$ können Sie voraussetzen.) **2 Pkt.**

(b) Weisen Sie nach, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ die folgenden *Differenzformeln* gelten:

$$\begin{aligned} \sin(x) - \sin(y) &= 2 \cdot \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right), \\ \cos(x) - \cos(y) &= -2 \cdot \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{x-y}{2}\right). \end{aligned}$$

3 Pkt.

(c) Beweisen Sie mithilfe des Einschließungslemmas, dass $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ gilt.
(Achten Sie darauf, dass auch negative Werte für x zu berücksichtigen sind.) **3 Pkt.**

Aufgabe 2.2

(a) Weisen Sie nach, dass die Kosinusfunktion auf dem Intervall $(0;2)$ streng monoton fallend ist.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Sinusfunktion auf dem Intervall $(0;2)$ positiv ist (Einschließungslemma) und verwenden Sie dann die Differenzformeln. **3 Pkt.**

(b) Zeigen Sie mithilfe der Potenzreihen der Sinus- und der Kosinusfunktion, dass $\cos'(x) = -\sin x$ (für alle $x \in \mathbb{R}$) gilt. **3 Pkt.**

(c) Bestimmen Sie $n \in \mathbb{N}$ so, dass $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^n}$ in $\mathbb{R}$ existiert und von Null verschieden ist; bestimmen Sie diesen Grenzwert. **2 Pkt.**

Aufgabe 2.3

(a) Zeigen Sie die *Formel von Moivre*: $(\cos x + \mathrm{i}\,\sin x)^n = \cos(nx) + \mathrm{i}\sin(nx)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}$. **1 Pkt.**

(b) Weisen Sie nach, dass für alle $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\cos(2nx) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{2k} \cos^{2(n-k)}(x)\, \sin^{2k}(x)\,.$$

Hinweis: Nutzen Sie den binomischen Lehrsatz und die Formel von Moivre. **3 Pkt.**

Insgesamt: **20 Pkt.**