Fibonacci Zahlen

Teilnehmende:

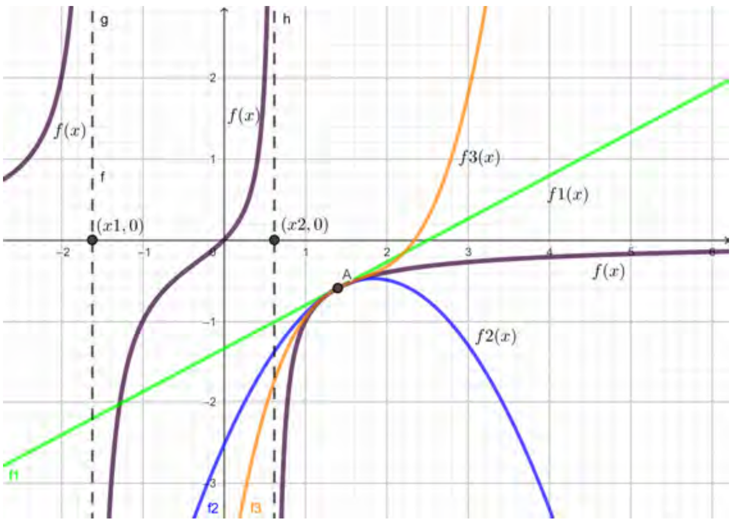
3 Teilnehmende des	Andreas-Gymnasiums
2 Teilnehmende des	Heinrich-Hertz-Gymnasiums
2 Teilnehmende des	Herder-Gymnasiums
1 Teilnehmer des	Imanuel-Kant-Gymnasiums
2 Teilnehmende des	Käthe-Kollwitz-Gymnasiums

mit tatkräftiger Unterstützung durch:

Lydia Gehrke	Humboldt-Universität zu Berlin

Gruppenleiter:

Jochen Ziegenbalg	Pädagogische Hochschule Karlsruhe



1. Die Fibonacci-Zahlen

1.1. Leonardo von Pisa

Die Fibonacci-Folge ist eine Zahlenfolge, die nach dem italienischen Mathematiker Leonardo von Pisa um ca. 1200 benannt worden ist. Er war ein sehr bedeutender Mathematiker seiner Zeit und der Name der Folge Fibonacci stammt von dem lateinischen Wort Filius für Sohn und dem Namen von Leonardos Vater Bonaccius ab. Sein berühmtestes Werk ist das Buch *Liber Abaci* und er ist vor allem für die Verbreitung des Dezimalsystems in Europa bekannt.

1.2. Fibonacci-Folge

Die Folgenglieder, der Fibonacci-Zahlen, bilden sich aus der Summe der vorherigen zwei Folgenglieder, wobei die nullte Fibonacci-Zahl als 0 und die erste als 1 definiert werden. Die rekursive Definition der Fibonacci-Folge wird formal wie folgt beschrieben:

Definition 1. Die wie folgt definierte Folge $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wird als Fibonacci Folge bezeichnet.

$$F_n = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad n = 0 \\ 1 & \text{für} \quad n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{für} \quad n > 1 \end{cases} .$$

Mit Hilfe dieser Definition ergeben sich beispielsweise die ersten 13 Fibonacci Zahlen, welche in der folgenden Tabelle dargestellt sind.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

1.3. Fibonacci Zahlen in der Natur

Die Fibonacci Zahlen stehen in einem erstaunlich reichhaltigen Beziehungsgeflecht zu anderen Themen innerhalb und ausserhalb der Mathematik. Ein Beispiel hierfür ist das Wachstum der Kaninchenpopulation, mit der Leonardo von Pisa auch erstmals die Fibonaccifolge beschrieben hat.

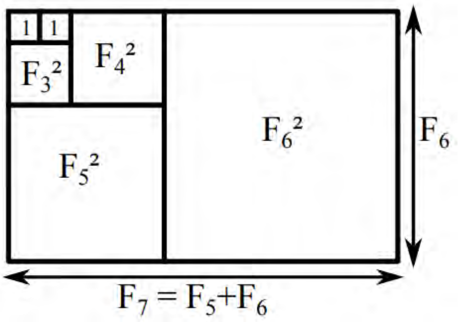
Sogar die Sonnenblume scheint von den Fibonacci Zahlen zu wissen. Einerseits kann man beobachten, dass die einzelnen Blätter im goldenen Winkel[a] zueinander wachsen, wodurch sie die optimale Nährstoffausbeute und somit ein optimales Wachstum erreichen. Auch wenn man zum Beispiel die Blüte von Sonnenblumen betrachtet, findet man die Fibonacci-Zahlen wieder. Die Kerne der Sonnenblume sind spiralförmig angeordnet. Zählt man die Anzahl der Spiralen, so stellt man fest, dass diese jeweils eine Fibonacci Zahl ist – unabhängig davon, ob man rechtsdrehende oder linksdrehende Spiralen zählt.

