Fibonacci Zahlen

Teilnehmende:

2 Teilnehmende des Heinrich-Hertz-Gymnasiums
2 Teilnehmende des Herder-Gymansiums
2 Teilnehmende des Immanuel-Kant-Gymansiums
2 Teilnehmende des Käthe-Kollwitz-Gymnasiums

mit tatkräftiger Unterstützung durch:
Steven Bay — Humboldt-Universität zu Berlin

Gruppenleiter:
Jochen Ziegenbalg — Pädagogische Hochschule Karlsruhe

Fibonacci Zahlen
Potenzreihen
und erzeugende Funktionen

Die Folge der Fibonacci Zahlen ist folgendermassen definiert:

$$F_n = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad n = 0 \\ 1 & \text{für} \quad n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{für} \quad n > 1 \end{cases}$$

Wertetafel und Schaubild:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	...

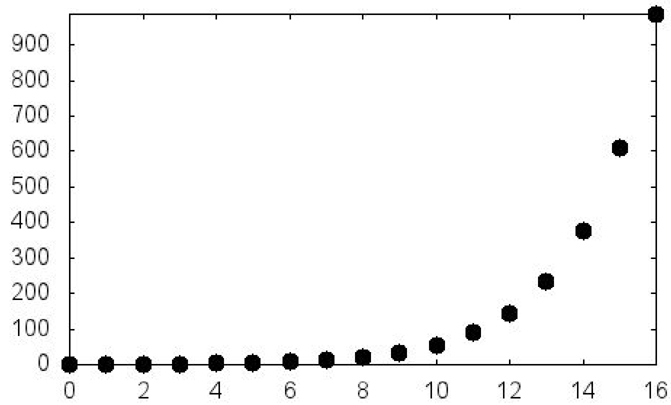

Abbildung 10: Steigungsverhalten der Fibonacci-Folge

Diese Folge wurde von Leonardo von Pisa, auch „Fibonacci“genannt, im Jahre 1202 in seinem Buch „Liber Abaci“ im Zusammenhang mit einer Aufgabe zur Kaninchenvermehrung vorgestellt.

Veranschaulichung

Zu den Fibonacci Zahlen gibt es viele Veranschaulichungen, an denen sich bestimmte Relationen ablesen lassen. Abbildung 2 zeigt z.B. Quadrate, deren Seitenlängen den Fibonacci Zahlen entsprechen.

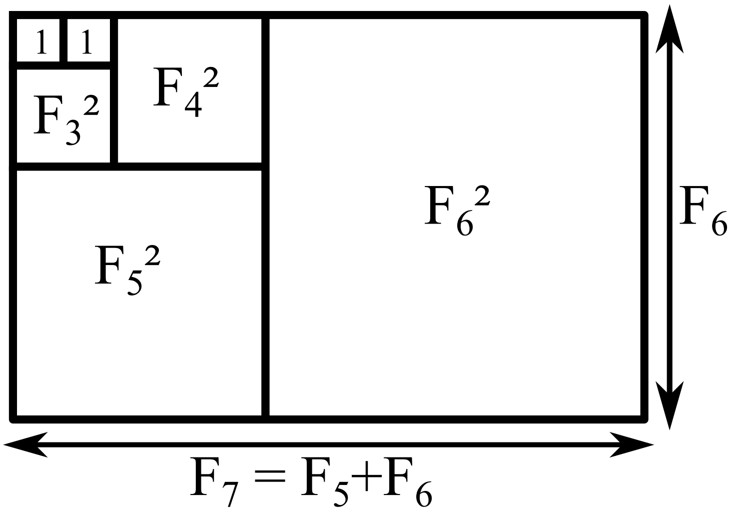

Abbildung 11: Veranschaulichung der Fibonacci Zahlen

Die Graphik veranschaulicht die folgende Gleichung:

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 + F_5^2 + F_6^2 = F_6 \cdot F_7$$

oder generell:

