

Zeichnen mit Epizykeln

Teilnehmende:

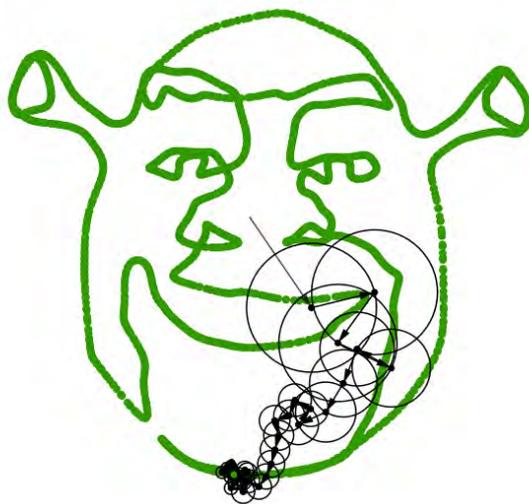
1 Teilnehmer des	Andreas-Gymnasiums
3 Teilnehmende des	Heinrich-Hertz-Gymnasiums
2 Teilnehmende des	Herder-Gymnasiums
1 Teilnehmerin des	Immanuel-Kant-Gymnasiums
1 Teilnehmer des	Käthe-Kollwitz-Gymnasiums

mit tatkräftiger Unterstützung durch:

Marie-Theresa Zschuppe Humboldt-Universität zu Berlin

Gruppenleiter:

Christoph Lieben Humboldt-Universität zu Berlin, BMS



1. Was antike Astronomen mit Fourier-Analyse verbindet

Von der Antike bis zur frühen Neuzeit haben Astronomen versucht, die von der Erde aus beobachteten Bahnen der Planeten so zu erklären, dass sie die Erde in den Mittelpunkt des Universums setzen und die Bahnen der Planeten als Kreise annehmen konnten. Dabei mussten sie davon ausgehen, dass sich die Himmelskörper auf *Epizykeln* bewegen – also auf Kreisen, deren Mittelpunkte ihrerseits auf Kreisbahnen laufen.

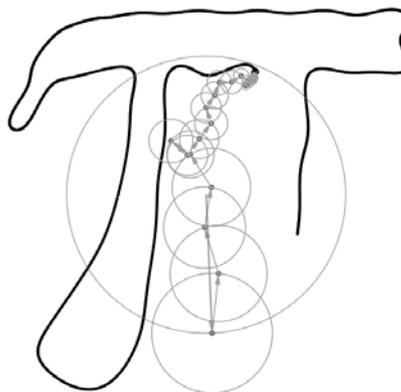
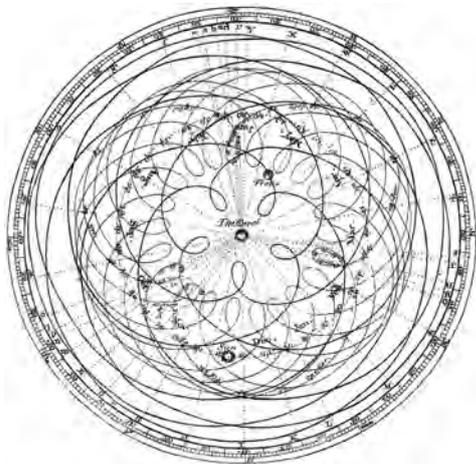


Abbildung 1: Epizykel-Diagramm von Sonne, Merkur und Venus (Encyclopaedia Britannica, 1771) Abbildung 2: Nachzeichnen von π mit 64 Epizykeln

Schon die alten Griechen haben also in gewisser Hinsicht Kurven in periodische Bewegungen zerlegt. Ein Verfahren, das wir heute als *Fourier-Analyse* bezeichnen und auf beliebige geschlossene Kurven anwenden können. In diesem Bericht formalisieren und verallgemeinern wir die Idee der Epizykel und leiten so die diskrete Fourier-Transformation her, mit der wir beliebige (geschlossene) Kurven als Summe von rotierenden Vektoren darstellen und „nachzeichnen“ können – zum Beispiel auch den griechischen Buchstaben π . Anschließend werden wir dieses Verfahren in GeoGebra implementieren.

2. Mathematische Darstellung von Epizykeln

Wir möchten Epizykel als Kurven mit möglichst eleganten Parametrisierungen beschreiben und führen daher zunächst die nötigen Begriffe ein.