[a] Vergleichbar zum goldenen Schnitt, siehe unten.

Spiralen in einer Sonnenblume

1.4. Veranschaulichung durch figurierte Zahlen

Figuren aus Fibonacci Zahlen sind der Ausgangspunkt für eine Vielzahl von Veranschaulichungen mathematischer Sachverhalte. Sehen wir uns ein Beispiel dafür genauer an.



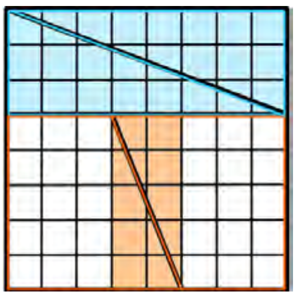
Die nebenstehende Figur illustriert die Gleichheit der Summe der Quadrate der ersten n Fibonacci Zahlen und dem Produkt der n-ten und $n+1$-ten Fibonacci Zahl. Konkret werden hier die Quadrate der ersten sechs Fibonacci Zahlen abgebildet und so aneinander gelegt, dass ein Rechteck mit den Seitenlängen F_6 und $F_5 + F_6 = F_7$ entsteht. Verallgemeinert man diese Darstellung, so lässt sich daraus die allgemeine Formel ableiten:

$$F_1^2 + F_2^2 + ... + F_n^2 = F_n \cdot F_{n+1}$$

Diese Abbildung kann als "paradigmatischer Beweis" gesehen werden, weswegen hier auf einen formalen Beweis (z. B. per vollständiger Induktion) verzichtet wird.

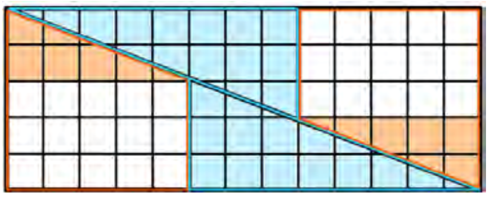
1.5. Cassini Identität

Wir betrachten im Folgenden ein Quadrat mit der Seitenlänge $a = 8$ und dem Flächeninhalt $A = a^2 = 64$. Dieses Quadrat wird nun in zwei Dreiecke (blau gefärbt) und zwei Trapeze (jedes davon bestehend aus einem orangenen Dreieck und einem weißen Rechteck) zerlegt, wie in der untenstehenden Abbildung dargestellt. Nun werden die vier Teile umsortiert, sodass ein Rechteck mit den Seitenlängen 5 und 13 entsteht. Dieses Rechteck hat nun allerdings einen Flächeninhalt von $A = 5 \cdot 13 = 65$. Wie kann das sein? Der Flächeninhalt dürfte sich durch ein Umsortieren doch nicht ändern.



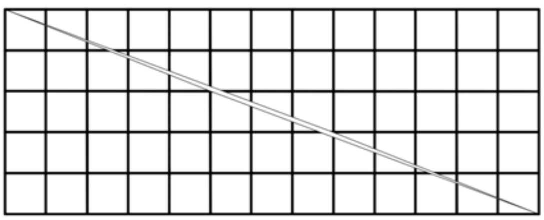
Das Ausgangsquadrat

$\longrightarrow$



Das Rechteck nach dem Umlegen

Der Grund dieser Flächendifferenz ist eine optischen Täuschung. Sie entsteht dadurch, dass durch die Dicke der Linien ein Parallelogramm hinter der Diagonale „versteckt“ wird, welches genau den Flächeninhalt 1 hat. Das Parallelogramm entsteht dadurch, dass die Steigung des blauen Dreiecks $\frac{3}{8}$ und die des orangenen Dreiecks $\frac{2}{5}$ beträgt, womit die sich eine Differenz von $\frac{1}{40}$ ergibt. Dadurch entsteht auf beiden Seiten der scheinbaren Diagonale ein „Knick“. Das dadurch entstehende Parallelogramm (siehe untenstehendes Bild) hat einen Flächeninhalt von $A = 1$. Durch die dick gezeichnete Diagonale wird diese Fläche jedoch versteckt, wodurch die Täuschung entsteht.



