

Die Galileischen Monde als Uhr

Teilnehmer:

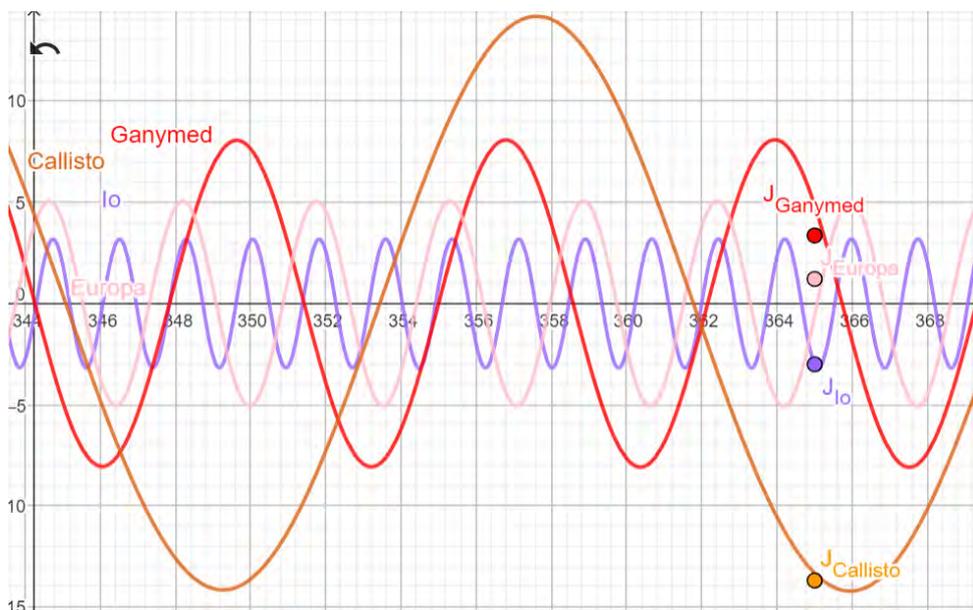
1 Teilnehmer des	Andreas-Gymnasiums
2 Teilnehmende des	Heinrich-Hertz-Gymnasiums
3 Teilnehmende des	Herder-Gymnasiums
1 Teilnehmer des	Immanuel-Kant-Gymnasiums
1 Teilnehmer des	Käthe-Kollwitz-Gymnasiums

mit tatkräftiger Unterstützung durch:

Sarah Wronka Humboldt-Universität zu Berlin

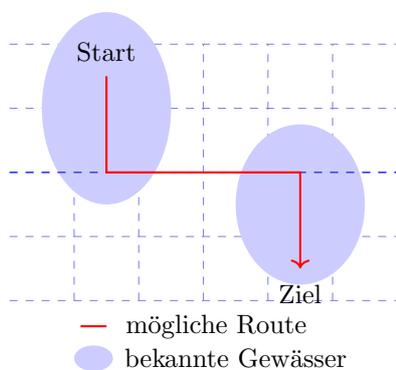
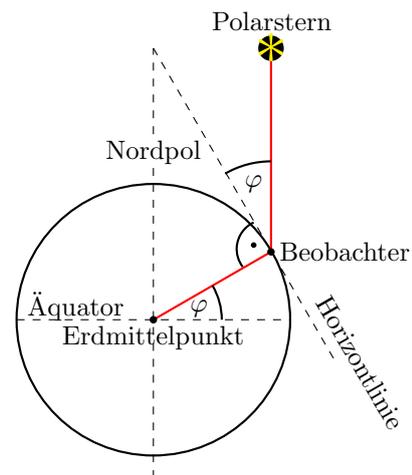
Gruppenleiter:

Luise Fehlinger Humboldt-Universität zu Berlin
 Andreas Thiel Andreas-Gymnasium, Humboldt-Universität zu Berlin



1. Einleitung

In der Geschichte der Navigation war die genaue Bestimmung der Position auf See eine riesige Herausforderung, insbesondere bei der Überquerung großer Ozeane. Das allgemeine Ziel bestand darin, präzise Navigationsmethoden zu entwickeln, um sicher und effizient von einem Punkt zum anderen zu gelangen, ohne ausschließlich auf bekannte Gewässer angewiesen zu sein. Die Ermittlung der Breitengrade war relativ früh möglich, indem man die Höhe des Polarsterns über dem Horizont maß. Der gemessene Winkel φ zwischen dem eigenen Horizont und dem Nordpolarstern ist auch der Zentriwinkel zwischen dem Berührradius zur eigenen Position und dem Äquator. Dieser entspricht wiederum dem Breitengrad, auf dem man sich befindet.