Definition 1 (Kurve). Eine (ebene) *Kurve* ist das Bild einer stetigen Abbildung $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ von einem reellen Intervall in die komplexen Zahlen, d. h. die Menge

$$\Gamma := \text{Im}(\gamma) = \{z \in \mathbb{C} \mid \exists t \in [a, b] : \gamma(t) = z\}.$$

Die Abbildung γ nennen wir *Parametrisierung* der Kurve Γ .

Um Epizykel schließlich als Bilder von Kurven darstellen zu können, müssen wir zunächst eine Parametrisierung für Kreise finden.

Aufgrund der trigonometrischen Beziehungen in rechtwinkligen Dreiecken und deren Verallgemeinerung auf beliebige Winkel im Bogenmaß können wir den Einheitskreis als Bild der Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\gamma(t) = \cos t + i \sin t$$

darstellen. Dabei interpretieren wir $\gamma(t)$ als einen Vektor der Länge 1, der für $t \in [0, 2\pi]$ einmal um den Ursprung rotiert. Parametrisierungen sind dabei im Allgemeinen nicht eindeutig, denn auch $\tilde{\gamma} : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\tilde{\gamma}(t) = \cos(2t) + i \sin(2t)$ ist eine Parametrisierung des Einheitskreises.

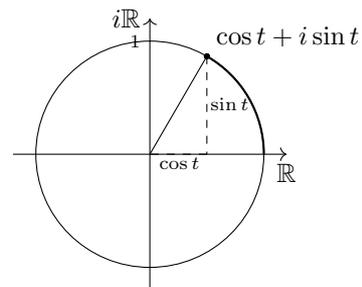


Abbildung 3: Trigonometrische Beziehungen im Einheitskreis

Im Allgemeinen erhalten wir mit

$$\begin{aligned} \gamma_{R,\omega,\varphi} : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{C}, \\ t &\mapsto R \cdot (\cos(\omega t + \varphi) + i \sin(\omega t + \varphi)) \end{aligned}$$

einen Vektor mit Betrag $R \in \mathbb{R}$, der mit der Frequenz $\omega \in \mathbb{R}$ und dem Startwinkel $\varphi \in \mathbb{R}$ um den Ursprung rotiert.

Nun können wir durch einfache Vektoraddition Vektoren um andere Vektoren rotieren lassen.

Beispiel 1 (Mondbahn). Die Erde E umkreise die Sonne S im Koordinatenursprung im Abstand 1 einmal, während der Mond M die Erde währenddessen im Abstand 0.4 zwölfmal umkreise. Dann lässt sich die Bahn der Erde durch $E : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$E(t) = 1.5(\cos t + i \sin t)$$

und die Bahn des Mondes durch die Kurve $M : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$\begin{aligned} M(t) &= E(t) + 0.4(\cos(12t) + i \sin(12t)) \\ &= 1.5(\cos t + i \sin t) + 0.4(\cos(12t) + i \sin(12t)) \end{aligned}$$

parametrisieren.

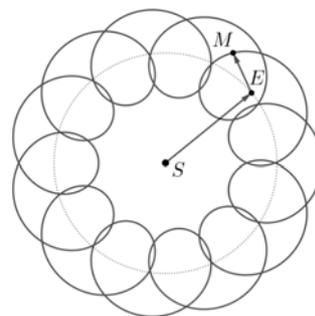


Abbildung 4: Mondbahn (nicht maßstabsgerecht)

Schon an diesem einfachen Beispiel wird klar, dass die Terme schnell unübersichtlich werden. Daher werden wir im Folgenden Begriffe einführen, um sie zu vereinfachen.

Zunächst erweitern wir die aus den reellen Zahlen bekannte natürliche Exponentialfunktion auf die komplexen Zahlen.

Definition 2 (Die komplexe Exponentialfunktion). Wir definieren die *komplexe Exponentialfunktion* $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ durch die Potenzreihe

$$\exp(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots$$

und schreiben auch $e^z := \exp(z)$.

Die Potenzreihe stimmt für rein reelle Zahlen $z = a + 0i$ mit der Taylorreihe der reellen natürlichen Exponentialfunktion zur Entwicklungsstelle 0 überein. Dass diese Reihe für alle $z \in \mathbb{C}$ konvergiert, folgt wegen

$$\left| \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} : \frac{z^k}{k!} \right| = \left| \frac{z^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \frac{k!}{z^k} \right| = \left| \frac{z}{(k+1)!} \right| \rightarrow 0$$

direkt aus dem Quotientenkriterium.