Richtige Umlegung und das dadurch entstehende Parallelogramm

Bei dieser optischen Täuschung handelt es sich um einen Spezialfall der folgenden Formel, der sogenannten "Cassini-Identität".

Satz 1 (Cassini Identität)**.** *Für alle Glieder F_n der Fibonacci Folge (mit $n > 0$) gilt die folgende Gleichheit:*

$$F_n^2 = F_{n-1} \cdot F_{n+1} + (-1)^{n+1}$$

Beweis: *Induktionsanfang:* $n = 1$

$$F_1^2 = 1^2 = 1 \qquad F_0 \cdot F_2 + (-1)^2 = 0 \cdot 1 + 1 = 1$$

Induktionsvoraussetzung:

$$F_n^2 = F_{n-1} \cdot F_{n+1} + (-1)^{n+1} \text{ gilt für festes, aber beliebiges } n \in \mathbb{N}$$

Induktionsschritt:

$$\begin{aligned}
F_n \cdot F_{n+2} + (-1)^{n+2} &= F_n \cdot (F_{n+1} + F_n) + (-1)^{n+2} \\
&= F_n F_{n+1} + F_n^2 + (-1)^{n+2} \\
&\overset{IV}{=} F_n F_{n+1} + F_{n-1} \cdot F_{n+1} + (-1)^{n+1} + (-1)^{n+2} \\
&= F_n F_{n+1} + F_{n-1} \cdot F_{n+1} \\
&= F_{n+1}(F_n + F_{n-1}) \\
&= F_{n+1}^2
\end{aligned}$$

□

Um die Gültigkeit dieses Satzes noch anschaulicher zu illustrieren, wollen wir eine paradigmatische Darstellung der Identität vorstellen. Dabei wird eine Folge von Rechtecken und Quadraten betrachtet. In der folgenden Abbildung ist zu sehen, dass in jeder Zeile die immer gleiche Fläche hinzukommt. Da in der Startzeile rechts ein Kästchen mehr ist, gilt damit für den Pfeil von links nach rechts:

$$F_{2k}^2 = F_{2k-1} \cdot F_{2k+1} + (-1)$$

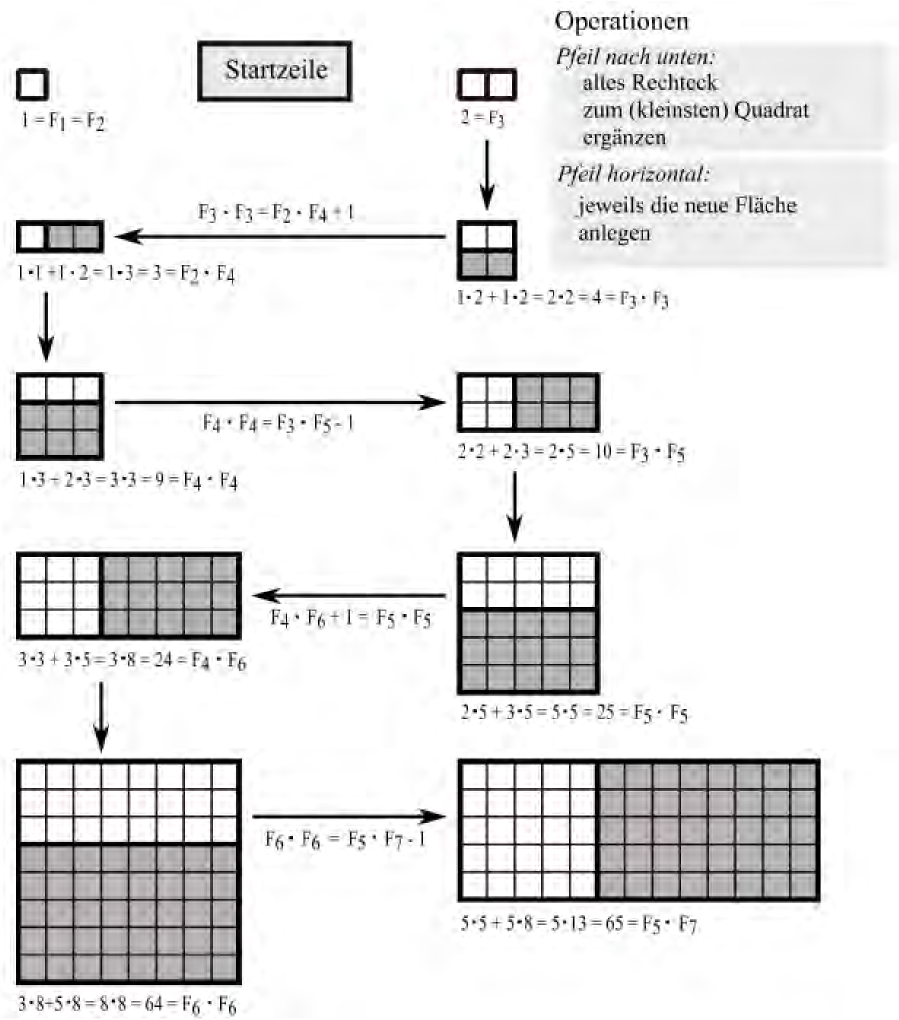
Für die Pfeile von rechts nach links gilt:

$$F_{2k+1}^2 = F_{2k} \cdot F_{2k+2} + 1$$

Allgemein gilt:

$$F_n^2 = F_{n-1} \cdot F_{n+1} + (-1)^{n+1}$$

Womit die Gültigkeit der Cassini-Identität paradigmatisch gezeigt wurde.



Ganz konkret galt im obigen Beispiel $F_6^2 = F_5 \cdot F_7 - 1$. Die Differenz von 1 wurde jedoch durch die dicken Linien versteckt. Analog Täuschung lassen sich mit Hilfe der Formel auch weitere optische Täuschungen konstruieren. Die absolute Flächendifferenz ist in allen Fällen gleich 1. Das bedeutet, dass bei immer größeren Seitenlängen die relative Flächendifferenz immer kleiner wird, wodurch die Täuschung immer unauffälliger wird.

2. Formale Potenzreihen

Zu einer gegebenen Folge $(a_n)_{n=0,\ldots,\infty}$ mit Elementen aus einem „geeigneten" Rechenbereich, in unserem Fall aus den reellen Zahlen, ist die zugehörige formale Potenzreihe gegeben als

$$A(X) = a_0X^0 + a_1X^1 + a_2X^2 + a_3X^3 + \ldots + a_{n-1}X^{n-1} + a_nX^n + a_{n+1}X^{n+1} + \ldots$$

in Kurzform:

$$A(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nX^n$$

Das Symbol X ($= X^1$) ist hierbei zunächst einmal nur ein Objekt, eine formale Variable, welche für nichts anderes als für sich selbst steht. Im folgenden wollen wir uns nun anschauen, wie man mit diesen formalen Potenzreihen rechnen kann.

2.1. Rechnen mit formalen Potenzreihen

Addition und Subtraktion

Es seien zwei beliebige Potenzreihen $A(X) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ und $B(X) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n X^n$ mit zugehörigen reellen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowie $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben. Die Summe $A(X) + B(X)$ ist nun definiert als:

$$\begin{aligned} A(X) + B(X) &= a_0X^0 + b_0X^0 + a_1X^1 + b_1X^1 + ... + a_nX^n + b_nX^n + ... \\ &= X^0(a_0 + b_0) + X^1(a_1 + b_1) + ... + X^n(a_n + b_n)) + ... \end{aligned}$$

oder in kurzer Form

$$A(X) + B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nX^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_nX^n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)X^n.$$

Für die Subtraktion gilt analog

$$A(X) - B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nX^n - \sum_{n=0}^{\infty} b_nX^n = \sum_{n=0}^{\infty}(a_n - b_n)X^n.$$

Multiplikation und Division

Wir teilen die Multiplikation in 2 Teile auf. Der erste Teil ist die Multiplikation einer formalen Potenzreihe mit einem Skalar ($c \in \mathbb{R}$).

$$c \cdot A(x) = c \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_nX^n = \sum_{n=0}^{\infty}(c \cdot a_n)X^n$$

Der zweite Teil ist die Multiplikation von zwei Potenzreihen. Seien $A(X)$ und $B(X)$ wie oben gegeben. Zuerst sei für beliebige $k, m \in \mathbb{N}$ folgende Gleichheit gefordert:

$$aX^k \cdot bX^m = (a \cdot b) \cdot X^{k+m}.$$

Betrachtet man nun als Beispiel die Folgen $(a_0, a_1, 0, 0, ...)$ und $(b_0, b_1, b_2, 0, 0, ...)$ so gälte also (unter Verwendung des Distributivgesetzes):

$$\begin{aligned} &(a_0X^0 + a_1X^1) \cdot (b_0X^0 + b_1X^1 + b_2X^2) \\ = \quad & a_0b_0 \cdot X^0 + (a_0b_1 + a_1b_0) \cdot X^1 + (a_1b_1 + a_0b_2) \cdot X^2 + a_1b_2 \cdot X^3. \end{aligned}$$

