Didaktik der Mathematik der Sek II

- Umkehrfunktionen
    - Ableitungsregel für Umkehrfunktionen (Umkehrregel)
    - Beispiele für die Anwendung der Umkehrregel

- Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Umkehrfunktion

Funktion f		Umkehrfunktion $\overline{f}$
$y = f(x)$		$x = \overline{f}(y)$
$P(x_0 \mid y_0) \in f$		$\overline{P}(y_0 \mid x_0) \in \overline{f}$
Graph K	Spiegelung an y=x	Graph $\overline{K}$
Definitionsbereich: D_f		$D_{\overline{f}} = W_f$
Wertebereich: W_f		$W_{\overline{f}} = D_f$

Bemerkung: In Schullehrbüchern wird oft statt der Schreibweise f^{-1} die Schreibweise $\overline{f}$ für Umkehrfunktionen benutzt.

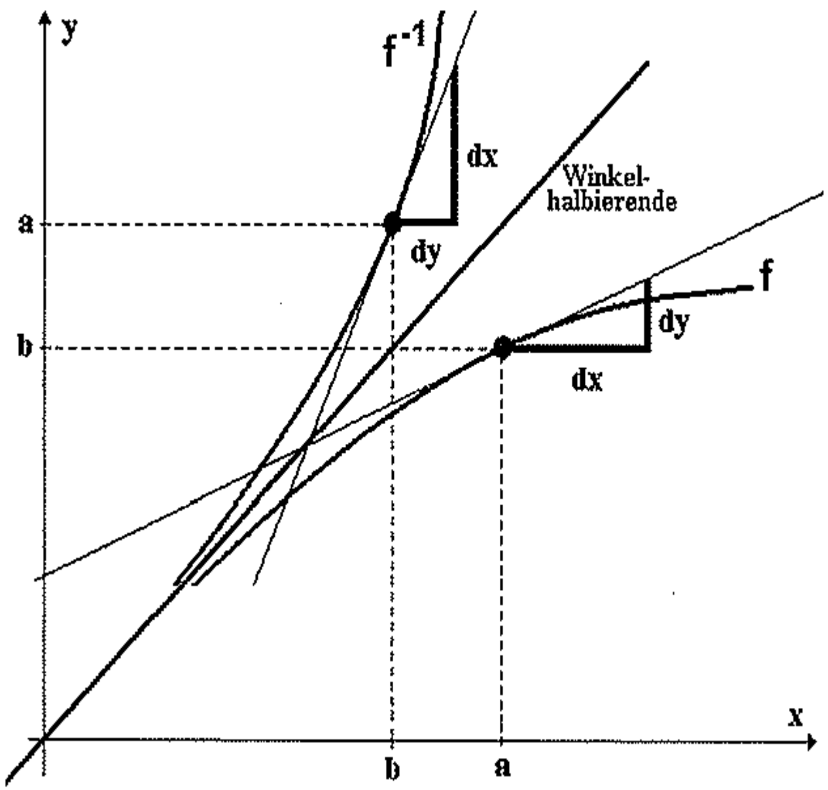
Umkehrfunktionen

Am Graphen lässt sich die Umkehrbarkeit von f daran erkennen, dass jede Parallele zur x-Achse den Graphen von f höchstens einmal schneidet. Dies ist sicher der Fall, wenn f streng monoton ist. Zusammen mit dem Monotoniesatz ergibt sich das folgende Kriterium für die Umkehrbarkeit:

Satz:

Jede streng monotone Funktion ist umkehrbar. Insbesondere ist jede in einem Intervall I differenzierbare Funktion f mit $f'(x) > 0$ (bzw. $f'(x) < 0$) für alle $x \in I$ umkehrbar.