Satz 1 (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion). *Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt*

$$e^z \cdot e^w = \exp(z) \cdot \exp(w) = \exp(z + w) = e^{z+w}.$$

Beweis: Da die Exponentialreihe für alle $z, w \in \mathbb{C}$ konvergiert, können wir das Cauchy-Produkt bilden und mithilfe des binomischen Lehrsatzes umformen:

$$\begin{aligned} \exp(z) \cdot \exp(w) &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{w^k}{k!} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k \cdot w^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k \cdot w^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+w)^n}{n!} = \exp(z+w). \end{aligned}$$

□

Für unsere Epizykel-Parametrisierungen ist die komplexe Exponentialfunktion wegen des folgenden Zusammenhangs wichtig:

Satz 2 (Die Eulersche Formel). *Für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt*

$$e^{it} = \cos t + i \sin t.$$

Beweis: Wir leiten die Hilfsfunktion $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$h(t) = e^{-it}(\cos t + i \sin t)$$

ab. Dabei nutzen wir die Ketten- und Produktregel für komplexe Abbildungen und die Tatsache, dass auch die komplexe Exponentialfunktion ihre eigene Ableitung ist. So erhalten wir

$$\begin{aligned} h'(t) &= -ie^{-it}(\cos t + i \sin t) + e^{-it}(-\sin t + i \cos t) \\ &= -ie^{-it}(\cos t + i \sin t) + ie^{-it}(i \sin t + \cos t) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Also ist h konstant. Wegen $h(0) = e^0(1 + 0) = 1$ erhalten wir damit

$$1 = e^{-it}(\cos t + i \sin t).$$

Die Multiplikation mit e^{it} auf beiden Seiten liefert nun die Behauptung

$$e^{it} = e^{-it+it}(\cos t + i \sin t) = \cos t + i \sin t.$$

□

Mit der Eulerschen Formel vereinfacht sich die Parametrisierung der Mondbahn aus dem obigen Beispiel zu

$$\begin{aligned} M(t) &= 1.5(\cos t + i \sin t) + 0.4(\cos(12t) + i \sin(12t)) \\ &= 1.5e^{it} + 0.4e^{12it}. \end{aligned}$$

Im Allgemeinen lässt sich die durch N Epizykel erzeugte Kurve durch die Parametrisierung $B : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$B(t) = R_1 e^{i\omega_1 t + \varphi_1} + R_2 e^{i\omega_2 t + \varphi_2} + \dots + R_N e^{i\omega_N t + \varphi_N} = \sum_{r=1}^N R_r e^{i\omega_r t + \varphi_r} = \sum_{r=1}^N c_r e^{i\omega_r t}$$

mit $R_r e^{i\varphi_r} =: c_r \in \mathbb{C}$ beschreiben.

3. Approximation geschlossener Kurven mit Epizykeln

Nun versuchen wir, für eine gegebene geschlossene Kurve eine Parametrisierung $F : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$F(t) = \sum_{r \in \mathbb{N}} c_r e^{i\omega_r t}$$

zu finden, deren Bild der gegebenen Kurve möglichst ähnlich ist.

Es sei also eine beliebige geschlossene Kurve gegeben. Diese *diskretisieren* wir, indem wir N Stützstellen $x_{[0]}, x_{[1]}, \dots, x_{[N-1]}$ auf ihr definieren und $x_{[N]} = x_{[0]}$ setzen.

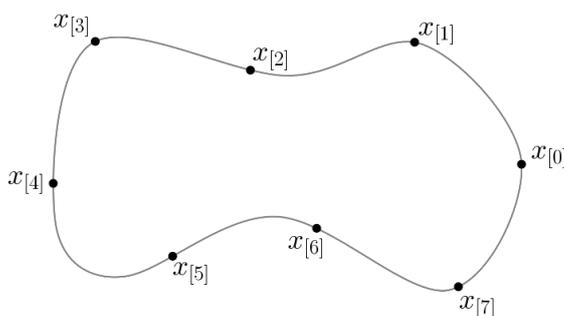


Abbildung 5: Diskretisierung einer Kurve durch Stützstellen

Die gesuchte Funktion F soll alle diese N Stützstellen für $t \in [0, 2\pi]$ in gleichmäßigen zeitlichen Abständen durchlaufen, wobei für $t = 0$ und $t = 2\pi$ jeweils die Stützstelle $x_{[0]}$ getroffen werden soll. Wir unterteilen dafür das Intervall $[0, 2\pi]$ in N gleich große Teilintervalle:

$$\begin{array}{cccccccc} t_0 & t_1 & t_2 & & \dots & t_k \dots & & t_N \\ 0 & \frac{2\pi}{N} & 2 \frac{2\pi}{N} & & & \dots k \frac{2\pi}{N} \dots & & 2\pi \end{array}$$