Jedoch stellte die Bestimmung des Längengrades ein bedeutendes Problem dar. Ohne genaue Längengradmessungen konnten Schiffe nur entlang bekannter Gewässer und Breitengrade navigieren, was sehr umständlich und zeitaufwendig war. Das Problem war so gravierend, dass große Seemächte, wie England, im 17. Jahrhundert hohe Preise für die Lösung dieses Problems aussetzten. Diese Herausforderung, die als „Längengradproblem“ bekannt wurde, verlangte nach einer Methode, die eine genaue Bestimmung des Längengrades auf See ermöglichte.

Eine der ersten Ideen war, die Zeit des Heimatortes (zum Beispiel die Greenwich-Zeit) an Bord eines Schiffes mitzunehmen. Durch den Vergleich dieser mit der lokalen Zeit, bei der 12 Uhr als Zeitpunkt des höchsten Sonnenstandes festgelegt ist, war es theoretisch möglich, den Längengrad zu berechnen. Ein Unterschied von einer Stunde entsprach einem Unterschied von 15 Längengraden. Doch in der Praxis erwies sich diese Methode als problematisch. Mechanische Uhren waren anfällig für die rauen Bedingungen auf See, wie Seegang und Temperaturschwankungen, die die Genauigkeit der Zeitmessung beeinträchtigten.

Hier kommen die bahnbrechenden Entdeckungen von Galileo Galilei ins Spiel. Galilei entdeckte im Jahr 1610 die vier größten Monde des Jupiters – Io, Europa, Ganymed und Callisto. Er stellte fest, dass die regelmäßigen Bewegungen dieser Monde wie eine Art natürliche Uhr genutzt werden könnten. Indem man die Positionen der Jupitermonde beobachtete und mit Tabellen verglich, die ihre Positionen zu bestimmten Zeiten beschrieben, konnte man eine zuverlässige Zeitbestimmung durchführen. Diese Methode bot eine vielversprechende Möglichkeit, die Greenwich-Zeit auch ohne präzise mechanische Uhren an Bord zu haben und somit den Längengrad zu bestimmen.

2. Ein erstes Modell

2.1. Galileis Idee

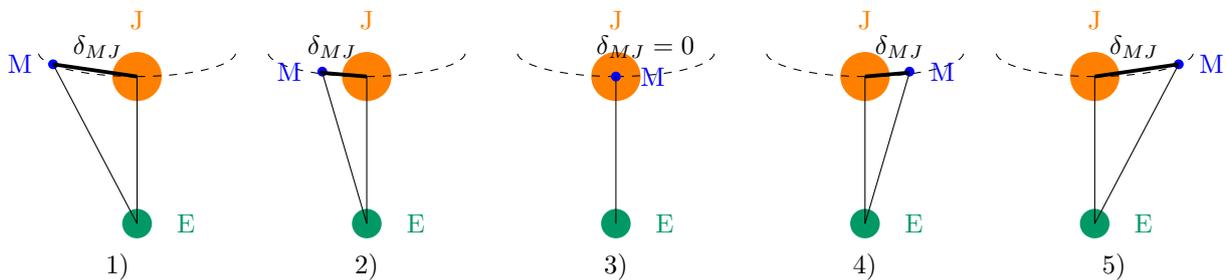
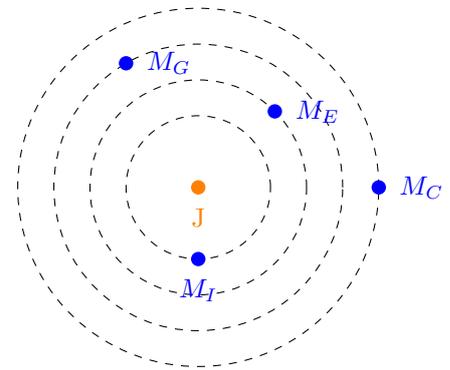
Galileis Ansatz funktioniert, da von allen (dem Jupiter zugewandten) Orten auf der Erde die Beobachtung der Position der vier Monde in Bezug auf Jupiter gleich ist. (Bei unterschiedlichen Breitengraden ändert sich nur der Winkel zum Horizont.) Dem liegt die Tatsache zugrunde, dass Jupiter und seine Monde sehr