Die Ableitung der Umkehrfunktion



Ist die Funktion f in einem Intervall I umkehrbar mit $f'(a) \neq 0$ für a ϵ I, dann ist die Umkehrfunktion $\overline{f}$ an der Stelle $b = f(a)$ ebenfalls differenzierbar, und es gilt:

$$\overline{f}'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(\overline{f}(b))} \quad .$$

Ableitung von Umkehrfunktionen- Beispiele

Bsp. 1 $f: f(x) = x^n; n \in N; n \geq 2; x > 0; \qquad D_{\bar{f}} = W_f = \Re^+;$

$$\bar{f}(y) = \sqrt[n]{y} = x$$

$$\bar{f}'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{nx^{n-1}} = \frac{1}{n} x^{-(n-1)} = \frac{1}{n}(\sqrt[n]{y})^{-(n-1)} = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1}$$

Für $\bar{f}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ gilt $\bar{f}'(x) = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$.

(Potenzregel gilt für Potenzfunktionen mit gebrochenen Exponenten)

Bsp. 2 $f: f(x) = e^x; \qquad D_{\bar{f}} = W_f = \Re^+; \qquad \bar{f}(y) = \ln(y) = x$

$$\bar{f}'(y) = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$$

Für $\bar{f}(x) = \ln(x)$ gilt $\bar{f}'(x) = \frac{1}{x}$.

Einige Beispiele für Umkehrfunktionen

Funktion f	Umkehrbar in	Umkehrfunktion $\bar{f}(y)$	Definitionsbereich $D_{\bar{f}}$
$f(x) = y = \sin(x)$	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	$\bar{f}(y) = \arcsin(y)$	$[-1;1]$
$f(x) = y = \cos(x)$	$[0;\pi]$	$\bar{f}(y) = \arccos(y)$	$[-1;1]$
$f(x) = y = \tan(x)$	$\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$	$\bar{f}(y) = \arctan(y)$	$\Re$
$f(x) = y = a^x$; $a > 0; a \neq 1$	$\Re$	$\bar{f}(y) = \log_a(y)$	$\Re^+$

Aufgabe:

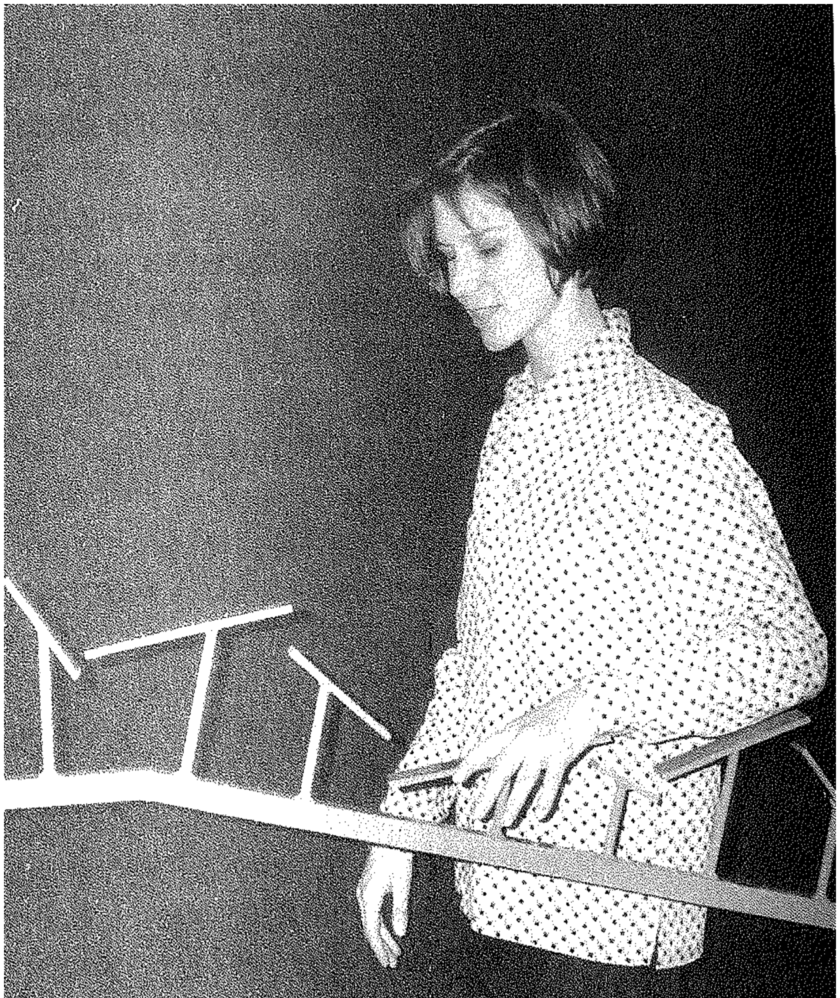
Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion der Umkehrfunktion einer der trigonometrischen Funktionen.