Damit zum Zeitpunkt $t_k = \frac{2\pi k}{N}$ der Stützpunkt $x_{[k]}$ getroffen wird, muss

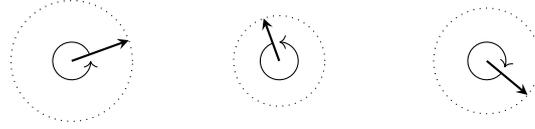
$$F(t_k) = \sum_{r \in \mathbb{N}} c_r e^{i\omega_r \frac{2\pi k}{N}} \stackrel{!}{=} x_{[k]}$$

für alle $k = 0, \dots, N - 1$ gelten.

Unabhängig von den gegebenen Stützstellen können wir Aussagen über die Anzahl der Summanden und die Gestalt der Frequenzen ω_r machen.

Zunächst bemerken wir, dass die Summanden von

$$F(t) = c_1 e^{i\omega_1 t} + c_2 e^{i\omega_2 t} + c_3 e^{i\omega_3 t} + \dots$$



jeweils rotierende Vektoren sind. Damit wie gefordert

$$F(2\pi) = x_{[0]} = F(0)$$

gelten kann, müssen diese für $t = 2\pi$ wieder dieselben Positionen wie für $t = 0$ einnehmen. Dafür müssen die Frequenzen ganzzahlige Vielfache der langsamsten Frequenz sein. Tatsächlich sind es auch nur ganze Zahlen, die als Frequenzen infrage kommen. Denn

$$F(2\pi) = \sum_{r \in \mathbb{N}} c_r e^{i\omega_r 2\pi} = \sum_{r \in \mathbb{N}} c_r e^{i\omega_r 0} = \sum_{r \in \mathbb{N}} c_r = F(0)$$

gilt nur für $e^{i\omega_r 2\pi} = 1$, also für $\omega_r \in \mathbb{Z}$.

Daher können wir in unserer gesuchten Parametrisierung über $r \in \mathbb{Z}$ summieren und dabei $\omega_r = r$ setzen. Wir suchen also nur noch die Koeffizienten $c_r \in \mathbb{C}$ mit

$$\sum_{r \in \mathbb{Z}} c_r e^{ir \frac{2\pi k}{N}} = \dots + c_{-2} e^{-2ir \frac{2\pi k}{N}} + c_{-1} e^{-ir \frac{2\pi k}{N}} + c_0 e^0 + c_1 e^{ir \frac{2\pi k}{N}} + c_2 e^{2ir \frac{2\pi k}{N}} + \dots = x_{[k]}$$

für alle $k = 0, \dots, N-1$.

Tatsächlich benötigen wir auch nur N verschiedene Frequenzen. Denn für $l \in \mathbb{Z}$ gilt

$$e^{(r+l \cdot N)i \frac{2\pi k}{N}} = e^{ir \frac{2\pi k}{N}} \cdot \underbrace{e^{2\pi i k l}}_{=1} = e^{ir \frac{2\pi k}{N}},$$

sodass wir die Vorfaktoren $c_r, c_{r \pm N}, c_{r \pm 2N}, \dots$ ausklammern können. Beim Summieren erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \sum_{r \in \mathbb{Z}} c_r e^{ir \frac{2\pi k}{N}} &= \dots + c_{r-l \cdot N} e^{i(r-l \cdot N) \frac{2\pi k}{N}} + \dots + c_r e^{ir \frac{2\pi k}{N}} + \dots + c_{r+l \cdot N} e^{i(r+l \cdot N) \frac{2\pi k}{N}} + \dots \\ &= \dots + c_{r-l \cdot N} e^{ir \frac{2\pi k}{N}} + \dots + c_r e^{ir \frac{2\pi k}{N}} + \dots + c_{r+l \cdot N} e^{ir \frac{2\pi k}{N}} + \dots \\ &= \dots + (\dots + c_{r-l \cdot N} + c_r + c_{r+l \cdot N} + \dots) e^{ir \frac{2\pi k}{N}} + \dots \\ &= \sum_{r \in \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} c_{r+l \cdot N} e^{i(r+l \cdot N) \frac{2\pi k}{N}} \right), \end{aligned}$$

wobei wir beim Summieren über die Frequenzen r aus jeder Restklasse $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ von $r \bmod N$ nur einen Repräsentanten wählen. Wir erhalten aus N Stützstellen nur Informationen über solche N verschiedene Frequenzen. Um die Genauigkeit der Approximation zu erhöhen, müssen wir dementsprechend das N , d. h. die Anzahl der Stützstellen erhöhen.

