Humboldt-Universität zu Berlin
Mathematisch-Naturwissenschaftliche Fakultät
Institut für Mathematik
A. Filler

Sommersemester 2016

Übungsaufgaben zur Vorlesung **Analysis II** (Kombinationsbachelor-Studiengang)

Übungsserie 4

Abgabe am 23. 05. 2016

Hinweise zur Abgabe der Übungsaufgaben:

- Lösen Sie jede Aufgabe auf einem extra Blatt.
- Versehen Sie jedes Blatt mit Ihrem Namen, der Matrikelnummer und der Nummer Ihrer Übungsgruppe (Montag/Mittwoch).
- Sie dürfen die Lösungen einzeln oder (maximal) zu zweit abgeben.
- Die Aufgaben werden Montags **vor** der Vorlesung abgegeben. Verspätete oder elektronische Abgaben werden **nicht** akzeptiert.

Vorbemerkungen:

- Diese Übungsserie hat eine zweiwöchige Bearbeitungsdauer und den 1,5-fachen Umfang der sonstigen Übungsserien (und daher die Gesamtpunktzahl 30).
- Alle Aufgaben dieser Serie sollen – auch wenn nicht explizit angegeben – mithilfe der Definition des Riemann-Integrals und der dafür geltenden Sätze (siehe Vorlesung), d. h. ohne die Verwendung von Stammfunktionen und des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung, gelöst werden.

Aufgabe 4.1

(a) Bestimmen Sie die Ober- und die Untersumme der Funktion f mit $f(x) = x^3$ über dem Intervall $[0; 5]$ bei einer Zerlegung ζ dieses Intervalls in 100 gleich lange Teilintervalle. **3 Pkt.**

(b) Zeigen Sie (für das Beispiel aus Aufgabenteil a): Strebt die Anzahl der Teilintervalle gegen unendlich, so werden Ober- und Untersumme gleich. Bestimmen Sie das Riemann-Integral von f über dem Intervall $[0; 5]$. **2 Pkt.**

(c) Bestimmen Sie mittels Riemann-Summen das Riemann-Integral von f mit $f(x) = x^3$ über dem Intervall $[0; a]$ für beliebige $a \in \mathbb{R}^+$. **1 Pkt.**

(d) Bestimmen Sie mittels Riemann-Summen das Riemann-Integral von f mit $f(x) = e^x$ über dem Intervall $[0; a]$ für beliebige $a \in \mathbb{R}^+$. **5 Pkt.**

Aufgabe 4.2

(a) Zeigen Sie mit Hilfe von Riemannschen Summen, dass für alle $a > 1$ gilt: $\int\limits_1^a \frac{1}{x}\,dx = \ln(a)$.

Hinweis: Benutzen Sie die Zerlegungen $\zeta_n := \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ mit $x_k := a^{\frac{k}{n}}$ und die Stützstellen $\xi_k := x_{k-1}, k = 1, \ldots, n$. **4 Pkt.**

(b) Es sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion und es existiere ein $\delta > 0$ mit $f(x) \geq \delta$ für alle $x \in [a, b]$. Zeigen Sie, dass die Funktion $\frac{1}{f}$ dann auch Riemann-integrierbar ist. **4 Pkt.**

(c) Die Funktion $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ sei für alle $x \in [0, 1]$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x \text{ irrational ist,} \\ \frac{1}{q}, & \text{falls } x = \frac{p}{q} \text{ mit teilerfremden } p, q \in \mathbb{N}, q \geq 1. \end{cases}$$

Zeigen Sie dass f Riemann-integrierbar ist und $\int\limits_0^1 f(x)dx = 0$ gilt. **5 Pkt.**

Hinweis: Begründen Sie, dass es für jedes $\varepsilon > 0$ nur endlich viele Stellen x_i mit $f(x_i) \geq \frac{\varepsilon}{2}$ gibt. Konstruieren Sie eine geeignete Treppenfunktion $\varphi\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(x) \geq f(x)$ für alle $x \in [0, 1]$ und $\int\limits_0^1 \varphi(x)dx \leq \varepsilon$.

Aufgabe 4.3

(a) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und $\zeta_n := \{x_0, \ldots, x_n\}$ die äquidistante Unterteilung von $[a, b]$ in n Teilintervalle. Die Zahl

$$\mathcal{T}_n(f) := \frac{b-a}{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{f(x_{k-1}) + f(x_k)}{2} \right) = \frac{b-a}{2n} \left(f(a) + 2 \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k) + f(b) \right)$$

heißt *Trapezsumme von f zur Schrittweite $\frac{b-a}{n}$*.

(a1) Skizzieren Sie die Situation und begründen Sie den Namen *Trapezsumme*. **1 Pkt.**

(a2) Zeigen Sie, dass für das Riemann-Integral von f gilt: $\int\limits_a^b f(x)dx = \lim\limits_{n\to\infty} \mathcal{T}_n(f)$. **2 Pkt.**

(b) Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Zeigen Sie, dass die Funktion $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$ auf $[a, b]$ stetig ist. **3 Pkt.**

Insgesamt: **30 Pkt.**