Figurierte Zahlen

Teilnehmende:

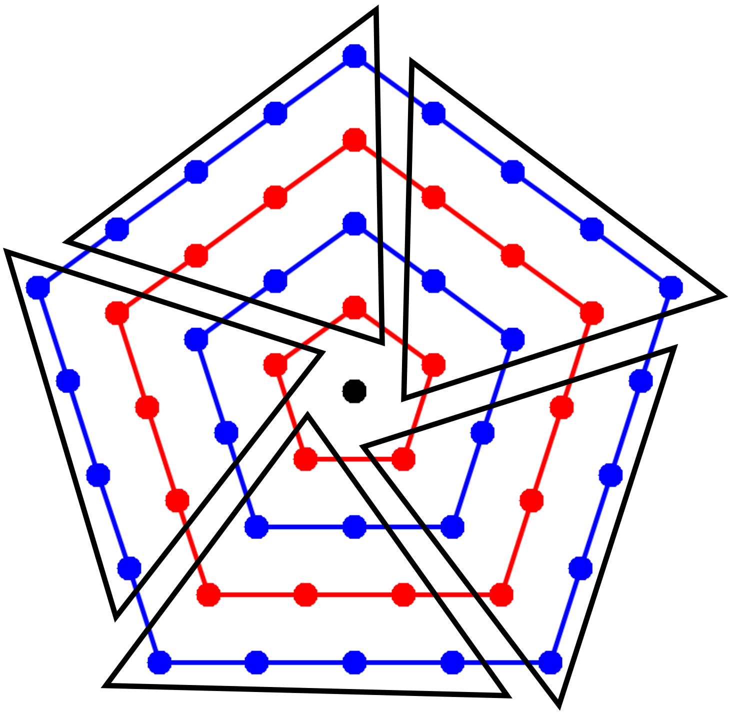
3 Teilnehmende des	Andreas-Gymnasiums
1 Teilnehmende des	Heinrich-Hertz-Gymnasiums
2 Teilnehmende des	Herder-Gymnasiums

mit tatkräftiger Unterstützung durch:

Sara Sciacovelli	Humboldt-Universität zu Berlin

Gruppenleiter:

Jochen Ziegenbalg	Pädagogische Hochschule Karlsuhe



1. Über Figurierte Zahlen

Als einer der wichtigsten Bestandteile der Mathematik gelten natürlich die Zahlen. Wir beschäftigen uns stets mit ihren Eigenschaften und untersuchen ihre Veränderungen. Doch um diese Veränderungen zu verstehen bzw. die Muster dahinter zu erkennen, müssen wir nicht zwangsweise abstrakt und symbolisch denken. Manchmal hift es auch, die Dinge von einem bildlichen, einem geometrischen Blickwinkel zu betrachten: **die Zahlen zu Figuren zu machen.**

Der Begriff der „Figurierten Zahlen“ ist nicht normiert. Während einige Mathematiker damit nur die Polygonal- und Pyramidalzahlen bezeichnen, umfasst dieser Begriff in diesem Bericht auch weitere Zahlengruppen. So bezeichnen wir damit alle natürlichen Zahlen und Zahlenfolgen, die bestimmte geometrische Merkmale aufweisen, wie zum Beispiel die Fibonacci-Zahlen, die in Abschnitt 3 näher erläutert werden.

1.1. Dreieckszahlen / Triagonalzahlen

Als Einstieg betrachten wir die elementarsten figurierten Zahlen: die Dreieckszahlen. Schon die Pythagoreer im alten Griechenland waren von diesen Zahlen fasziniert. Die Zahl Zehn als die Summe der Zahlen Eins, Zwei, Drei und Vier wurde von ihnen als etwas „Vollkommenes“ angesehen und war deshalb für sie heilig.

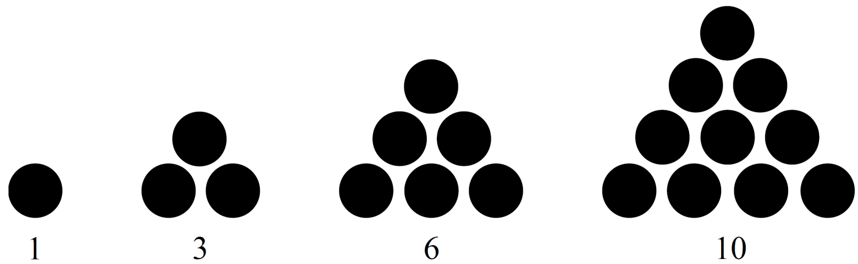


Abbildung 7: *Dreieckszahlen*

Zur Berechnung der Dreieckszahlen wird die bekannte Gaußsche Summenformel verwendet, über die folgende Anekdote erzählt wird[1]:

„Der junge Gauss war kaum in die Rechenclasse eingetreten, als Büttner die Summation einer arithmetischen Reihe aufgab. Die Aufgabe war indess kaum ausgesprochen als Gauss die Tafel mit den im niedern Braunschweiger Dialekt gesprochenen Worten auf den Tisch wirft: »Ligget se'.« (Da liegt sie.)“

Die Aufgabenstellung von Seiten des Lehrers war folgende: Was ist die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis 100? Gauß überlegte sich für die Berechnung eine geschickte Herangehensweise: Wenn man diese Zahlenfolge zweimal untereinander aufschreibt, einmal in aufsteigender und einmal in absteigender Reihenfolge, so ergibt die Spaltensumme der Zahlen stets 101 ($101 = 1 + 100 = 2 + 99 = \dots$). Insgesamt ergibt das für die doppelte Summe der Zahlenreihe $100 \cdot 101 = 10100$, weshalb die einfache Summe 5050 beträgt.

Diese Überlegung kann aber auch geometrisch veranschaulicht werden, indem man die Dreieckszahlen durch eine entsprechende Anzahl an Quadraten in einer Treppenfigur darstellt:

[1] überliefert durch Wolfgang Sartorius von Waltershausen

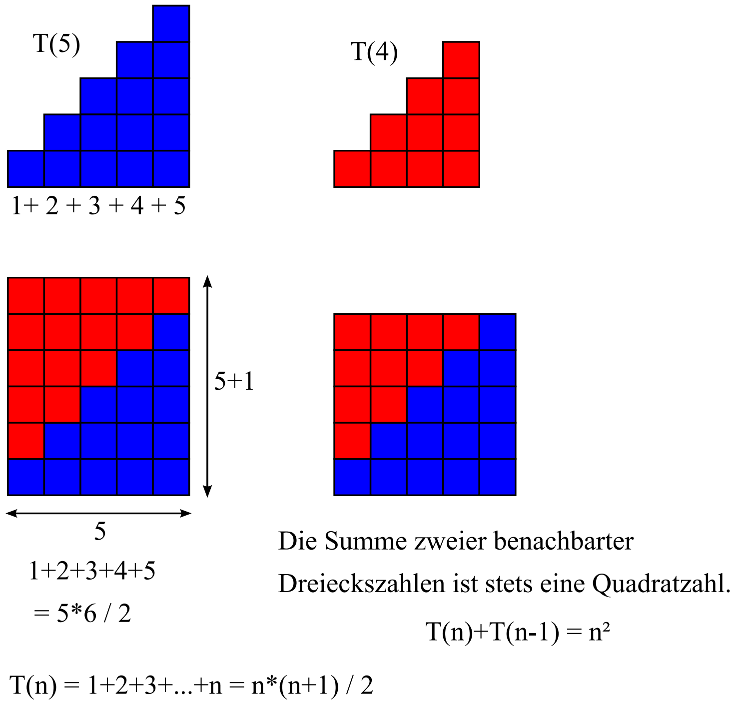


Abbildung 8: *Summen von Dreieckszahlen*

1.2. Babylonische Multiplikation

Neben den antiken Griechen waren auch die antiken Babylonier an der Astronomie interessiert. Doch um Planetenbahnen sinnvoll zu berechnen und somit Vorhersagen treffen zu können, ist ein gutes Stellenwertsystem notwendig. Die Babylonier nutzten ein fast voll ausgebildetes System zur Basis 60[2], was zwar die Länge der aufgeschriebenen Zahlen reduzierte, aber das Merken des „kleinen Einmaleins“ erschwerte. Folgende Methode nutzten sie für die Multiplikation:

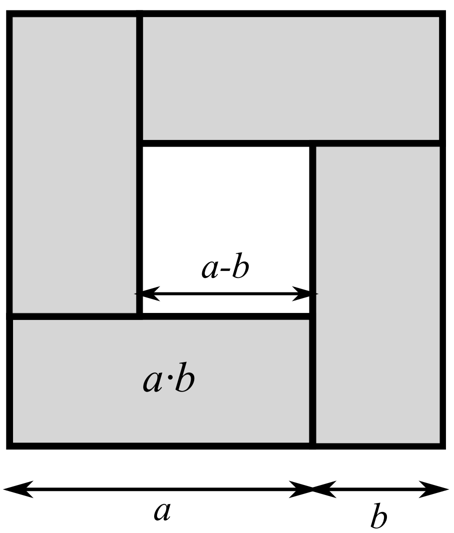


Abbildung 9: *Babylonische Multiplikation*

[2]es fehlte im Wesentlichen nur ein Symbol für die Ziffer Null

Wie in Abbildung 3 demonstriert wird, kann eine Multiplikation in die Subtraktion zweier Quadratzahlen umgewandelt werden, für welche die Babylonier spezielle Tontafeln besaßen. Die Division durch Vier ist im Wesentlichen einfach, womit das Problem der Multiplikation auf einfache Rechenoperationen zurückgeführt und somit erleichtert wurde. Symbolisch stellt die Abbildung folgende Gleichung dar:

$$a \cdot b = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4} = \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{(a-b)^2}{4}.$$

1.3. Weitere Beispiele

Im Folgenden werden zwei weitere Beispiele dafür aufgeführt, wie eine geometrische Veranschaulichung die Muster hinter der Addition von Quadrat- und Kubikzahlen aufzeigt.