Im Folgenden rechnen wir zunächst mit den N ganzzahligen Frequenzen $0, 1, \dots, N-1$ weiter. Wir stehen nun also vor dem Problem, die Koeffizienten $c_r \in \mathbb{C}$ mit

$$\sum_{r=0}^{N-1} c_r e^{ri \frac{2\pi k}{N}} = x_{[k]}$$

für alle $k = 0, \dots, N-1$ zu finden.

4. Die Bestimmung der Koeffizienten

Uns fällt auf, dass von den Summanden der gesuchten Parametrisierung $F : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$F(t) = \sum_{r=0}^{N-1} c_r e^{rit} = c_0 e^0 + c_1 e^{it} + c_2 e^{2it} + \dots + c_{N-1} e^{(N-1)it}$$

nur $c_0 e^0 = c_0$ kein rotierender Vektor ist. Wir vermuten, dass c_0 der *Schwerpunkt* der Stützstellen ist:

$$c_0 \stackrel{?}{=} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k].$$

Um das zu überprüfen, setzen wir unsere Voraussetzung

$$x[k] = \sum_{r=0}^{N-1} c_r e^{ri \frac{2\pi k}{N}}$$

in die rechte Seite der Vermutung ein und formen um:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x[k] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{r=0}^{N-1} c_r e^{ri \frac{2\pi k}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} c_r e^{ri \frac{2\pi k}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} c_r \sum_{k=0}^{N-1} e^{ri \frac{2\pi k}{N}}. \end{aligned}$$

Nun betrachten wir die innere Summe genauer. Für die Frequenz $r = 0$ gilt offenbar

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{ri \frac{2\pi k}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} e^0 = \sum_{k=0}^{N-1} 1 = N.$$

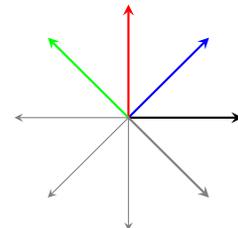
Für Frequenzen $r \neq 0$ erhalten wir die Summe

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{ri \frac{2\pi k}{N}} = e^{ri \frac{2\pi \cdot 0}{N}} + e^{ri \frac{2\pi \cdot 1}{N}} + e^{ri \frac{2\pi \cdot 2}{N}} + e^{ri \frac{2\pi \cdot 3}{N}} + \dots + e^{ri \frac{2\pi \cdot (N-1)}{N}}$$

von Vektoren gleicher Länge, die sich gleichmäßig um den Ursprung anordnen lassen.

Beispielsweise erhalten wir für $r = 1$ und $N = 8$ die Summe

$$\sum_{k=0}^7 e^{ri \frac{2\pi k}{8}} = e^{i \frac{2\pi \cdot 0}{8}} + e^{i \frac{2\pi \cdot 1}{8}} + e^{i \frac{2\pi \cdot 2}{8}} + e^{i \frac{2\pi \cdot 3}{8}} + \dots + e^{i \frac{2\pi \cdot 7}{8}}.$$



Wir beobachten, dass sich je zwei Vektoren beim Addieren gegenseitig aufheben und vermuten, dass daher die gesamte Summe verschwindet.

Und tatsächlich gilt mit der geometrischen Summenformel

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{ri \frac{2\pi k}{N}} = \sum_{k=0}^{N-1} \left(e^{ri \frac{2\pi}{N}} \right)^k = \frac{1 - \left(e^{ri \frac{2\pi}{N}} \right)^N}{1 - e^{ri \frac{2\pi}{N}}} = \frac{1 - e^{ri 2\pi}}{1 - e^{ri \frac{2\pi}{N}}} = \frac{1 - 1}{1 - e^{ri \frac{2\pi}{N}}} = 0.$$

Dabei kann der Nenner nicht verschwinden, da $e^{ri \frac{2\pi}{N}} = 1$ nur für $r = 0$ gilt.