weit entfernt von der Erde sind. Wenn man also weiß, bei welcher Position der Monde eine bestimmte Uhrzeit am Nullmeridian ist, kann man durch Beobachtung des Nachthimmels die Greenwich-Zeit bestimmen. Um das zu schaffen, braucht man ein Modell, das die Bewegungen der Jupitermonde um den Jupiter beschreibt.

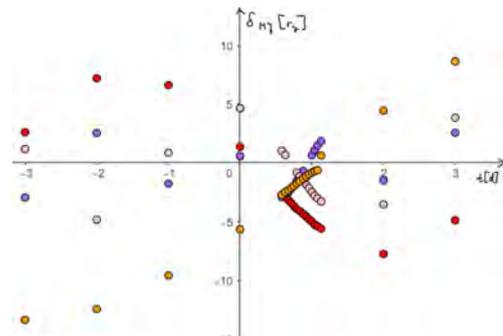
2.2. Die Modellierung mit Sinuskurven

Da sich Callisto, Europa, Ganymed und Io vereinfacht auf kreisförmigen Bahnen um Jupiter bewegen, lassen sich ihre jeweiligen Bewegungen von der Erde aus betrachtet als Sinuskurven darstellen.

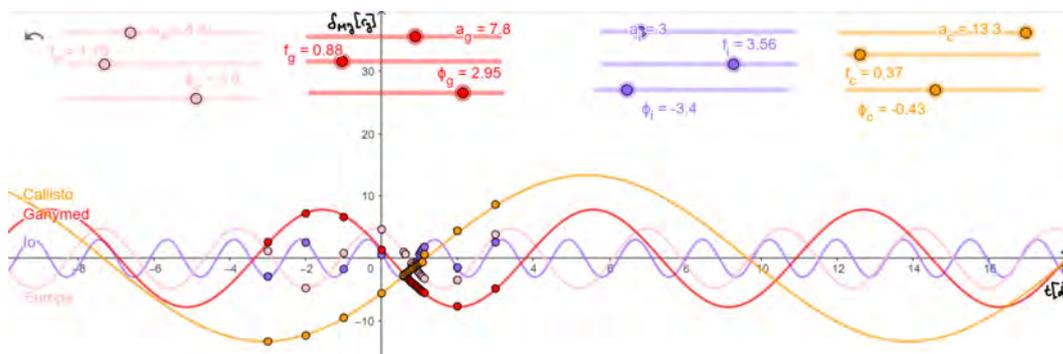
Obwohl der Radius der Kreisbahnen konstant bleibt, verändert sich der von der Erde aus beobachtete Abstand der Monde zum Jupiter. Das lässt sich an folgenden Abbildungen veranschaulichen. Dabei steht δ_{MJ} für den von der Erde aus beobachteten Abstand von Mond zu Jupiter.



Um die den Monden zugehörigen Funktionen zu ermitteln, haben wir auf der Webseite „Stellarium“ den Abstand der vier Monde zum Jupiter im Verlauf einiger Tage gemessen und in GeoGebra eingetragen. Die x-Achse markiert die Zeit in Tagen. Dabei ist der Nullpunkt der 03.06.2024. Die y-Achse stellt den Abstand des Mondes zum Jupiter in Relation zum Jupiterradius dar. War ein Mond links vom Jupiter, war der Abstand negativ, war der Mond rechts vom Jupiter, war der Abstand positiv. Dabei entstand das nebenstehende Bild.



