Humboldt - Universität zu Berlin

Berufsbezogenes Fachseminar – Zahlentheorie

Charakterisierung abbrechender Dezimalbrüche

Svenja Ahrens

Dozent: Prof. Dr. Kramer

27.November.2014

1 Dezimalbruchentwicklung rationaler Zahlen

Definition 1 (Rationale Zahlen)**.** *Sei* $\mathbb{Q}$ *die Menge der rationalen Zahlen:*

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}.$$

Die rationale Zahl $\frac{a}{b}$ *wird* Bruch *oder* Quotient *der ganzen Zahlen* a *und* b *genannt, oder auch als Bruchzahl bezeichnet.*

1.1 Dezimaldarstellung ganzer Zahlen

Sei $a \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ und $g \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. Mit Hilfe mehrfacher Division mit Rest ist a eindeutig in der Form

$$a = \pm \sum_{j=0}^{l} q_j g^j \tag{1}$$

dargestellt, wobei $0 \leq q_j \leq 9$ mit $j = 0, \ldots, l$ und $q_l \neq 0$ gilt. Für a gilt die Dezimaldarstellung

$$a = \pm\, q_l q_{l-1} \ldots q_1 q_0,$$

wobei wieder $0 \leq q_j \leq 9$ mit $j = 0, \ldots, l$ und $q_l \neq 0$ gilt.

1.2 Dezimaldarstellung rationaler Zahlen

Im Folgenden wird die Dezimaldarstellung der ganzen Zahlen auf den Bereich der rationalen Zahlen übertragen. Dazu sei $\frac{a}{b}$ eine rationale Zahl mit $a, b \in \mathbb{Z}$, wobei $b \neq 0$. Der Vereinfachung halber werden im Folgenden nur positive rationale Zahlen betrachtet. In Analogie dazu, lassen sich jedoch auch negative rationale Zahlen in Dezimalbrüche darstellen.

O.B.d.A sei $b > 0$. Durch die Division mit Rest für ganze Zahlen erhält man

$$a = q \cdot b + r \Longleftrightarrow \frac{a}{b} = q + \frac{r}{b}$$

mit $a, b, q \in \mathbb{N}$ und $0 \leq r < b$. Für q ist bereits die Dezimaldarstellung aus (1)

$$q = \sum_{j=0}^{l} q_j g^j = \pm\, q_l q_{l-1} \ldots q_1 q_0$$

bekannt.

Betrachte nun im Folgenden die rationale Zahl $\frac{r}{b}$. Dazu nehme man an, dass ein Rest $r > 0$ existiere und somit $0 < \frac{r}{b} < 1$ gilt. Erweitere dazu

$$\frac{r}{b} = \frac{1}{g} \cdot \frac{g \cdot r}{b} \tag{2}$$

und dividiere $g \cdot r$ durch b mit Rest:

$$g \cdot r = q_{-1} \cdot b + r_{-1} \Longleftrightarrow \frac{g \cdot r}{b} = q_{-1} + \frac{r_{-1}}{b}, \tag{3}$$

mit q_{-1}, $r_{-1} \in \mathbb{N}$ und $0 \leq r_{-1} < b$. Da $\frac{r}{b} < 1$ lässt sich nun folgende Abschätzung durchführen:

$$0 \leq q_{-1} = \frac{g \cdot r}{b} - \frac{r_{-1}}{b} \leq \frac{g \cdot r}{b} < g,$$

folglich gilt

$$0 \leq q_{-1} \leq g - 1.$$

Setzte nun Gleichung (3) in Gleichung (2) ein. So ergibt sich:

$$\frac{r}{b} = \frac{1}{g}\left(q_{-1} + \frac{r_{-1}}{b}\right) = \frac{q_{-1}}{g} + \frac{1}{g^2} \cdot \frac{g \cdot r_{-1}}{b}. \tag{4}$$

Wenn $r_{-1} \neq 0$ so wird erneut durch b mit Rest dividiert und man erhält erneut natürliche Zahlen q_{-2}, r_{-2} mit $0 \leq r_{-2} < b$, sodass sich folgender Sachverhalt ergibt:

$$g \cdot r_{-1} = q_{-2} \cdot b + r_{-2} \Longleftrightarrow \frac{g \cdot r_{-1}}{b} = q_{-2} + \frac{r_{-2}}{b}. \tag{5}$$