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + ... + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$$

Es besteht eine bestimmte, auch unter anderem aus dieser Veranschaulichung herleitbare, Verbindung zwischen den Fibonacci Zahlen und dem Goldenen Schnitt:

Diese Verbindung lässt sich im Seitenverhältnis f_n der in der vorherigen Abbildung zu findenden Rechtecke erkennen. Dabei sei $f_n := \frac{F_n}{F_{n+1}}$. Die ersten Werte sind

$$1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{8}, \frac{8}{13}, \frac{13}{21}, \frac{21}{34}, \frac{34}{55}, \frac{55}{89}, \frac{89}{144}, \frac{144}{233}, \frac{233}{377}, \frac{377}{610}, \frac{610}{987}, \frac{987}{1597}, \frac{1597}{2584}, \dots$$

Diese Werte von f_n vermitteln den Eindruck dass sie sich einer bestimmten Zahl annähern. Es wird sich zeigen, dass dieser Grenzwert dem Goldenen Schnitt φ entspricht:

$$\varphi = \lim_{n \to \infty} (f_n) \tag{1}$$

Für f_{n+1} gilt weiterhin aufgrund der Definition der Fibonacci Zahlen

$$\frac{1}{f_{n+1}} = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}} = \frac{F_n + F_{n+1}}{F_{n+1}} = f_n + 1$$

Die Folgen $\left(\frac{1}{f_{n+1}}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(f_n + 1)_{n \in \mathbb{N}}$ streben somit demselben Grenzwert zu:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{f_{n+1}} \quad = \quad \lim_{n \to \infty} (f_n + 1)$$

Der Grenzwert der letzteren Folge ist offenbar gleich $\varphi + 1$. Der Grenzwert der Folge $\left(\frac{1}{f_{n+1}}\right)_n$ kann problemlos gebildet werden, da alle Nenner größer als null sind. Er ist gleich $\frac{1}{\varphi}$.

Also muss für diese Grenzwerte die Gleichung

$$\frac{1}{\varphi} = \varphi + 1$$

gelten; φ erfüllt somit die quadratische Gleichung

$$\varphi^2 + \varphi - 1 = 0 \tag{2}$$

Von den beiden Wurzeln

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad \text{und} \quad \frac{-\sqrt{5}-1}{2}$$

dieser Gleichung kommt nur die positive als Grenzwert für die Folge der Fibonacci-Quotienten in Frage, da $F_n, F_n + 1 \in \mathbb{N}$, d.h. $f_n := \frac{F_n}{F_{n+1}} > 0$. Wir erhalten insgesamt das

Ergebnis: Die Folge der Quotienten aus aufeinanderfolgenden Fibonacci Zahlen strebt gegen den Grenzwert

$$\varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Der numerische Wert von φ ist näherungsweise gleich 0,618.

Bemerkung: Gleichung (2) lässt sich auch in der folgenden Form darstellen:

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{\varphi}{1-\varphi}$$

Die Strecke der Länge φ teilt also die Einheitsstrecke im Verhältnis des Goldenen Schnitts (d.h. die Gesamtstrecke verhält sich zur grösseren Teilstrecke wie die grössere Teilstrecke zur kleineren Teilstrecke). Er lässt sich z.B. folgendermaßen mit Zirkel und Lineal konstruieren:

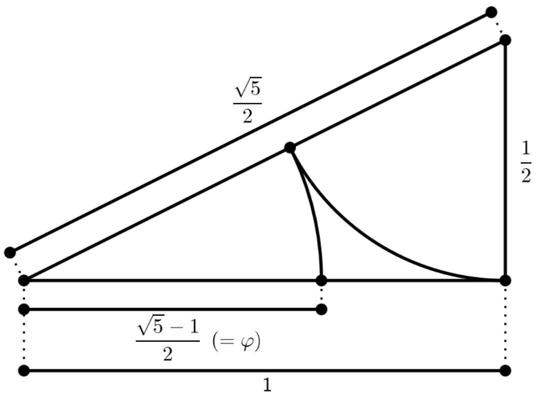

Abbildung 12: Konstruktionsmöglichkeit für den Goldenen Schnitt

1. Formale Potenzreihen

Definition: Eine *formale Potenzreihe* ist eine Folge mit Elementen aus einem geeigneten Zahlenbereich (z.B. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$)[2]:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \ldots)$$