Nun war das Ziel, für die Messwerte passende Sinusfunktionen zu finden. Um das zu tun, haben wir Schieberegler verwendet und davon abhängige Sinusfunktionen $M(x) = a \cdot \sin(f \cdot x + \phi)$ damit so eingestellt, dass alle Punkte auf vier dieser Kurven liegen. Die entstandenen Kurven sind im folgenden Bild dargestellt.



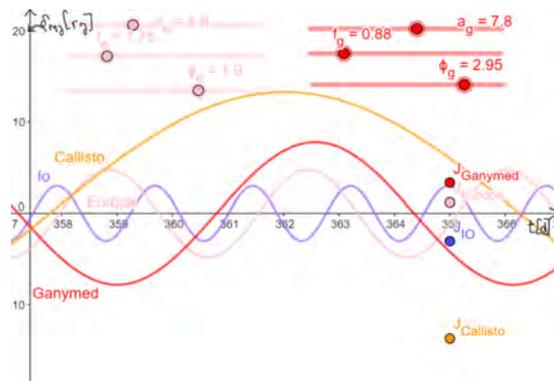
Die zu den Kurven gehörigen Funktionsgleichungen lauten

$$\begin{aligned}
 M_G(x) &= 7,8 \cdot \sin(0,88x + 2,95), & M_C(x) &= 13,3 \cdot \sin(0,37x - 0,43), \\
 M_I(x) &= 3 \cdot \sin(2,56x - 3,4) & \text{und} & M_E(x) &= 4,8 \cdot \sin(1,75x + 1,9).
 \end{aligned}$$

Auf den ersten Blick sieht es nun aus, als hätten wir ein gutes Modell für die Bewegungen der Monde gefunden. Mithilfe der von der Erde aus gemessenen Abstände der Monde zu Jupiter kann man die Greenwich-Zeit bestimmen. Besonders hilfreich ist hierbei die Tatsache, dass man mehrere Jupitermonde zum Beobachten hat. Einerseits funktioniert diese Art der Bestimmung des Längengrads auch, wenn sich ein oder mehrere der Monde vor oder hinter Jupiter befinden und somit ihr Abstand zu diesem nicht von der Erde aus messbar ist. Andererseits lässt sich durch die Kombination aus drei bis vier Monden die Zeit genauer bestimmen als aus nur ein oder zwei Monden.

2.3. Ungenauigkeit

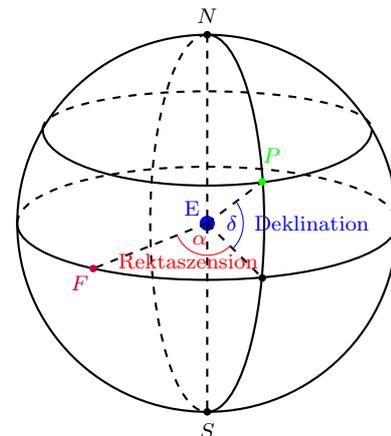
Auf den zweiten Blick lässt sich allerdings erkennen, dass das Modell nur für kurze Zeiträume funktioniert. Um das zu überprüfen, haben wir erneut in „Stellarium“ Werte gemessen – eine Woche, einen Monat, zwei Monate und ein Jahr nach unserem Nullpunkt des 03.06.2024. Schon ab einem Monat waren klare Abweichungen von unserem Modell zu erkennen. In der nebenstehenden Abbildung sieht man die starke Ungenauigkeit der Funktionen nach einem Jahr. Keiner der gemessenen Abstände liegt in der Nähe der jeweiligen Sinuskurve.