In Anlehnung daran lässt sich das Chauchy-Produkt[2] $A(X) \cdot B(X) := C(X)$ zweier Potenzreihen definieren:

$$A(X) \cdot B(X) := C(X) \text{ mit } C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_nX^n \text{ und } c_n = \sum_{k=0}^{n}(a_k \cdot b_{n-k}).$$

Zusammengefasst ist das

$$\sum_{n}^{\infty} a_nX^n \cdot \sum_{n}^{\infty} b_nX^n = \sum_{n}^{\infty}(\sum_{k=0}^{n} a_kb_{n-k})X^n.$$

Wir wollen die Division hier nicht allgemein definieren, sondern uns der Frage widmen, wann eine Potenzreihe $A(X)$ ein (multiplikativ) Inverses $D(X)$ besitzt, das heißt eine Potenzreihe, für die $A(X) \cdot D(X) = 1$ gilt[3]. Betrachten wir dafür zunächst ein Beispiel.

Laut der Cauchy-Definition ist das Produkt von $(1 + X^1 + X^2 + X^3 + ...)$ mit $(1 - X)$ gleich 1, da:

$$\begin{aligned} &(1 + X + X^2 + X^3 + ... + X^n + X^{n+1} + ...) \cdot (1 - X) \\ = \quad & 1 + X + X^2 + X^3 + ... + X^n + X^{n+1} + ... - X - X^2 - X^3 - ... - X^{n+1} - ... = 1. \end{aligned}$$

[2]Welches in anderen Kontexten auch als Faltung oder Konvolution bezeichnet wird.

[3]Wodurch eine Division in Form der Multiplikation mit der Inversen Potenzreihe möglich ist.

Dementsprechend nennt man $(1 - X)$ das Inverse von $\sum_{n=0}^{\infty} X^n$ und schreibt: $\frac{1}{1-X} = \sum_{n=0}^{\infty} X^n$.

Nun stellt sich die Frage, für welche Potenzreihen es (multiplikative) Inverse gibt. Für Potenzreihen über den reellen Zahlen gilt:

Satz 2. *Die formale Potenzreihe* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ *besitzt genau dann ein Inverses* $D(X) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n X^n$*, wenn* $a_0 \neq 0$ *gilt.*

Beweis: Nehmen wir zunächst an, dass $a_0 \neq 0$ ist. Falls ein Inverses $D(X)$ von $A(X)$ existiert, muss $D(X) \cdot A(X) = 1$ sein. Nun versuchen wir, die Koeffizienten von $D(X)$ zu berechnen. Da $a_0 \cdot d_0 = 1$ gelten soll, definieren wir $d_0 = \frac{1}{a_0}$. Damit $A(X) \cdot D(X) = 1$ gilt, müssen alle anderen Koeffizienten des Cauchy-Produkts 0 sein, das heißt für $n \geq 1$ ist:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k d_{n-k} = a_0 d_n + a_1 d_{n-1} + ... + a_{n-1} d_1 + a_n d_0 = 0.$$

Daraus folgt für n = 1, 2, 3, ...

$$a_0 d_n = -\sum_{k=1}^{n} a_k d_{n-k} \quad \text{und damit} \quad d_n = \frac{-1}{a_0} \sum_{k=1}^{n} a_k d_{n-k}.$$

Diese Definition ist wegen $a_0 \neq 0$ wohldefiniert und damit existiert das Inverse $D(X)$ von $A(X)$.

Man zeigt nun die Rückrichtung per Kontraposition. Angenommen es gilt $a_0 = 0$, dann gilt für den Koeffizient von X^0 des Cauchy-Produkts von $A(X)$ und jeder möglichen Potenzreihe $D(X)$: $a_0 \cdot d_0 = 0$. Damit kann jedoch keine Inverse existieren, da bei dieser $a_0 \cdot d_0 = 1$ gelten müsste. □

3. Herleitung der erzeugenden Funktion

Wir betrachten dazu die Potenzreihe $f(X) := \sum_{n=0}^{\infty} F_n \cdot X^n$, deren Koeffizienten F_n die Fibonacci Zahlen sind. Es ist also $f(X) = F_0 \cdot X^0 + F_1 \cdot X^1 + F_2 \cdot X^2 + \, ... \, F_n \cdot X^n + \, ...$