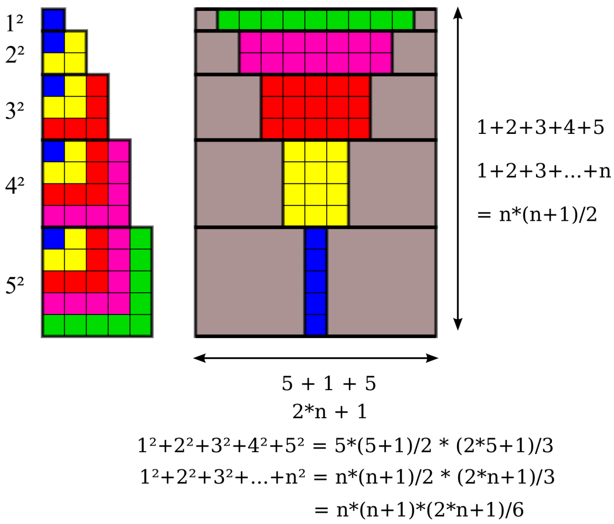


Abbildung 10: *Summen von Quadratzahlen*

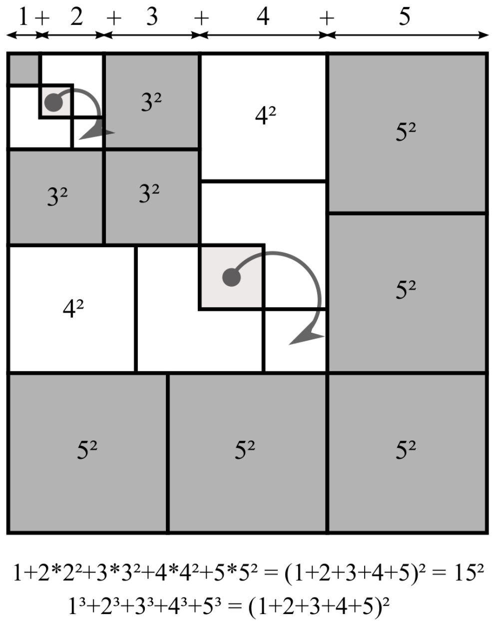


Abbildung 11: *Summen von Kubikzahlen mithilfe von Quadratzahlen*

2. Polygonalzahlen

2.1. Beispiele für nicht-zentrierte Polygonalzahlen

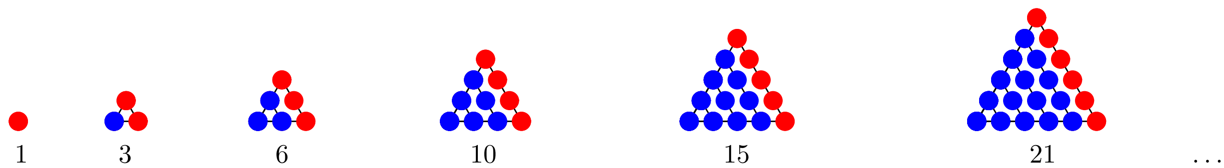


Abbildung 12: *Die Triagonalzahlen*

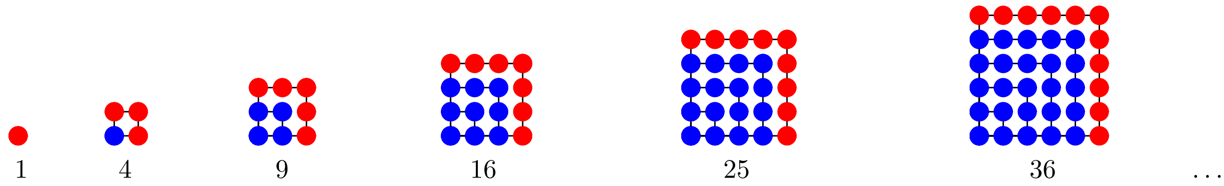


Abbildung 13: *Die Quadratzahlen*

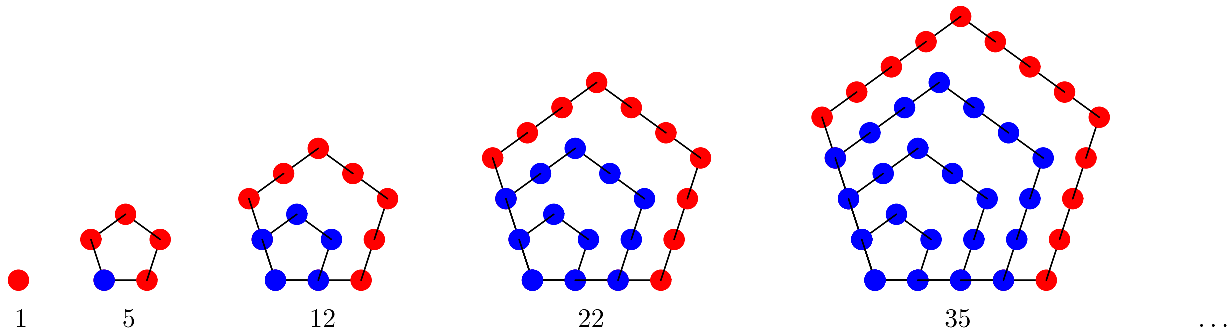


Abbildung 14: *Die Pentagonalzahlen*

Die obigen Abbildungen stellen unterschiedliche Polygonalzahlen dar. Anhand der Farben geht aus den Abbildungen ein klares Konstruktionsmuster hervor. Auf dieser Grundlage lässt sich das Konstruktionsprinzip verallgemeinern und so eine Bildungsvorschrift finden.

2.2. Nicht-zentrierte Polygonalzahlen und ihre Bildungsvorschrift

Aus einer Betrachtung der Abbildungen folgt schnell, dass bei einer Polygonalzahl der Stufe k und der Eckenzahl E, zur bereits bestehenden Polygonalzahl der Stufe $k-1$ an $E-2$ Seiten jeweils k Punkte dazukommen, wobei $E-3$ Punkte sich an den Ecken überlagern und so doppelt gezählt werden (siehe Abbildung 9). Daraus ergibt sich die folgende rekursive Bildungsvorschrift:

$$G(E,k) = G(E,k-1) + (E-2)k - (E-3).$$

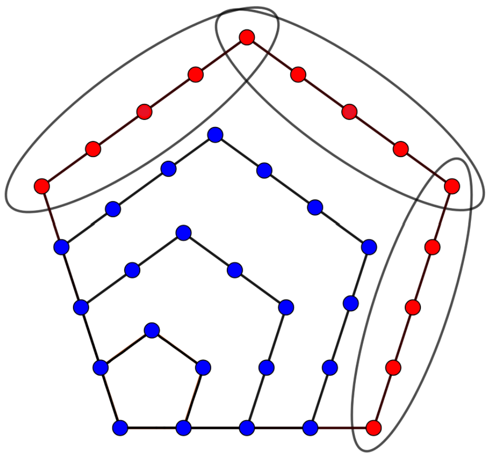


Abbildung 15: *Konstruktion der Polygonalzahlen*

Wenn man nun die Gleichungen für die Polygonalzahlen aufeinanderfolgender Stufen bei konstanter Eckenzahl E untereinander schreibt, fällt auf, dass alle Polygonalzahlen bis G_{k-1}, mit Ausnahme von $G_0 = 0$ und G_k, zwei Mal vorkommen.

$$\begin{aligned}
G_1 &= G_0 + 1(E-2) - (E-3) \\
G_2 &= G_1 + 2(E-2) - (E-3) \\
G_3 &= G_2 + 3(E-2) - (E-3) \\
&\dots \\
G_{k-1} &= G_{k-2} + (k-1)(E-2) - (E-3) \\
G_k &= G_{k-1} + k(E-2) - (E-3)
\end{aligned}$$

Durch Anwenden des Teleskopverfahrens, sprich des vertikalen Aufsummierens der linken und rechten Seiten der Gleichungen, fallen diese Gs weg und man erhält die folgende Gleichung als explizite Bildungsvorschrift:

$$\begin{aligned}
G_k &= (E-2)\sum_{i=1}^{k} i - k(E-3) \\
&= (E-2)\,\frac{k(k+1)}{2} - k(E-3).
\end{aligned}$$