Meist verwendet man jedoch die symbolische Form der Darstellung:

$$P(X) = a_0X^0 + a_1X^1 + a_2X^2 + a_3X^3 + \ldots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n + a_{n+1}X^{n+1} + \ldots$$

bzw. in Kurzform:

$$P(X) = \sum_{i=0}^{\infty} a_iX^i$$

Das Symbol X wird als *Unbestimmte* oder auch als *formale Variable* bezeichnet und die a_i werden als die *Koeffizienten* der Potenzreihe bezeichnet. Sind nur endlich viele der Koeffizienten a_i von Null verschieden, so nennt man $P(X)$ auch ein *Polynom*.

Potenzreihen spielen in der Algebra und der Analysis eine große Rolle: In der Algebra wurde ein formales Rechenverfahren für formale Potenzreihen erstellt und in der Analysis treten sie insbesondere im Zusammenhang mit der Taylor-Entwicklung und dem Satz von Taylor auf.

1.1. Addition und Subtraktion von formalen Potenzreihen

Man bildet die Summe von zwei formalen Potenzreihen

$$A(X) = a_0X^0 + a_1X^1 + a_2X^2 + a_3X^3 + \ldots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n + a_{n+1}X^{n+1} + \ldots$$

und

$$B(X) = b_0X^0 + b_1X^1 + b_2X^2 + b_3X^3 + \ldots + b_{n-1}X^{n-1} + b_nX^n + b_{n+1}X^{n+1} + \ldots$$

komponentenweise, also:

$$\begin{aligned} A(X) + B(X) := (a_0 + b_0)X^0 + (a_1 + b_1)X^1 + (a_2 + b_2)X^2 + (a_3 + b_3)X^3 + \ldots \\ + (a_{n-1} + b_{n-1})X^{n-1} + (a_n + b_n)X^n + (a_{n+1} + b_{n+1})X^{n+1} + \ldots \end{aligned}$$

In der Kurzform:

$$A(X) + B(X) = \sum_{i=0}^{\infty} a_iX^i + \sum_{i=0}^{\infty} b_iX^i := \sum_{i=0}^{\infty}(a_i + b_i)X^i$$

Die Subtraktion ist analog definiert und auch die Multiplikation mit einem Skalar erfolgt „komponentenweise“:

$$c \cdot A(X) = c \cdot \sum_{i=0}^{\infty} a_iX^i := \sum_{i=0}^{\infty}(c \cdot a_i)X^i$$

[2] Von Bedeutung ist, dass für das Rechnen in diesem Rechenbereich das Assoziativgesetz, das Kommutativgesetz und das Distributivgesetz gelten.

1.2. Multiplikation von formalen Potenzreihen

Im Spezialfall von Polynomen bildet man das *Cauchy-Produkt* (auch als *diskrete Faltung* oder *Konvolution* bezeichnet). Hierzu ein Beispiel:

$$\begin{aligned}(a_0X^0 + a_1X^1 + a_2X^2) \cdot (b_0X^0 + b_1X^1 + b_2X^2) &= a_0 \cdot b_0X^0 + (a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0)X^1 \\ &\quad + (a_0 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_0)X^2 \\ &\quad + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)X^3 + a_2 \cdot b_2X^4\end{aligned}$$

Bei formalen Potenzreihen ist es naheliegend, entsprechend vorzugehen:

$$A(X) \cdot B(X) := C(X) \quad \text{mit} \quad C(X) = \sum_{i=0}^{\infty} c_iX^i \quad \text{mit} \quad c_i := \sum_{k=0}^{i} a_k \cdot b_{i-k}$$