1. Wir schreiben die rekursive Bildungsformel $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$ für $k \in \{2, ..., n+1\}$ untereinander und multiplizieren jede Zeile mit X^k.

$$\begin{array}{rcl} F_2 \cdot X^2 & = & F_1 X^2 + F_0 X^2 \\ F_3 \cdot X^3 & = & F_2 X^3 + F_1 X^3 \\ & ... & \\ F_n \cdot X^n & = & F_n X^{n+1} + F_n X^{n+2} \\ & ... & \end{array}$$

2. Wir addieren die Gleichungen spaltenweise (links, mitte, rechts).

$$\sum_{n=2}^{\infty} F_n X^n = \sum_{n=1}^{\infty} F_n X^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} F_n X^{n+2}$$

3. Wir vereinfachen die entstandene Gleichung, indem wir die Summen unter Verwendung von $f(X)$ und möglichst wenig anderen Termen ausdrücken.

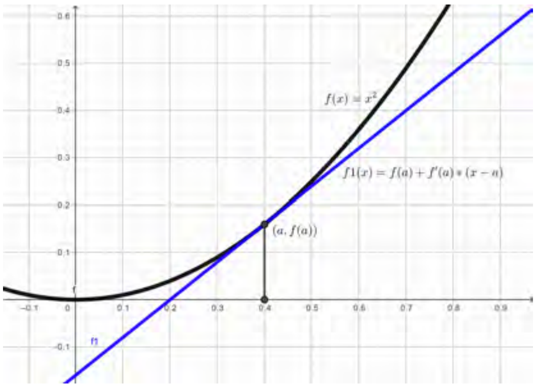
$$\begin{array}{rcl} f(X) - F_0X^0 - F_1X^1 & = & (f(X) - F_0X^0) \cdot X + f(X) \cdot X^2 \\ f(X) - X & = & f(X) \cdot X + f(X) \cdot X^2 \end{array}$$

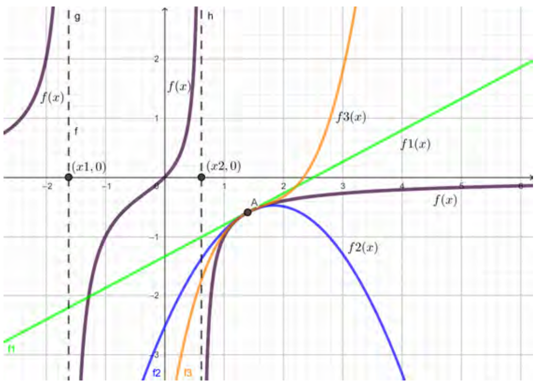
4. Wir setzten diese Vereinfachungen zusammen und forme nach $f(X)$ um.

$$\begin{array}{rcll} f(X) - X & = & f(X) \cdot X + f(X) \cdot X^2 & \mid \quad +X \\ f(X) & = & f(X) \cdot X + f(X) \cdot X^2 + X & \mid \quad -f(X) \cdot X - f(X) \cdot X^2 \\ f(X) \cdot (1 - X - X^2) & = & X & \mid \quad \cdot(1 - X - X^2)^{-1} \\ f(X) & = & \dfrac{X}{(1 - X - X^2)} & \end{array}$$

4. Taylorreihen

Die Ableitung einer reellen Funktion $f(x)$ in einem Punkt a lässt sich deuten als die Tangente am Punkt $(a, f(a))$ des Funktionsgraphen von $f(x)$. Die Funktion $f(x)$ lässt sich in der Umgebung von a genauer annähern, durch die lineare Funktion $f_1(x) := a + f'(a) \cdot (x - a)$.





Lineare Funktionen lassen sich als Polynome ersten Grades deuten und es können genauere Annäherungen an die Funktion $f(x)$ durch Polynome höherem Grades erreicht werden.

Der Satz von Taylor basiert auf den folgenden Kontext: Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall reeller Zahlen und $f : I \to \mathbb{R}$ eine beliebige $(n+1)$-mal differenziebare Funktion. In der folgenden Formel stehen $f', f'', ..., f^{(k)}$ für die erste, zweite,..., k-te Ableitung der Funktion f. Weiterhin sei $f^{(0)} = f$, a ein beliebiges Element von I und

$$\begin{aligned} T(f, x, a, n) &:= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k. \end{aligned}$$

Dann wird $T(f, x, a, n)$ als das n-te Taylor-Polynom von $f(x)$ an der Stelle a bezeichnet. Das Taylor-Polynom der Funktion $f(x)$ nähert sich für $n \to \infty$ in der Umgebung von a immer mehr $f(x)$ an.