Alternative Herleitung für die explizite Bildungsvorschrift:
Eine weitere Art die Polygonalzahlen zu betrachten ist, sie durch horizontale Linien zu unterteilen. Bei den Quadratzahlen ist dies am Einfachsten: In jeder Waagrechten sind immer k Punkte. Die anderen Polygonalzahlen lassen sich analog betrachten. Bei den Dreieckszahlen sind es, von unten nach oben gesehen, erst k Punkte, dann $k-1$, usw. Für die Betrachtung der Fünfeckszahlen muss man die oberen „Bögen“ als in einer Waagrechten betrachten, so erhält man erst k Punkte, dann $k+1$ usw. Für die Sechseckszahlen setzt sich das Muster dementsprechend mit k Punkten, gefolgt von $k+2$ Punkten, fort. Bei allen Polygonalzahlen gibt es immer k Waagrechten. Wir konstruieren zunächst die Quadratzahlen, für die $G(4,k) = k^2$ gilt und addieren noch etwas dazu, was bei vier Ecken gleich 0 ist. Bei den darauffolgenden Zahlenreihen wird pro Waagrechte immer ein konstant größer werdender Wert dazuaddiert. Aus diesen Beobachtungen folgt, dass wir

$$(E-4)\sum_{i=1}^{k-1} i$$

zu k^2 addieren.
Somit erhalten wir die folgende Bildungsvorschrift:

$$\begin{aligned}
G(E,k) &= k^2 + (E-4)\sum_{i=1}^{k-1} i \\
&= k^2 + (E-4)\,\frac{(k-1)k}{2}.
\end{aligned}$$

Diese Formel lässt sich in die oben hergeleitete explizite Bildungsvorschrift umformen und ist damit äquivalent zu ihr.

2.3. Zentrierte Polygonalzahlen

Zentrierte Polygonalzahlen (kurz ZPZ) ergeben sich durch das Anlegen von Punktmustern um ein Zentrum. Dabei werden an jede Seite E jeweils Punkte in Höhe der Stufenzahl s angelegt. Zu beachten ist hierbei, dass eine zentrierte Polygonalzahl, für die die Stufenzahl $s = 0$ beträgt, bei beliebiger Eckenzahl E immer gleich 1 ist. Die Bildungsvorschrift lautet somit wie folgt:

$$ZPZ(E,s) = 1 + E + 2E + 3E + \cdots + sE.$$

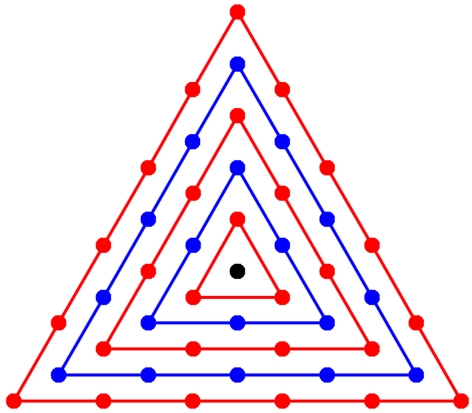


Abbildung 16: *Die zentrierte Dreieckszahl* $ZPZ(3,5) = 46$

In der Summenschreibweise lässt sich dies schreiben als

$$ZPZ(E,s) = 1 + E\sum_{i=1}^{s} i.$$

Durch Anwenden der Gaußschen Summenformel ergibt sich direkt die explizite Darstellung

$$ZPZ(E,s) = 1 + E\,\frac{s(s+1)}{2}.$$

Interessant ist hierbei, dass man die Formel für die Dreieckszahlen in der Bildungsvorschrift wiederfindet. Dies lässt sich, wie in Abbildung 11 veranschaulicht, auch zeichnerisch erkennen.

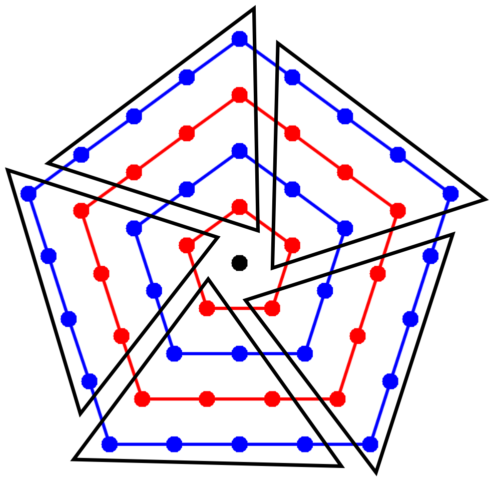


Abbildung 17: *Die Dreieckszahlen in den zentrierten Hexagonalzahlen*

3. Fibonacci-Zahlen

Die Fibonacci-Zahlen lassen sich ab $n = 2$ rekursiv berechnen, indem die beiden vorherigen Folgenglieder addiert werden. In der folgenden Wertetabelle sind die ersten 16 Fibonacci-Zahlen angegeben.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	...
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	...