Zusammengefasst lässt sich das darstellen als:

$$(\sum_{i=0}^{\infty} a_iX^i) \cdot (\sum_{i=0}^{\infty} b_iX^i) = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{i} a_k \cdot b_{i-k} \right) X^i$$

1.3. Division von formalen Potenzreihen

Wir bestimmen entsprechend der obigen Definition des Produktes (hier in veranschaulichender Darstellung):

$$\begin{aligned}(1 + 1X + 1X^2 + 1X^3 + \ldots) \cdot (1 - X) &= (1 + X + X^2 + X^3 + \ldots + X^n + X^{n+1} + \ldots) \cdot (1 - X) \\ &= 1 + X + X^2 + X^3 + \ldots + X^n + X^{n+1} + \ldots \\ &\qquad - X - X^2 - X^3 - \ldots - X^n - X^{n+1} + \ldots \\ &= 1 \cdot X^0 = 1\end{aligned}$$

Man bezeichnet dementsprechend $(1 - X)$ als das *Inverse* von $(\sum_{i=0}^{\infty} X^i)$ und schreibt

$$\frac{1}{1-X} = \sum_{i=0}^{\infty} X^i$$

Es stellt sich die Frage, zu welchen formalen Potenzreihen es (multiplikative) Inverse gibt und wie sie sich ggf. darstellen lassen. Es gilt der

Satz: *Die formale Potenzreihe* $\sum_{i=0}^{\infty} a_iX^i$ *besitzt genau dann ein Inverses* $D(X) = \sum_{i=0}^{\infty} d_iX^i$, *wenn* $a_0 \neq 0$ *ist.*

Beweis: Wir versuchen, die Koeffizienten von $D(X)$ auszurechnen. Für die Koeffizienten von X^0 muss gelten: $a_0 \cdot d_0 = 1$. Also existiert $d_0 = \frac{1}{a_0}$ genau dann, wenn a_0 von Null verschieden ist. Des Weiteren sind wegen $A(X) \cdot D(X) = 1$ alle weiteren zu dem Produkt gehörenden Koeffizienten gleich 0; d.h.

$$\sum_{k=0}^{i} a_k \cdot d_{i-k} = a_0 \cdot d_i + a_1 \cdot d_{i-1} + \ldots + a_{i-1} \cdot d_1 + a_i \cdot d_0 = 0$$

Daraus folgt sukzessive für $i = 1, 2, 3, \ldots :$

$$a_0 \cdot d_i = -\sum_{k=1}^{i} a_k \cdot d_{i-k}$$

und

$$d_i = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^{i} a_k \cdot d_{i-k}$$

Damit ist im Falle $a_0 \neq 0$ das Inverse $D(X)$ der formalen Potenzreihe $A(X)$ bestimmt. $\square$

1.4. Geometrische Reihen

Die zur geometrischen Reihe gehörende Potenzreihendarstellung ist $\sum_{i=0}^{\infty} a^i X^i$.

Entsprechend dem Fall $(1 - X)$ ist $(1 - aX)$ das Inverse zu dieser Potenzreihe, denn:

$$\begin{aligned}
(\sum_{i=0}^{\infty} a^i X^i) \cdot (1 - aX) &= (1 + aX + a^2X^2 + a^3X^3 + \ldots + a^nX^n + a^{n+1}X^{n+1} + \ldots) \cdot (1 - aX) \\
&= \ 1 + aX + a^2X^2 + a^3X^3 + \ldots + a^nX^n + a^{n+1}X^{n+1} + \ldots \\
&\quad\ - aX - a^2X^2 - a^3X^3 - \ldots - a^nX^n - a^{n+1}X^{n+1} + \ldots \\
&= 1
\end{aligned}$$