Satz 3 (Satz von Taylor)**.** *Die Funktion f sei $(n+1)$-mal stetig differenzierbar. Dann ist*

$$f(x) = \textstyle\sum_{z=0}^{n} \frac{f^{(z)}(a)(x-a)^z}{z!} + \frac{1}{n!} \int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt.$$

Beweis: Induktionsanfang $n = 0$:

$$f(x) = f(a) + f(x) - f(a) = f(a) + \textstyle\int_a^x f^{(1)}(x)dx = f(a) + \frac{1}{0!} \int_a^x f^{(1)}(x)dx$$

Induktionsbeweis „$n \to n+1$“ Wir nutzen hierfür partielle Integration.

$$\begin{aligned}
\int_a^x \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!} dt &= \frac{(x-a)^{n+1} f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} - \frac{(x-a)^{n+1} f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} + \int_a^x \frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!} dt \\
&= \frac{(x-a)^{n+1} f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} + \left[\frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}\right]_a^x - \int_a^x -\frac{(x-t)^n f^{(n+1)}(t)}{n!} dt \\
&= \frac{(x-a)^{n+1} f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} + \int_a^x \frac{(x-t)^{n+1} f^{(n+2)}(t)}{(n+1)!} dt
\end{aligned}$$

□

Bemerkung 1. Die Summe aus dem Satz von Taylor bis zum n-ten Glied ohne das Integralrestglied heißt Taylorpolynom n-ten Grades.

Wenn wir nun die erzeugende Funktion der Fibonacci Reihe in eine reelle Funktion umwandeln und die Taylorreihe bestimmen, dann sind die resultierenden Koefizienten die Fibonacci Zahlen, denn aus der Konstruktion der gefundenen erzeugenden Funktion der Fibonacci-Zahlen folgt, dass die Koeffizienten dessen Taylorpolynoms die Fibonacci-Zahlen sein werden.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \frac{x}{1-x-x^2} \\
T(f,x,0,n) &= 0x^0 + 1x^1 + 1x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 5x^5 + 8x^6 + 13x^7 \\
&\quad +21x^8 + 34x^9 + 55x^{10} + 89x^{11} + 144x^{12} + ...
\end{aligned}$$

4.1. Goldener Schnitt und explizite Formel

Definition 2. Wir nennen folgende irrationale Zahlen goldene Schnitte. Links ist der "große" goldene Schnitt und rechts der "kleine" goldene Schnitt.

$$\phi := \tfrac{\sqrt{5}+1}{2} \qquad \varphi := -\tfrac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Bemerkung 2. Wir wollen eine Strecke so teilen, dass das Verhältnis der Strecke zum grösseren Teil gleich dem Verhältnis des größeren zum kleineren Teil ist. Es ergibt sich, dass das Teilungsverhältnis dann genau dem goldenen Schnitt entspricht.

$$\begin{aligned}
&& \frac{a}{b} &= \frac{a+b}{a} \\
\Rightarrow && \frac{a}{b} &= 1 + \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)} \\
\Rightarrow && \left(\frac{a}{b}\right)^2 - \left(\frac{a}{b}\right) - 1 &= 0 \\
\Rightarrow && \frac{a}{b} = \phi \quad &\vee \quad \frac{a}{b} = \varphi
\end{aligned}$$

Satz 4 (von Binet)**.** *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt folgende Gleichheit.*

$$F_n = \frac{\phi^n - \varphi^n}{\sqrt{5}}$$

Beweis: Wir betrachten eine geometrische Potenzreihe.

$$\begin{aligned}
&& \left(\sum_{z=0}^{\infty} a^z X^z\right) \cdot (1-aX) &= \sum_{z=0}^{\infty} a^z X^z - \sum_{z=1}^{\infty} a^z X^z = 1 \\
\Rightarrow && \sum_{z=0}^{\infty} a^z X^z &= \frac{1}{1-aX}
\end{aligned}$$

Hiermit erhalten wir die inverse Potenzreihe zur geometrischen Reihe. Wir werden nun versuchen, die erzeugende Funktion der Fibonacci-Folge als Summe von Potenzreihen darzustellen.

$$f(X) = \frac{X}{1-X-X^2} = \frac{A}{1-aX} + \frac{B}{1-bX} \quad (1)$$

Anschließend führen wir einen Koeffizientenvergleich im Nenner durch.

$$\begin{aligned} 1-X-X^2 &= 1-(a+b)X-abX^2 \\ &\Rightarrow \; a+b=1 \quad \wedge \quad ab=-1 \\ &\Rightarrow \; a^2-a-1=0 \end{aligned}$$

Die Lösungen für obige quadratische Gleichung sind die goldenen Schnitte φ und ϕ, wobei für b dann der jeweils andere Wert folgen würde. Aufgrund der Symmetrie von (**??**) gegenüber der Bennenung von a und b setzen wir nun o.B.d.A. $a = \varphi$ und $b = \phi$.