3.1. Rekursive Darstellung

Die von Leonardo von Pisa[3] 1202 in seinem Buch *Liber Abaci* vorgestellte Zahlenfolge (*Fibonacci-Folge*[4]) definiert sich rekursiv[5] durch

$$F_n = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad n = 0 \\ 1 & \text{für} \quad n = 1 \\ F_{n-1} + F_{n-2} & \text{für} \quad n > 1 \end{cases}$$

3.2. Quadrate und Rechtecke aus Fibonacci-Zahlen

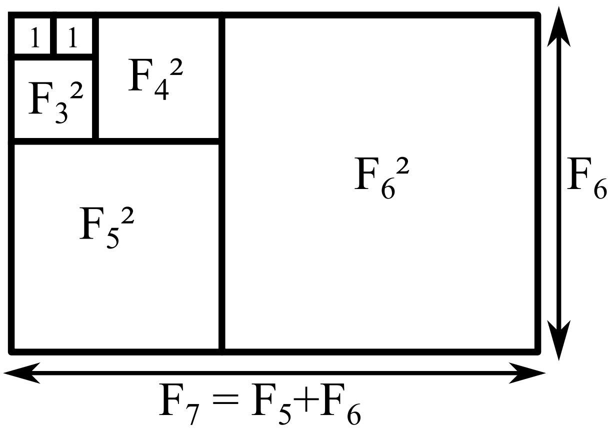


Abbildung 18: *Quadrate und Rechtecke aus Fibonacci-Zahlen*

Wie man in Abbildung 12 erkennen kann, bilden die Quadrate der Fibonacci-Zahlen F_1 bis F_6 ein Rechteck mit den Seitenlängen F_6 und $F_5 + F_6 = F_7$. Somit entspricht die Fläche des Rechtecks

$${F_1}^2 + ... + {F_6}^2 = F_6 \cdot F_7.$$

Allgemein gilt für $n \geq 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} {F_i}^2 = F_n \cdot F_{n+1}.$$

[3] auch Fibonacci genannt

[4] ursprünglich ohne $F_0 = 0$

[5] die Formel von Moivre-Binet liefert eine explizite Darstellung (siehe Abschnitte 3.3 und 3.4)

Begründung durch „Teleskopverfahren“:

$$
\begin{aligned}
{F_1}^2 &= \underline{F_1 \cdot F_2} \qquad \text{(Anfangswerte)}\\
{F_2}^2 &= F_2 \cdot (F_3 - F_1) = \underline{\underline{F_2 \cdot F_3}} - \underline{F_2 \cdot F_1}\\
{F_3}^2 &= F_3 \cdot (F_4 - F_2) = F_3 \cdot F_4 - \underline{\underline{F_3 \cdot F_2}}\\
&\ldots\\
{F_n}^2 &= F_n \cdot (F_{n+1} - F_{n-1}) = F_n \cdot F_{n+1} - F_n \cdot F_{n-1}
\end{aligned}
$$

Durch Aufsummieren der Gleichungen erhält man die Behauptung.