Mittels analogen Argumenten lässt sich $0 \leq q_{-2} \leq g - 1$ abschätzen. Erneut erhält man durch Einsetzen von (5) in (4)

$$\begin{aligned} \frac{r}{b} &= \frac{q_{-1}}{g} + \frac{1}{g^2} \cdot \frac{g \cdot r_{-1}}{b} \\ &= \frac{q_{-1}}{g} + \frac{1}{g^2}\left(q_{-2} + \frac{r_{-2}}{b}\right) \\ &= \frac{q_{-1}}{g} + \frac{q_{-2}}{g^2} + \frac{1}{g^3} \cdot \frac{g \cdot r_{-2}}{b}. \end{aligned}$$

Nach diesem Prinzip kann fortgefahren werden, so lang $r_{-j} \neq 0$ mit $j > 0$ und $j \in \mathbb{N}$ gilt. Nach k Schritten ergeben sich somit natürliche Zahlen q_{-k}, r_k mit $0 \leq q_{-k} \leq g$ und $0 \leq r_{-k} < b$ und eine zusammengefasste Darstellung für $\frac{r}{b}$:

$$\frac{r}{b} = \sum_{j=1}^{k} \frac{q_{-j}}{g^j} + \frac{1}{g^{k+1}} \cdot \frac{g \cdot r_{-k}}{b}.$$

Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass es bei dieser Entwicklung zwei Möglichkeiten gibt:

1. Es findet sich ein $k \in \mathbb{N}, k > 0$, sodass $r_{-k} = 0$.

2. Für jedes $j \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gilt $r_{-j} \neq 0$.

2 Definition zu den Dezimaldarstellungen

Seien $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$ und $g \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, so gelten für die rationale Zahl $\frac{a}{b}$ folgende Definitionen unter Verwendung der in Abschnitt 1.2 eingeführten Bezeichnungen.

Definition 2 (Abbrechende Dezimaldarstellung). *Gilt $r = 0$, beziehungsweise existiert ein $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$ mit $r_{-k} = 0$, so wird*

$$\pm q_l \ldots q_0, q_{-1} \ldots q_{-k} := \pm \sum_{j=-l}^{k} \frac{q_{-j}}{g^j}$$

definiert und heißt abbrechende Dezimaldarstellung *oder auch* abbrechende Dezimalbruchentwicklung der rationalen Zahl $\frac{a}{b}$.

Definition 3 (Nicht abbrechende Dezimaldarstellung). *Gilt für alle $j \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, dass $r_{-j} \neq 0$, so wird formal*

$$\pm q_l \ldots q_0, q_{-1} \cdots := \pm \sum_{j=-l}^{\infty} \frac{q_{-j}}{g^j}$$

gesetzt und heißt nicht abbrechende Dezimaldarstellung *oder auch* nicht abbrechende Dezimalbruchentwicklung der rationalen Zahl $\frac{a}{b}$.

Definition 4 (Periodische Dezimaldarstellung). *Die nicht abbrechende Dezimalbruchentwicklung*

$$\pm q_l \ldots q_0, q_{-1} \ldots$$

wird periodisch *genannt, falls natürliche Zahlen $v, p \in \mathbb{N}$, $v \geq 0$, $p > 0$, existieren, sodass gilt:*

$$q_{-(v+j)} = q_{-(v+j+p)} = q_{-(v+j+2p)} = \ldots \qquad \text{für } j = 1, \ldots, p.$$

Kurz:

$$\pm q_l \ldots q_0, q_{-1} \ldots q_{-v}\overline{q_{-(v+1)} \cdots q_{-(v+p)}}.$$

Die Dezimalbruchentwicklung heißt reinperiodisch*, wenn $v = 0$. Die kleinste natürliche Zahl v mit eben beschriebener Eigenschaft nennt sich* Vorperiode*, sowie sich die kleinste natürliche Zahl p mit beschriebener Eigenschaft* Periode *der Dezimalbruchentwicklung der rationalen Zahl $\frac{a}{b}$ nennt.*

3 Sätze zu den rationalen Zahlen

Im Folgenden werden zwei wichtige Sätze zu den rationalen Zahlen gegeben und bewiesen.

Satz 1 (Kriterium für rationale Zahlen)**.** *Sei $c = \frac{d}{b}$ eine rationale Zahl in vollständig gekürzter Form. Es gilt:*

$$c = \pm \sum_{i=-k}^{l} a_i g^i \iff \Big[p|b \Rightarrow p|g \Big].$$

Das heißt, c hat eine abbrechende Dezimaldarstellung genau dann, wenn b die gleichen Primfaktoren wie g hat.

Beweis. Zunächst sollen die einzelnen Richtungen bewiesen werden.

