MSG 2015/2016 — Zirkel 9a
Thorsten Rohwedder

Gleitkommadarstellung und erste Programme in Python
– ab 7. Januar 2016 –

1. **Etwas Umrechnung zum Warmmachen**

   Stelle die Zahlen $255_{10}, (0,25)_{10}$ und $(0,2)_{10}$ in Binärsystem dar.

2. **Gleitkommadarstellungen**

   Wie viele Stellen n benötigt man, um folgende Zahlen als n-stellige Gleitpunktzahlen im Dezimalsystem darzustellen?

   $$x_1 = 0.00010001, \qquad x_2 = 1230001, \qquad x_3 = \frac{4}{5}, \qquad x_4 = \frac{1}{3}$$

3. **Endliche Zahlenwelten I**

   (a) Ermittle alle möglichen (positiven wie negativen) binären Maschinenzahlen der Mantissenlänge $n = 3$ und mit höchstens zweistelligem positivem Exponenten, also mit $(00)_2 \leq E \leq (11)_2$. Wie viele gibt es? Stelle sie an der Zahlgeraden grafisch dar.

   (b) Wie viele Bits werden für die Speicherung einer dieser Zahlen benötigt?

4. **Ein Problem, das sich wahrscheinlich nicht am Rechner lösen lässt**

   Schreibe ein Programm, das die folgenden Schritte durchführt:

   - Beginne mit irgendeiner natürlichen Zahl $n > 0$.
   - Ist n gerade, so nimm als Nächstes $\frac{n}{2}$,
   - Ist n ungerade, so nimm als Nächstes $3n + 1$.
   - Wiederhole die Vorgehensweise mit der erhaltenen Zahl.

   Entwerfe zunächst einen Ablauf für das Programm auf dem Papier. Setze deinen *Pseudocode* anschließend in Python um. Teste das Programm, indem du verschiedene n und verschiedene Wiederholungsanzahlen ausprobierst. Was stellst du fest?

5. **Die größte und die kleinste positive Zahl der (Rechner-)Welt**

   (a) Ermittle die größte Maschinenzahl x_{max} und die kleinste positive Maschinenzahl x_{min} die sich im *single precision*-Format ausdrücken lässt.

   (b) Was sind die größte Maschinenzahl x_{max} und die kleinste positive Maschinenzahl x_{min} die sich allgemein in einem Gleitkommaformat mit Mantissenlänge n und möglichen Exponenten E mit $m \leq E \leq M$ ausdrücken lassen?

   (c) Entwerfe einen Algorithmus, der die größte und die kleinste positive Zahl auf dem benutzten Rechner ausgibt.

6. **Endliche Zahlenwelten II**

Natürlich möchte man auch mit Maschinenzahlen Rechenoperationen wie $+$ und $\cdot$ ausführen, das Ergebnis sollte aber wieder in das Zahlenformat passen, d.h. wieder eine Maschinenzahl des benutzen Formats sein. Dazu wird die Rechnung zunächst (in einem größeren Speicher) exakt ausgeführt und dann auf die nächstliegende Maschinenzahl auf- bzw. abgerundet; für das Ergebnis schreiben wir $x \oplus y$ beziehungsweise $x \odot y$.

(a) Überlege dir, dass für reelle Zahlen die folgenden Rechengesetze gelten ($\circ$ steht hierbei für eine der Operationen $+$ oder $\cdot$). Gib insbesondere in (v) und (vi) die gesuchten Elemente explizit an.

  (i) Uneingeschränkte Ausführbarkeit: Für alle x, y gibt es ein z mit $x \circ y = z$.
  (ii) Kommutativgesetz: Für alle x, y gilt $x \circ y = y \circ x$.
  (iii) Assoziativgesetz: Für alle x, y, z gilt $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.
  (iv) Kürzbarkeit: Gilt für a, x, y die Gleichung $a \circ x = a \circ y$, so ist auch $x = y$.
  (v) Lösbarkeit: Für alle gegebenen a, b hat die Gleichung $a \circ x = b$ eine Lösung.
  (vi) Neutrales Element: Es gibt ein $n \in M$, so dass $n \circ x = x \circ n = x$ für alle $x \in M$.
  (vii) Inverse Elemente: Für jedes $x \in M$ gibt es ein $x^{-1} \in M$, so dass $x \circ x^{-1} = n$.
  (viii) Distributivgesetz: Für alle $x, y, z \in M$ gilt $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.

(b) Untersuche am Beispiel der Maschinenzahlen der Mantissenlänge $n = 3$ und mit höchstens zweistelligem positivem Exponenten $(00)_2 \leq E \leq (11)_2$ (Aufgabe 3), welche der Gesetze (i)-(vii) auch für diese Maschinenzahlen M mit den Verknüpfungen $\oplus$, $\odot$ gültig bleiben.

7. **Einige Probleme, die sich mit dem Rechner lösen lassen**

Schreibe einen Algorithmus, der...

- ...die Fibonaccifolge bis zum Glied n berechnet, in eine Liste schreibt und aus den Quotienten eine Näherung für den goldenen Schnitt Φ bestimmt.
- ...die ersten n Primzahlen ermittelt, ausgibt und in ein File schreibt.
- ...den ggT zweier natürlicher Zahlen n und m ermittelt.
- ...zu vorgegebenem $n \in \mathbb{N}$ eine Näherung für $\sqrt{n}$ berechnet.
- ...die größte Maschinenzahl ε („Epsilon“, bei Rechnern kurz „Eps“) bestimmt, für die $1 \oplus \varepsilon = 1$ gilt.
- Eine Primfaktorzerlegung von $n \in \mathbb{N}$ ausgibt.

Entwerfe dazu zunächst auf dem Papier einen geeigneten Programmablauf und überlege, welche Programmstrukturen und Befehle du benötigst.