Die formale Überprüfung ist auch mit Hilfe der Cauchy-Produkte möglich. Es gilt also:

$$\frac{1}{1 - aX} = 1 + aX + a^2X^2 + a^3X^3 + \ldots + a^{n-1}X^{n-1} + a^nX^n + a^{n+1}X^{n+1} + \ldots$$

Mit den Gesetzen für die Multiplikation folgt für beliebige Konstanten c $(= c \cdot X^0)$:

$$\frac{c}{1 - aX} = c \cdot (1 + aX + a^2X^2 + a^3X^3 + \ldots + a^{n-1}X^{n-1} + a^nX^n + a^{n+1}X^{n+1} + \ldots)$$

bzw.

$$\frac{c}{1 - aX} = c + caX + ca^2X^2 + ca^3X^3 + \ldots + ca^{n-1}X^{n-1} + ca^nX^n + ca^{n+1}X^{n+1} + \ldots$$

1.5. Taylor-Reihen

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine unendlich oft differenzierbare Funktion auf einem offenen Intervall I und $a \in \mathbb{R}$, dann heißt

$$T(f, a)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k$$

die Taylorreihe der Funktion f, am Entwicklungspunkt a.

Bildet man z.B. das Taylor-Polynom 12. Grades der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$, folgt der Ausdruck

$$\underline{0}x^0 + \underline{1}x^1 + \underline{1}x^2 + \underline{2}x^3 + \underline{3}x^4 + \underline{5}x^5 + \underline{8}x^6 + \underline{13}x^7 + \underline{21}x^8 + \underline{34}x^9 + \underline{55}x^{10} + \underline{89}x^{11} + \underline{144}x^{12}$$

Es lässt sich erkennen, dass die Koeffizienten der entstandenen ganzrationalen Funktion 12. Grades die ersten 12 Fibonacci Zahlen sind. Auch mit Taylor-Polynomen höheren Grades bestätigt sich dieser Sachverhalt. Da dies wohl kaum ein Zufall sein kann, stellt sich die Frage, was der Grund dafür ist. Es wird sich zeigen, dass dieses Phänomen auf das Engste mit dem jetzt zu diskutierenden Konzept der erzeugenden Funktion zusammenhängt.

2. Erzeugende Funktionen

Wir erläutern das Konzept der erzeugenden Funktionen am Beispiel der Folge der Fibonacci Zahlen und betrachten dementsprechend die Potenzreihe $f(X) := \sum_{k=0}^{\infty} F_k X^k$, deren Koeffizienten F_k die Fibonacci Zahlen sind.

$f(X) = F_0 + F_1X + F_2X^2 + F_3X^3 + F_4X^4 + F_5X^5 + F_6X^6 + \ldots + F_kX^k + \ldots$

Da gilt $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, ... , $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$

ist $f(X) = 0 + 1X + 1X^2 + 2X^3 + 3X^4 + 5X^5 + 8X^6 + \ldots + F_kX^k + \ldots$

Wenn wir die Rekursionsgleichung $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$ zeilenweise aufschreiben und für $k \geq 2$ mit X^k erweitern, ergibt sich die Gleichung:

$$\begin{array}{ccccc}
F_2X & = & F_1X & + & F_0X \\
F_3X^2 & = & F_2X^2 & + & F_1X^2 \\
F_4X^3 & = & F_3x^3 & + & F_2X^3 \\
 & \ldots & & & \\
F_{k+1}X^k & = & F_kX^k & + & F_{k-1}X^k \\
 & \ldots & & &
\end{array}$$

Durch Aufsummierung der einzelnen Spalten ergibt sich mit der Gleichung $f(X) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k X^k$ (man beachte: $F_0 = 0$ und $F_1 = 1$):