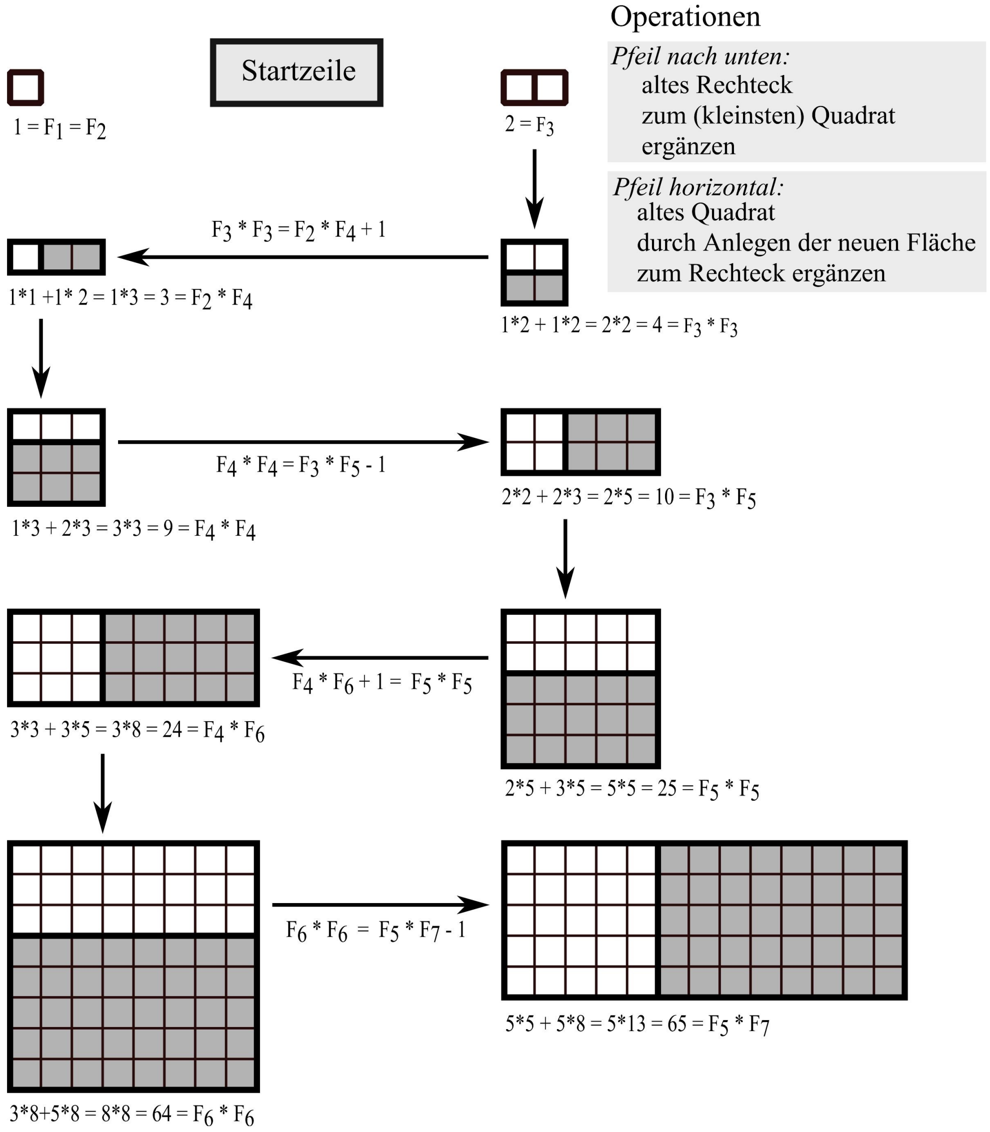


Abbildung 19: *Zusammenhänge zwischen benachbarten Fibonacci-Zahlen*

Wie in Abbildung 13 zu erkennen ist, gilt folgender Zusammenhang:

$$
{F_n}^2 = F_{n-1} \cdot F_{n+1} + (-1)^{n+1} \quad (\text{für alle } n \in \mathbb{N}, n \geq 1)
$$

Beweis durch Vollständige Induktion:

IA: $n = 1$: $\quad {F_1}^2 = 1^2 = 1 = 0 \cdot 1 + 1 = F_0 \cdot F_2 + (-1)^2$

IS: Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig aber fest und es gelte ${F_n}^2 = F_{n-1} \cdot F_{n+1} + (-1)^{n+1}$. z.z. ${F_{n+1}}^2 = F_n \cdot F_{n+2} + (-1)^{n+2}$

$$\begin{aligned}
{F_{n+1}}^2 &= F_{n+1} \cdot (F_n + F_{n-1}) \qquad \textit{(Def. Fibonacci-Zahl)} \\
&= F_{n+1} \cdot F_n + F_{n+1} \cdot F_{n-1} + \underbrace{(-1)^{n+1} + (-1)^{n+2}}_{=\,0} \\
&\overset{(IV)}{=} F_{n+1} \cdot F_n + {F_n}^2 + (-1)^{n+2} \\
&= (F_{n+1} + F_n) \cdot F_n + (-1)^{n+2} \\
&= F_{n+2} \cdot F_n + (-1)^{n+2} \qquad \textit{(Def. Fibonacci-Zahl)} \qquad \Box
\end{aligned}$$

3.3. Explizite Darstellung

Wir wollen an dieser Stelle neben der rekursiven Definition, eine explizite Darstellung der *Fibonacci-Folge* angeben. Diese zu finden, hat sich als schwierig erwiesen, obwohl das rekursive Bildungsgesetz vergleichsweise einfach ist: Erst im 18. Jahrhundert (500 Jahre nach der Vorstellung der Zahlenfolge durch Fibonacci) erzielten berühmte Mathematiker wie de Moivre und Euler Fortschritte, die letztendlich zur expliziten Darstellung führten. Diese wurde 1718 von Abraham de Moivre und 1843 von Jacques Philippe Marie Binet unabhängig voneinander gefunden und nach ihnen benannt.