Dieses Ergebnis halten wir fest:

Lemma 1. *Mit den eingeführten Bezeichnungen gilt*

$$\sum_{k=0}^{N-1} e^{ri \frac{2\pi k}{N}} = \begin{cases} N, & r = 0, \\ 0 & r \neq 0. \end{cases}$$

Mit diesem Lemma gilt schließlich

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_{[k]} &= \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} c_r \sum_{k=0}^{N-1} e^{ri \frac{2\pi k}{N}} \\ &= \frac{1}{N} c_0 \sum_{k=0}^{N-1} e^0 + \frac{1}{N} \sum_{r=1}^{N-1} \left(c_r \sum_{k=0}^{N-1} e^{ri \frac{2\pi k}{N}} \right) \\ &= \frac{1}{N} c_0 \cdot N + \frac{1}{N} \sum_{r=1}^{N-1} (c_r \cdot 0) \\ &= c_0 \end{aligned}$$

wie zu Beginn vermutet. Der Koeffizient c_0 ist also tatsächlich der Schwerpunkt der Stützstellen.

Die Idee zur Bestimmung von c_0 möchten wir nun zur Bestimmung des m -ten Koeffizienten c_m verallgemeinern. Diesen könnten wir bestimmen, wenn der zugehörige Vektor $c_m e^{mit}$ *nicht* rotieren würde. Genau das erreichen wir durch Multiplikation mit e^{-mit} , denn dann gilt

$$\begin{aligned} e^{-mit} \cdot \sum_{r=0}^{N-1} c_r e^{rit} &= e^{-mit} \cdot \left(c_0 e^0 + \dots + c_m e^{mit} + \dots + c_0 e^{(N-1)it} \right) \\ &= c_0 e^{-mit} + \dots + c_m e^0 + \dots + c_0 e^{(N-1-m)it}. \end{aligned}$$

Dasselbe machen wir mit unserer Forderung:

$$\begin{aligned} x_{[k]} &= \sum_{r=0}^{N-1} c_r \cdot e^{ri \frac{2\pi k}{N}} && | \cdot e^{-mi \frac{2\pi k}{N}} \\ \Leftrightarrow x_{[k]} \cdot e^{-mi \frac{2\pi k}{N}} &= \sum_{r=0}^{N-1} c_r \cdot e^{(r-m)i \frac{2\pi k}{N}}. \end{aligned}$$

Weil die beiden Seiten für jedes $k = 0, \dots, N-1$ gleich sind, müssen auch ihre Schwerpunkte übereinstimmen. Insgesamt erhalten wir also

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(x_{[k]} \cdot e^{-mi \frac{2\pi k}{N}} \right) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{r=0}^{N-1} c_r \cdot e^{(r-m)i \frac{2\pi k}{N}} \right) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{r=0}^{N-1} \left(c_r \cdot \sum_{k=0}^{N-1} e^{(r-m)i \frac{2\pi k}{N}} \right) \\ &= \frac{1}{N} \left(\sum_{r=0}^{m-1} c_r \cdot 0 + c_m \cdot N + \sum_{r=m+1}^{N-1} c_r \cdot 0 \right) \\ &= c_m. \end{aligned}$$

Wir fassen zusammen: Wenn die Kurve $F : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$F(t) = \sum_{r=0}^{N-1} c_r e^{rit}$$

für $t = \frac{2\pi k}{N}$ ($k = 0, \dots, N-1$) gerade die k -te Stützstelle $x_{[k]}$ trifft, d. h.

$$x_{[k]} = \sum_{r=0}^{N-1} c_r e^{ri \frac{2\pi k}{N}}$$

sein soll, muss für den m -ten Koeffizienten c_m gelten:

$$c_m = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_{[k]} \cdot e^{-mi \frac{2\pi k}{N}}.$$

Es bleibt zu zeigen, dass auch tatsächlich alle Stützstellen auf der so konstruierten Kurve liegen.

Für jedes $j = 0, \dots, N-1$ gilt

$$\begin{aligned} F\left(\frac{2\pi j}{N}\right) &= \sum_{r=0}^{N-1} c_r e^{ri \frac{2\pi j}{N}} \\ &= \sum_{r=0}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_{[k]} \cdot e^{-ri \frac{2\pi k}{N}} e^{ri \frac{2\pi j}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_{[k]} \sum_{r=0}^{N-1} e^{ri(j-k) \frac{2\pi}{N}}. \end{aligned}$$

Wie im Beweis unseres Lemmas gilt

$$\sum_{r=0}^{N-1} e^{ri(j-k) \frac{2\pi}{N}} = \begin{cases} N, & j-k=0 \Leftrightarrow j=k, \\ 0 & j-k \neq 0 \Leftrightarrow j \neq k. \end{cases}$$

Damit gilt nun tatsächlich

$$\begin{aligned} F\left(\frac{2\pi j}{N}\right) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_{[k]} \sum_{r=0}^{N-1} e^{ri(j-k) \frac{2\pi}{N}} \\ &= \frac{1}{N} \left(\sum_{k=0}^{j-1} x_{[k]} \cdot 0 + x_{[j]} \cdot N + \sum_{k=j+1}^{N-1} x_{[k]} \cdot 0 \right) \\ &= x_{[j]}. \end{aligned}$$

Also haben wir eine Parametrisierung der gewünschten Form gefunden.