Die Reihendarstellungen der Potenzreihen aus (1) sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \frac{A}{1-aX} + \frac{B}{1-bX} &= (A+B)X^0 + (Aa+Bb)X^1 + (Aa^2+Bb^2)X^2 + ... + (Aa^n+Bb^n)X^n + ... \\ \frac{X}{1-X-X^2} &= F_0X^0 + F_1X^1 + F_2X^2 + ... + F_nX^n + ... \end{aligned}$$

Daraus können wir nun die Parameter der Reihe bestimmen.

$$\begin{aligned} A+B=F_0=0 \quad &\wedge \quad Aa+Bb=F_1=1 \\ \Rightarrow A = \frac{1}{a-b} = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad &\wedge \quad B = \frac{1}{b-a} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

Damit folgt die behauptete Gleichheit.

$$F_n \quad = Aa^n + Bb^n \quad = F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$$

□

Bemerkung 3. Wir haben im Beweis eine Methode namens Partialbruchzerlegung verwendet. Hierbei geht es darum, einen Bruch mit einem Polynom P des Grades $\deg(P)$ in mehrere Polynombrüche kleineren Nennergrades umzuwandeln.

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \sum_{z=1}^{m} \frac{q_z}{p_z}$$

Das kann nur erreicht werden, wenn für jede Asymptote des Graphen von P unter den p_z sich ein Polynom mit demselben Verhalten befindet. Dies kann durch Festlegung geeigneter Parameter erreicht werden.

Satz 5. *Das Verhältnis aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen konvergiert gegen den goldenen Schnitt.*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi$$

Beweis: Zuerst zeigen wir die Konvergenz. Sei

$$a_n := \frac{F_{n+1}}{F_n}$$

Hierfür nutzen wir die Cassini-Identität.

$$\begin{aligned}
F_{n+1}F_{n-1} &= F_n^2 + (-1)^n \\
\Rightarrow \quad \frac{F_{n+1}}{F_n} &= \frac{F_n}{F_{n-1}} + \frac{(-1)^n}{F_nF_{n-1}} \\
\Rightarrow \quad a_n &= \frac{(-1)^n}{F_nF_{n-1}} + \frac{(-1)^{n-1}}{F_{n-1}F_{n-2}} + ... + \frac{(-1)^{m+1}}{F_{m+1}F_m} + a_m \\
\Rightarrow \quad |a_n - a_m| &= \left| \sum_{i=n+1}^{m} \frac{(-1)^i}{F_iF_{i-1}} \right| \\
&\leq \sum_{i=n+1}^{m} \frac{1}{F_iF_{i-1}} \\
&\leq \sum_{i=n+1}^{m} \frac{1}{(i-1)^2}
\end{aligned}$$

Es ist bekannt, dass die Reihe der Reziproken von Quadraten konvergiert.

$$\sum_{z=1}^{\infty} \frac{1}{z^2} = \zeta(2) = \frac{\pi}{6}$$

Wegen der Konvergenz existiert ein $N(\varepsilon)$, sodass für $n > \varepsilon$ der Abstand zum Grenzwert kleiner als ε ist. Seien nun $n, m > N(\varepsilon) + 1$.

$$\sum_{i=n+1}^{m} \frac{1}{(i-1)^2} = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{i^2} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i^2} < \zeta(2) + \varepsilon - (\zeta(2) - \varepsilon) = 2\varepsilon$$

Wenn wir nun $N^*(\varepsilon) := N(\frac{\varepsilon}{2})$ definieren, ergibt sich daraus die gewünschte Cauchy-Konvergenz von (a_n). Sei a_∞ der Grenzwert dieser Folge.

$$\begin{gathered}
a_\infty = \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{F_n + F_{n-1}}{F_n} = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} = 1 + \frac{1}{a_\infty} \\
\Rightarrow a_\infty^2 - a_\infty - 1 = 0
\end{gathered}$$

Die goldenen Schnitte sind genau die Lösungen dieser quadratischen Gleichung. Da a_∞ per Definition positiv ist, folgt $a_\infty = \phi$. $\square$