Was müssen die Schüler dazu neben der Ableitungsregel kennen?

Stetigkeit und Differenzierbarkeit

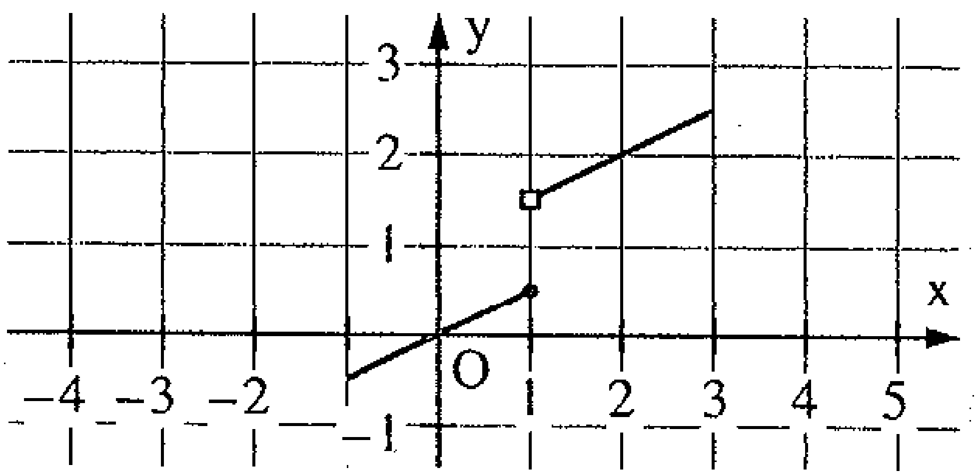
Exponate im *Mathematikum* Gießen

Die Geländer sind Funktionsgraphen zum Anfassen!



Stetigkeit

Anschaulich bedeutet dies für alle „nicht exotischen“ Funktionen, dass sie dann stetig sind, wenn ihr Graph keinen Sprung aufweist bzw. wenn man den Graphen „mit einem Bleistiftzug durchzeichnen“ kann. („Bleistiftdefinition“ der Stetigkeit)



Graph mit „Sprung“ Fig. 1

Stetigkeit

Die ikonischen Grundvorstellungen „der Graph lässt sich mit dem Bleistift durchzeichnen“ bzw. „es gibt keine Sprungstellen“ führen zur Präzisierung von „Stetigkeit“ mithilfe des Grenzwertbegriffs.

Definition:

Eine Funktion f heißt genau dann stetig in x_0, wenn x_0 in der Definitionsmenge D_f von f liegt und wenn gilt :

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x) \quad .$$

Bei dieser Definition ist wichtig, dass x_0 im Definitionsbereich von f liegt, der Funktionswert $f(x_0)$ also existiert.