Definition 3 (Diskrete Fourier-Transformation). Die Abbildung, die aus den N Stützstellen $x_{[0]}, \dots, x_{[N-1]}$ die *Fourier-Koeffizienten*

$$c_r = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x_{[k]} \cdot e^{-ri \frac{2\pi k}{N}}$$

bestimmt, heißt *Diskrete Fourier-Transformation (DFT)*.

Die *Inverse Fourier-Transformation (IDFT)* rekonstruiert aus diesen Koeffizienten wiederum die Werte

$$x_{[k]} = \sum_{r=0}^{N-1} c_r \cdot e^{ri \frac{2\pi k}{N}}.$$

5. Implementierung in GeoGebra

Mit den folgenden Eingaben lässt sich eine durch eine gerade Anzahl von Stützstellen gegebene Kurve mit animierten Epizykeln nachzeichnen:

```

St\”utzstellen = {P_{0}, P_{1}, P_{2}, P_{3}, ...}
N = L\”ange(St\”utzstellen)
t = Schieberegler(0, 2 pi, 0.001, 1)
M = Schieberegler(1, N, 1)
Nummerierung = Folge(1, N)
Frequenzen = Folge(-N/2 + 1, N/2)
Samples = Zip(x(P) + i y(P), P, St\”utzstellen)
FK = Zip(1 / N Summe(Samples(k) e^{(-r 2 pi i k / N)}, k, 1, N), r, Frequenzen)
Koeffizienten = Zip(x(P) + i y(P), P, FK)
Summanden = Zip(Koeffizienten(k) e^{(Frequenzen(k) i t)}, k, Nummerierung)
Betr\”age = Zip(abs(S), S, Summanden)
Spur = x(Summe(Summanden)) + i y(Summe(Summanden))
Sortierung = Umkehren(Sortiere(Summanden, Betr\”age))
Erste = Erstes(Sortierung, M)
Monde = Zip(Summe(Erste, k), k, Nummerierung)
Pfeile = Zip(Vektor(Monde(k), Monde(k + 1)), k, Nummerierung)
Orbits = Zip(Kreis(Monde(k), Monde(k + 1)), k, Nummerierung)

```

Dabei entsteht das Bild der Parametrisierung durch die Spur von **Spur**. Von den **N** Summanden werden die ersten **M** genutzt und ihrerseits nach ihrem Betrag sortiert.

Zu beachten ist, dass das Frequenzspektrum das Aussehen der erzeugten Kurve stark beeinflusst. Nutzen wir wie in den Rechnungen die Frequenzen $0, 1, \dots, N-1$, erhalten wir eine Kurve, die zwar alle Stützstellen durchläuft, aber starkes *Aliasing* aufweist. Deutlich ähnlicher wird diese Kurve dem gewünschten Resultat bei einem um 0 (annähernd) symmetrischen Frequenzspektrum:

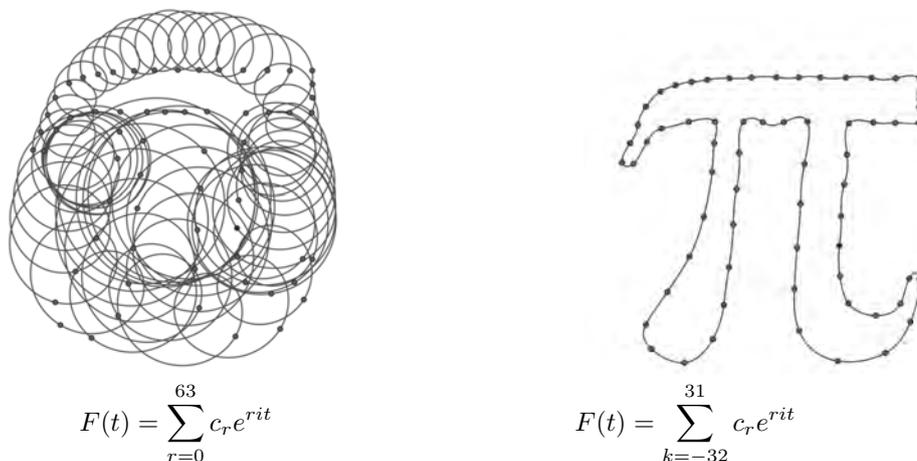
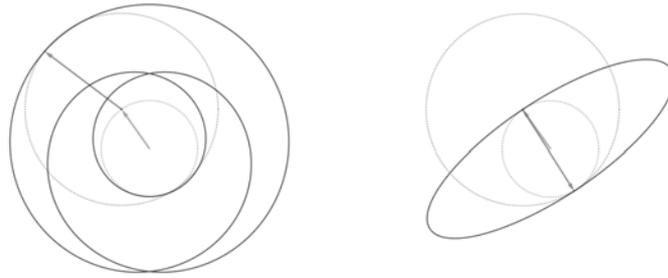


