MSG 2014/2015 — Zirkel 8a
Thorsten Rohwedder

Aufgaben zum Zirkel am 28. Mai 2015

1. **Eine explizite Formel für die Fibonaccizahlen**

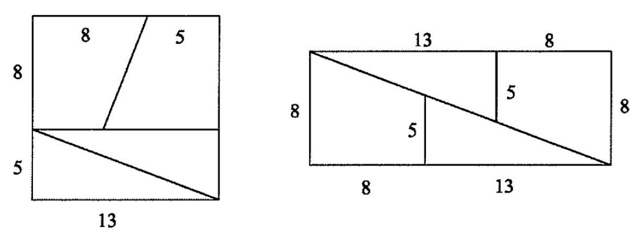
   Die Fibonaccizahlen lassen sich *rekursiv* mit Hilfe der Formel $f_{n+1} = f_{n-1} + f_n$ aus den Anfangswerten $f_1 = f_2 = 1$ bestimmen. Aber man kann die n-te Fibonaccizahl auch ausrechnen, indem man n in die folgende Formel einsetzt:

   $$f_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

   Beweise diese Formel per vollständiger Induktion.

2. **...und einen im Sinn**

   Zeichne ein Quadrat der Seitenlänge $8+5 = 13$ cm wie in der linken unteren Abbildung. Setze das Quadrat wie in der rechten Abbildung zusammen.



3. **Ein Zusammenhang zwischen Fibonaccizahlen**

   Zeige die so genannte *Simpson'sche Identität* für die Folge der Fibonaccizahlen: Für alle $n \geq 2$ gilt

   $$f_{n+1} \cdot f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n.$$

<u>Zum Weiterdenken:</u>

1. **Noch zwei Zusammenhänge zwischen Fibonaccizahlen**
   Zeige durch Induktion nach n, dass für die Fibonaccizahlen f_n folgendes gilt:

   $$1 + f_2 + f_4 + f_6 + \ldots + f_{2n} = f_{2n+1}$$

   und

   $$1 + f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n = f_{n+2}.$$

2. **Armer Briefträger**
   Ein Briefträger steigt täglich eine lange Treppe nach folgendem Muster empor: Die erste Stufe betritt er auf jeden Fall. Von da an nimmt er in jedem Schritt entweder nur eine Stufe, oder aber zwei Stufen auf einmal. Auf wie viele Arten kann der Briefträger die n-te Stufe erreichen? (Mache dir am besten zunächst die Fälle $n = 2, 3, 4$ klar.)