Stetigkeit im Intervall

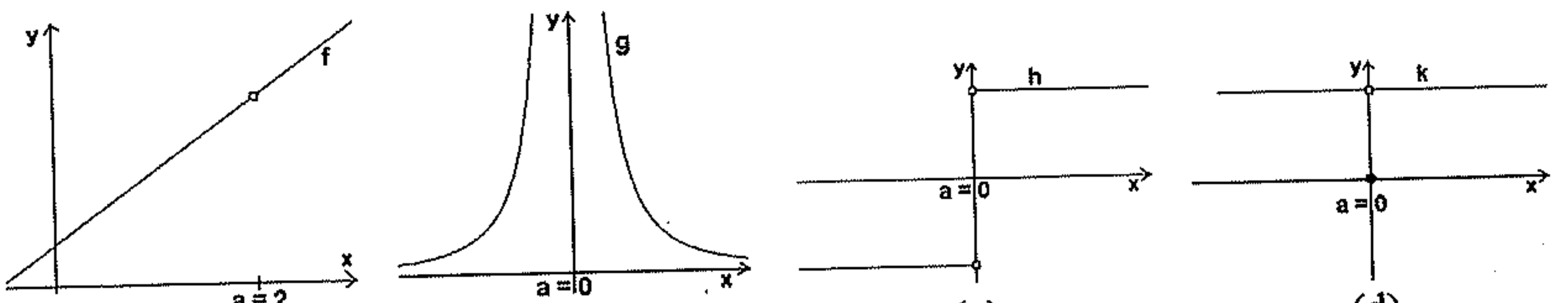
Ist f in jedem Punkt eines Intervalls I stetig, so heißt f stetig in I. Ist f in jedem Punkt von D_f stetig, so heißt f stetig.

$f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ $\quad D = \mathbb{R}\setminus\{2\}$

$g(x) = \frac{1}{x^2}$ $\quad D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$h(x) = \frac{|x|}{x}$ $\quad D = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

$k(x) = |\mathrm{sgn}(x)|$ $\quad D = \mathbb{R}$



(a) (b) (c) (d)

Eigenschaften stetiger Funktionen

Satz 1: *Nullstellensatz von Bolzano*

Die Funktion f sei stetig auf dem Intervall I =[a;b] und es gelte f(a) < 0 sowie f(b) > 0. Dann gibt es eine Zahl c mit a < c < b und f(c) = 0.

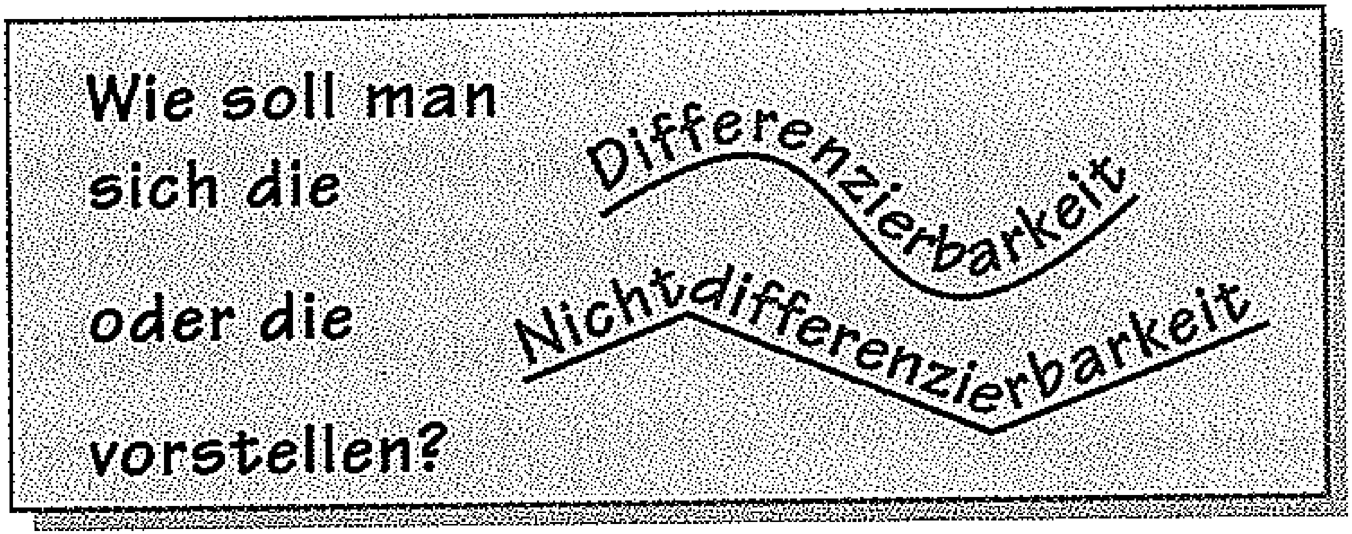
Satz 2:

Die Funktion f sei stetig auf dem Intervall I =[a;b].