$\Rightarrow$) O.B.d.A sei $c > 0$, dann gilt:

$$\begin{aligned} c &= \sum_{i=-k}^{l} a_i g^i \\ &= a_l \cdot g^l + \dots + a_0 + \frac{a_{-1}}{g} + \dots + \frac{a_{-k}}{g^k} \\ &= \frac{a_l \cdot g^{l+k}}{g^k} + \frac{a_{l-1} \cdot g^{l-1+k}}{g^k} + \dots + \frac{a_0 \cdot g^k}{g^k} + \frac{a_{-1} \cdot g^{k-1}}{g^k} + \dots + \frac{a_{-k}}{g^k} \\ &= \frac{\sum_{i=0}^{l+k} a_{i-k} \cdot g^i}{g^k} \\ &= \frac{A}{g^k}, \end{aligned}$$

wobei $A := \sum_{i=0}^{l+k} a_{i-k} \cdot g^i \in \mathbb{Z}$. Sei nun

$$\frac{A}{g^k} = \frac{d}{b} \iff A \cdot b = d \cdot g^k.$$

Da $p|b$ folgt nach Regel (viii) der Teilbarkeitsregeln, dass

$$p|(A \cdot b) \Rightarrow p|(d \cdot g^k).$$

Es stellt sich die Frage, ob p die Zahl d oder g^k teilt. Da d und b teilerfremd sind, muss gelten $p|g^k$, und folglich auch $p|g$, weil p eine Primzahl ist.

$\Leftarrow$) Es lässt sich b in Primzahlen zerlegen: $b = {p_1}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot {p_r}^{\alpha_r}$. Da für alle p_j mit $j \in \{1, \dots, r\}$ mit $p_j|b \;\Rightarrow\; p|g$ gilt, folgt daraus, dass die gleichen Primzahlen in mindestens einfacher Potenz in g vorliegen müssen:

$$g = p_1 \cdot \ldots \cdot p_r \cdot x.$$

Sei nun $k = \max\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ die höchste Potenz der Primzahlen von b. Dann gilt:

$$g^k = {p_1}^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot {p_r}^{\alpha_r} \cdot {p_1}^{k-\alpha_1} \cdot \ldots \cdot {p_r}^{k-\alpha_r} \cdot x^k \Rightarrow \; b|g^k.$$

Betrachte nun die rationale Zahl c und setze ein:

$$\begin{aligned} c &= \frac{d}{b} \\ &= \frac{d \cdot {p_1}^{k-\alpha_1} \cdot \ldots \cdot {p_r}^{k-\alpha_r} \cdot x^k}{b \cdot {p_1}^{k-\alpha_1} \cdot \ldots \cdot {p_r}^{k-\alpha_r} \cdot x^k} \\ &= \frac{d \cdot {p_1}^{k-\alpha_1} \cdot \ldots \cdot {p_r}^{k-\alpha_r} \cdot x^k}{g^k} \\ &=: \frac{A}{g^k} \end{aligned}$$

Wie bereits bekannt ist, gilt die g-adische Darstellungen für rationale Zahlen: $A := \sum_{i=0}^{l+k} a_i \cdot g^i$. Deshalb gilt

$$c = \frac{A}{g^k} = \frac{\sum_{i=0}^{l+k} a_i \cdot g^i}{g^k} = \sum_{i=-k}^{l} a_{i+k} \cdot g^i.$$

□

Satz 2. *Sei $c = \frac{a}{b}$ eine rationale Zahl so, dass ihre g-adische Darstellung nicht abbrechend ist, dann hat c eine periodische g-adische Darstellung.*

Beweis. Die Zahl $\frac{a}{b}$ besitze eine nicht abbrechende Dezimalbruchentwicklung. Betrachte die unendliche Menge der Reste

$$r_0 := r, r_{-1}, r_{-2}, r_{-3}, \ldots$$

Diese Menge gehört der endlichen Menge $\{0, \ldots, b-1\}$ an. Aufgrund des Schubfachprinzips existieren mindestens zwei r_{-j_1}, r_{-j_2} die identisch sind. O.B.d.A gelte $j_2 > j_1 \geq 0$. Bei festem j_1 sei j_2 minimal gewählt, sodass $r_{j_1} = r_{j_2}$, dann ist die Periode p definiert durch

$$p := j_2 - j_1.$$

Betrachtet man nun nochmal den Algorithmus zur Gewinnung der Dezimalbruchentwicklung von $\frac{a}{b}$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} r_{-j_1} &= r_{-(j_1+p)} = r_{-(j_1+2p)} = \ldots, \\ r_{-(j_1+1)} &= r_{-(j_1+1+p)} = r_{-(j_1+1+2p)} = \ldots, \\ &\vdots \\ r_{-(j_1+p-1)} &= r_{-(j_1+2p-1)} = r_{-(j_1+3p-1)} = \ldots. \end{aligned}$$

Setze $v = j_1 \geq 0$ und da j_1 minimal gewählt wurde, gilt die Behauptung.

□