Abbildung 6: Aliasing bei hohen Frequenzen

Dieses Verhalten können wir geometrisch erklären. Wenn zwei Vektoren mit den Frequenzen r_1 bzw. r_2 mit gleichen Vorzeichen rotieren, parametrisiert ihre Summe Kurven mit der *Umlaufzahl* $r_1 + r_2$, d. h. die Kurve durchläuft $r_1 + r_2$ Umrundungen im selben Drehsinn. Wenn zwei Vektoren mit gleicher Frequenz in gegenteiligem Drehsinn rotieren, parametrisiert ihre Summe dagegen eine Ellipse (mit Umlaufzahl 1).



$$F(t) = 1e^{i(2t + \frac{\pi}{4})} + 2e^{i(3t + \frac{\pi}{8})} \quad F(t) = 1e^{i(2t + \frac{\pi}{4})} + 2e^{i(-2t + \frac{\pi}{8})}$$

Abbildung 7: Kurven mit unterschiedlicher Umlaufzahl

Das können wir auch nachrechnen. Dazu seien $c_m = |c_m|e^{i\varphi}$ und $c_{-m} = |c_{-m}|e^{i\psi}$ ($\varphi, \psi \in \mathbb{R}$) die komplexen Koeffizienten mit

$$F(t) = c_m e^{mit} + c_{-m} e^{-mit} = |c_m| e^{i(mt+\varphi)} + |c_{-m}| e^{i(-mt+\psi)}.$$

Durch Änderung von φ bzw. ψ wird das Bild von F nur um den Ursprung gedreht. Wir setzen daher $\varphi = \psi = 0$.

Wegen $\cos(-t) = \cos(t)$ und $\sin(-t) = -\sin(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt mit der Eulerschen Formel

$$\begin{aligned} & |c_m| e^{mit} + |c_{-m}| e^{-mit} \\ &= |c_m| (\cos(mt) + i \cdot \sin(mt)) + |c_{-m}| (\cos(-mt) + i \cdot \sin(-mt)) \\ &= |c_m| (\cos(mt) + i \cdot \sin(mt)) + |c_{-m}| (\cos(mt) - i \cdot \sin(mt)) \\ &= (|c_m| + |c_{-m}|) \cos(mt) + i \cdot (|c_m| - |c_{-m}|) \sin(mt). \end{aligned}$$

Das ist für $t \in [0, 2\pi)$ eine Parametrisierung einer Ellipse mit den Achsenlängen $(|c_m| + |c_{-m}|)$ und $(|c_m| - |c_{-m}|)$. Für $|c_m| = |c_{-m}|$ fällt der Imaginärteil weg, sodass die Ellipse zu einer Strecke wird.

Dass die Fourier-Summe mit den Frequenzen von $-N/2$ bis $N/2$ die gegebene Kurve gut approximiert, entspricht der Aussage des sogenannten *Abtasttheorems*: Danach können Signale, die Frequenzen bis f_{\max} enthalten, aus Stützstellen eindeutig rekonstruiert werden, wenn diese mit einer Frequenz von mehr als $2 \cdot f_{\max}$ vorliegen. Daher genügen unsere N Stützstellen nur zur Rekonstruktion von Summanden mit einer niedrigeren Frequenz als $N/2$.

Zum Abschluss präsentieren wir noch zwei Zeichnungen, die wir mit den oben beschriebenen Eingaben in GeoGebra gezeichnet haben:



Abbildung 8: Sherlock Holmes mit 100 Epizykeln



Abbildung 9: Shrek mit 100 Epizykeln