Dann gilt:

1. f ist beschränkt auf [a;b].
2. f nimmt auf [a;b] ihr Minimum und Maximum an. Es gibt also Zahlen c und d aus [a;b], sodass f(c) das Maximum und f(d) das Minimum der Funktionswerte f(x) mit $x \in [a;b]$ ist.

Differenzierbarkeit



Differenzierbarkeit und Stetigkeit

Für eine Funktion f, die auf einem Intervall I definiert ist, gilt:

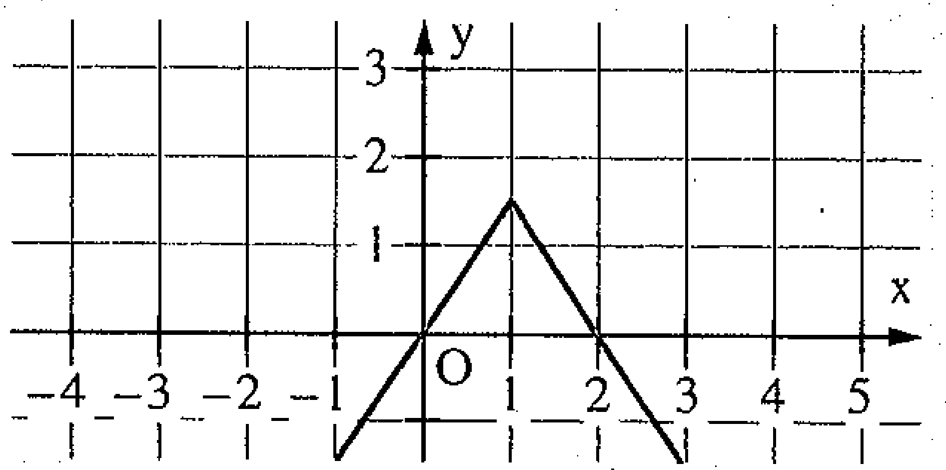
Eine Funktion f heißt an der Stelle $x_0 \in I$ differenzierbar, wenn der Differenzenquotient $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ für $x \to x_0$ einen Grenzwert besitzt.

Satz:

Ist f differenzierbar an der Stelle a, so ist f bei a auch stetig. (f differenzierbar $\Rightarrow$ f stetig; Stetigkeit ist notwendig, aber nicht hinreichend für die Differenzierbarkeit)

Differenzierbarkeit

Anschaulich bedeutet dies für alle „nicht exotischen" Funktionen, dass sie dann differenzierbar sind, wenn ihr Graph keinen Knick aufweist bzw. wenn der Graph „glatt durchgezeichnet" werden kann.



Graph mit „Knick"

Fig. 2

Die „EXOTEN“

Es gibt jedoch Funktionen, bei denen diese anschaulichen Interpretationen versagen.

1. f(x) = $\begin{cases} \sin\frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

2. f(x) = $\begin{cases} x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

3. f(x) = $\begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$

Beispielaufgabe für Abitur Berlin/Brandenburg (Auszug)

Das nebenstehende Bild zeigt das Profil einer längs durchgeschnittenen Birne. Der oberhalb der x-Achse gelegene Teil des Randes wird durch Funktionsgraphen modelliert.

Für $0 \le x \le 4$ wird der Graph der Funktion f mit

$f(x) = 4\sqrt{x} \cdot e^{-\frac{1}{2}x}$ verwendet .

- Für x > 4 soll der Graph von g mit $g(x) = \sqrt{ax + b}$ verwendet werden.
- Nennen Sie Eigenschaften, die für eine geeignete Modellierung der Profilkurve erfüllt werden müssen. Geben Sie zwei Bedingungsgleichungen an und bestimmen Sie mit deren Hilfe die Werte für a und b.