1. Spalte:

$$\begin{aligned}
F_2X + F_3X^2 + F_4X^3 + \ldots + F_{k+1}X^k + \ldots &= \underbrace{\frac{F_1X}{X} - \frac{F_1X}{X}}_{=0} + \frac{F_2X^2}{X} + \frac{F_3X^3}{X} + \frac{F_4X^4}{X} + \ldots + \frac{F_kX^k}{X} + \ldots \\
&= \frac{1}{X} \cdot f(X) - 1 \\
&= \frac{f(X) - X}{X}
\end{aligned}$$

2. Spalte:
$F_1X + F_2X^2 + F_3X^3 + \ldots + F_kX^k + \ldots = f(X)$

3. Spalte:
$F_0X + F_1X^2 + F_2X^3 + \ldots + F_{k-1}X^k + \ldots = X \cdot \big(F_0 + F_1X + F_2X^2 + \ldots + F_{k-1}X^{k-1} + \ldots\big) = f(X) \cdot X.$

Aus der Gleichsetzung der so erhaltenen Terme (rechte Seiten der letzten Gleichungen) ergibt sich

$$\frac{f(X) - X}{X} = f(X) + f(X) \cdot X$$

und aus Standard-Umformungen ergibt sich die Gleichung

$$f(X) \cdot (1 - X - X^2) = X$$

Damit erhält man für die Fibonacci Zahlen die *erzeugende Funktion*

$$f(X) = \frac{X}{1 - X - X^2}$$

3. Herleitung der expliziten Formel für die Fibonacci Zahlen

3.1. Partialbruchzerlegung

Die erzeugende Funktion der Fibonacci Zahlen ist

$$f(X) = \frac{X}{1 - X - X^2}$$

Da diese zuvor hergeleitete erzeugende Funktion von Fibonacci Zahlen einen Nenner der Form $(1 - \alpha X - \beta X^2)$ hat, kann sie folgendermaßen durch eine Partialbruchzerlegung in Form von zwei Summanden einfacherer Form dargestellt werden, deren Konstanten a, b, A und B später herausgefunden werden können:

$$f(X) = \frac{X}{1 - X - X^2} = \frac{A}{1 - aX} + \frac{B}{1 - bX} \tag{3}$$

Wir vergleichen die Brüche in (3). Der Hauptnenner der beiden Summanden auf der rechten Seite ist

$$(1 - (a + b) \cdot X + a \cdot b \cdot X^2)$$

Der Koeffizientenvergleich mit dem Nenner des Bruchs auf der linken Seite von (3) ergibt

$$\begin{aligned} a + b &= 1 \\ a \cdot b &= -1 \end{aligned}$$

Die Lösungen von diesem Gleichungssystem sind dann:

$$a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \quad b = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Beide Summanden in (3) können entsprechend Abschnitt in Form einer Potenzreihe dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \frac{A}{1 - aX} &= A + AaX + Aa^2X^2 + Aa^3X^3 + \ldots + Aa^nX^n + + \ldots \\ \frac{B}{1 - bX} &= B + BbX + Bb^2X^2 + Bb^3X^3 + \ldots + Bb^nX^n + + \ldots \end{aligned}$$

Die Summe von diesen Potenzreihen ist dann:

$$\begin{aligned} \frac{A}{1 - aX} + \frac{B}{1 - bX} =& (A + B)X^0 + (Aa + Bb)X + (Aa^2 + Bb^2)X^2 + \\ & (Aa^3 + Bb^3)X^3 + \ldots + (Aa^n + Bb^n)X^n + \ldots \end{aligned} \tag{4}$$

Der Koeffizient des n-ten Summanden in (4) stellt F_n dar. Da wir die Anfangswerte der Fibonacci Folge kennen, kann man das folgende Gleichungsystem erstellen:

$$\begin{aligned} A + B &= F_0 = 0 \\ Aa + Bb &= F_1 = 1 \end{aligned}$$

Wenn die schon berechneten Konstanten a und b in dieses Gleichungsystem eingesetzt werden, wird es möglich die Werte von A und B zu bestimmen:

$$A = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad B = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

Alle diese berechneten Konstanten kann man in die Formel für F_n einsetzten, und so erhalten wir die explizite Darstellung der n-ten Fibonacci Zahl, welche auch als *Binetsche Formel* bezeichnet wird.

$$F_n = Aa^n + Bb^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Es gibt auch andere Wege, um die Binetsche Formel herzuleiten. Eine davon ist zum Beispiel durch Differenzengleichungen.