Abbildung 20: *v. l. n. r.:* de Moivre, Euler *und* Binet[6]

3.4. Die Formel von Moivre-Binet

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)$$

Herleitung der Formel: Wegen

$$F_k = F_{k-1} + F_{k-2} \Leftrightarrow F_k - F_{k-1} - F_{k-2} = 0$$

lässt sich diese Darstellung als Spezialfall der linearen Differenzengleichung 2. Ordnung[7]

$$y_k + a_1 \cdot y_{k-1} + a_2 \cdot y_{k-2} = 0$$

mit $y_k = F_k$ und $a_1 = a_2 = -1$ deuten. Wir wollen nun diese Differenzengleichung 2. Ordnung in Differenzengleichungen 1. Ordnung[8] zerlegen, da deren Lösungen einfach zu ermitteln sind:

$$y_k + a_1 \cdot y_{k-1} = 0 \Leftrightarrow y_k = (-a_1) \cdot y_{k-1} \Rightarrow y_k = (-a_1)^k \cdot y_0 \quad (y_0 \text{ ist Konstante})$$

[6] linkes Bild: de Moivre (public domain), https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Abraham_de_moivre.jpg; mittleres Bild: Euler (public domain), https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Leonhard_Euler.jpeg; rechtes Bild: Binet (Creative Commons Attribution-ShareAlike License), https://commons.wikimedia.org/wiki/Jacques_Philippe_Marie_Binet

[7] allgemein nennt man jede Gleichung dieser Form mit $a_2 \neq 0$ eine lineare Differenzengleichung 2. Ordnung

[8] der Form $y_k + a_1 \cdot y_{k-1} = 0$ mit $a_1 \neq 0$

Dazu führen wir zwei sich gegenseitig aufhebende Terme ein:

$$\begin{aligned} & y_k + a_1 \cdot y_{k-1} + \underbrace{m \cdot y_{k-1} - m \cdot y_{k-1}}_{=0} + a_2 \cdot y_{k-2} \\ = & \underbrace{y_k + (a_1 + m) \cdot y_{k-1}}_{(1)} + \underbrace{(-m \cdot y_{k-1} + a_2 \cdot y_{k-2})}_{(2)} = 0. \end{aligned}$$

Wir versuchen nun eine gemeinsame Lösung zu finden, indem wir die Koeffizienten und damit die Gleichungen gleichsetzen. Da

$$\begin{aligned} &(1) \quad y_k + (a_1 + m) \cdot y_{k-1} = 0 && \Leftrightarrow y_k = -(a_1 + m) \cdot y_{k-1} \\ &(2) \quad -m \cdot y_k + a_2 \cdot y_{k-1} = 0 && \Leftrightarrow y_k = \frac{a_2}{m} \cdot y_{k-1} \end{aligned}$$

gilt, muss somit

$$-(a_1 + m) = \frac{a_2}{m} \Leftrightarrow m^2 + a_1 \cdot m + a_2 = 0 \qquad (\textit{charakteristische Gleichung})$$

sein.
Seien m_1 und m_2 die Lösungen der *charakteristischen Gleichung*, dann sind

$$\begin{aligned} & y_k = (-(a_1 + m_1))^k \cdot \tilde{h} && y_k = \left(\frac{a_2}{m_1}\right)^k \cdot c_1 \\ & y_k = (-(a_1 + m_2))^k \cdot \xi && y_k = \left(\frac{a_2}{m_2}\right)^k \cdot c_2 \end{aligned}$$

Lösungen von (1) und (2) (mit beliebigen Konstanten $\tilde{h}, \xi, c_1, c_2$).
Von den vier Lösungen fallen wegen $-(a_1 + m) = \frac{a_2}{m}$ jeweils die zwei in einer Zeile zusammen und mithilfe der Wurzelsätze von Vieta ($a_1 = -(m_1 + m_2)$) kann man die verbleibenden Lösungen vereinfachen zu

$$y_k = {m_2}^k \cdot \tilde{h} \quad \text{und} \quad y_k = {m_1}^k \cdot \xi.$$

Da die Summe zweier Lösungsfolgen einer linearen Differenzengleichung wiederum eine Lösung ist, ist

$$y_k = {m_2}^k \cdot \tilde{h} + {m_1}^k \cdot \xi$$

somit auch eine Lösung der ursprünglichen Gleichung.
Da $a_1 = a_2 = -1$ gilt, kann man die *charakteristische Gleichung* nach m auflösen und erhält

$$m_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \text{und} \quad m_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Die Lösung der ursprünglichen Gleichung

$$y_k = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^k \cdot \xi + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^k \cdot \tilde{h}$$

muss also nur noch nach den Konstanten ξ und $\tilde{h}$ umgeformt werden, indem man Werte für k einsetzt:

$$\begin{aligned} y_0 &= \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^0 \cdot \xi + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^0 \cdot \tilde{h} = 0 \quad \Rightarrow \tilde{h} = -\xi \\ y_1 &= \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^1 \cdot \xi + \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^1 \cdot \tilde{h} = 1 \\ \Rightarrow \xi &= \frac{1}{\sqrt{5}} \quad \text{und} \quad \tilde{h} = -\frac{1}{\sqrt{5}}. \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Lösungsfolge ergibt sich die Formel von Moivre-Binet:

$$y_k = F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^k - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^k \right)$$