3.2. Lineare Differenzengleichungen

Die Fibonacci-Folge kann in Form einer (homogenen) Differenzengleichung zweiter Ordnung dargestellt werden:

$$F_n + (-1)F_{n-1} + (-1)F_{n-2} = 0$$

Die allgemeine Form davon sieht so aus:

$$y_n + a_1 y_{n-1} + a_2 y_{n-2} = 0$$

Um die rekursive Form in die explizite umzuwandeln, soll diese Form mit $+my_{n-1} - my_{n-1}$ „erweitert“ werden, damit sie in zwei Differenzengleichungen erster Ordnung (Form $y_n + ay_{n-1} = 0$) zerlegt werden kann:

$$\begin{aligned} &y_n + my_{n-1} + a_1 y_{n-1} - my_{n-1} + a_2 y_{n-2} = 0 \\ &\underbrace{(y_n + (m+a_1)y_{n-1})}_{\text{(I)=0}} - \underbrace{(my_{n-1} + a_2 y_{n-2})}_{\text{(II)=0}} = 0 \end{aligned}$$

Da die explizite Formel für jede zwei aufeinanderfolgenden Elemente gelten soll, kann man aus (I) und (II) jeweils eine explizite Formel herleiten. Wenn beide zugleich gelten, dann soll es auch für die allgemeine Formel gelten.

$$\begin{aligned} (I) \quad & y_n = -(a_1 + m) \cdot y_{n-1} \\ (II) \quad & y_n = \frac{a_2}{m} \cdot y_{n-1} \end{aligned}$$

Diese beiden Gleichungen erster Ordnung haben dann dieselben Lösungen, wenn sie dieselbe Gleichung darstelle, wenn also gilt

$$-(a_1 + m) = \frac{a_2}{m}$$

Durch Umformung erhalten wir die „charakteristische“ Gleichung:

$$m^2 + a_1 \cdot m + a_2 = 0$$

Ihre Lösungen sind:

$$m_{1/2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2}}{2}$$

Da im Falle der Fibonacci Zahlen a_1 und a_2 jeweils gleich -1 sind, gilt für $m_{1/2}$ konkret:

$$m_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Die explizite Formel für Differenzengleichungen erster Ordnung ist vom Typ $y_n = A^n \cdot c$. Bei homogenen linearen Differenzengleichungen ist die Summe von zwei Lösungen wieder eine Lösung. Deshalb kann die „allgemeine" Lösung der obigen Gleichung mit m_1 und m_2 wie folgt dargestellt werden (wobei c_1 und c_2 beliebige Konstanten sind). Mit

$$y_n = m_2^n \cdot c_1 \quad \text{und} \quad y_n = m_1^n \cdot c_2$$

ist für beliebige Konstanten c_1 und c_2 also auch

$$y_n = m_2^n \cdot c_1 + m_1^n \cdot c_2$$

eine Lösung.

Wenn die Werte von m_i eingesetzt werden, dann wird die allgemeine Formel für F_n so aussehen:

$$F_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot c_1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \cdot c_2$$

Da die Anfangswerte von der Fibonacci Folge schon bekannt sind, ist es möglich, die Werte für c_1 und c_2 zu berechnen:

$$F_0 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 \cdot c_1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^0 \cdot c_2 = 0$$

$$F_1 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 \cdot c_1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 \cdot c_2 = 1$$

Also:

$$1 \cdot c_1 + 1 \cdot c_2 = 0$$
$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 \cdot c_1 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 \cdot c_2 = 1$$

Daraus folgt schliesslich

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

und

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$