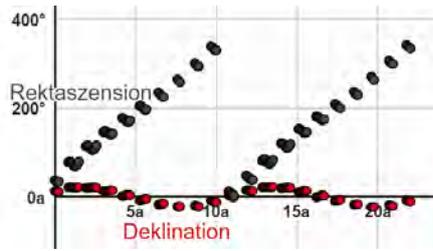


3. Bestimmung der Parameter des zweiten Modells

Eine Erklärung für die Abweichungen ist die Tatsache, dass weder die Erde noch der Jupiter fixe Punkte in unserem Universum sind, sondern dass sie sich auf angenäherten Kreisbahnen um unsere Sonne bewegen. Genau mit diesem Phänomen haben wir uns dann in dem zweiten Modell beschäftigt. Dabei ist es wichtig, weitere Parameter zu bestimmen – den Abstand von Jupiter und Sonne sowie die Umlaufzeit des Jupiters.

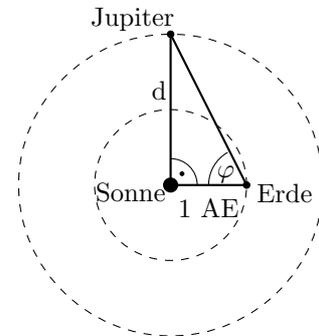
Um diese zu ermitteln, benötigen wir zunächst eine Möglichkeit, die Position von Himmelskörpern eindeutig anzugeben. Wenn wir annehmen, dass sich alle Himmelskörper auf einer großen Himmelskugel befinden, können wir mit zwei Koordinaten die Position jedes Himmelskörpers eindeutig angeben. Dazu nutzen wir die Koordinaten Deklination und Rektaszension. Die Deklination gibt den Winkel Himmelsäquator–Erdmittelpunkt–Himmelsobjekt P an und die Rektaszension gibt den Winkel zwischen Frühlingspunkt F und dem Schnittpunkt des Himmelsäquators und des Kreises durch den Nordpol, den Südpol und den Himmelskörper an. Die Deklination und die Rektaszension helfen uns dabei, die Umlaufzeit des Jupiters zu bestimmen. Nach einem Umlauf des Jupiters um die Sonne wiederholen sich nicht nur die Bahn, sondern auch die Deklination und die Rektaszension des Jupiters.



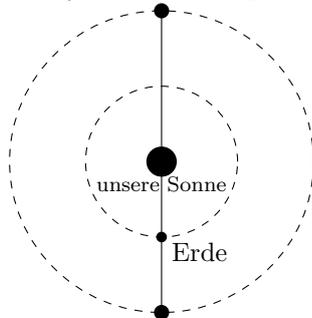


Beim Betrachten dieser Winkel über einen längeren Zeitraum erkennt man, dass die Umlaufdauer des Jupiters etwa 11,86 Jahre beträgt.

Die Entfernung von Sonne und Jupiter können wir mit Hilfe eines rechtwinkligen Dreiecks zwischen Erde, Jupiter und Sonne ermitteln. Durch bisher angenommene Mechaniken in der Umlaufbahn und Umlaufdauer der Planeten wird irgendwann der im Bild dargestellte Spezialfall eintreten. Durch die angenommene Konstanz des Abstandes Sonne–Jupiter können wir diesen Spezialfall nutzen, um in dem rechtwinkligen Dreieck mit Hilfe eines Winkels die Distanz zu berechnen, $d = \tan(\varphi) \cdot 1\text{AE}$.



Konjunktion des Jupiter

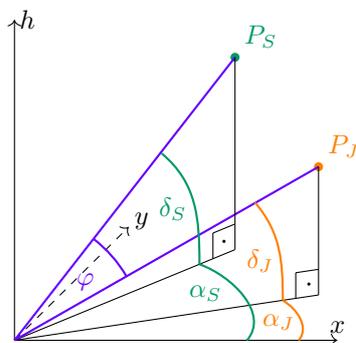


Opposition des Jupiter

Für die Bestimmung des Abstandes zwischen Sonne und Jupiter nutzen wir, dass der Spezialfall in unserem Modell genau in der Mitte zwischen den Himmelskonstellationen Konjunktion und Opposition auftritt, welche im Bild dargestellt sind.

Im Jahr 2023 fand die Konjunktion des Jupiters am 12.04.2023 und die Opposition am 02.11.2023 statt. Wir erhalten also den 22.07.2023 für die gewünschte Konstellation mit rechtem Winkel zwischen Erde–Sonne–Jupiter. Nun können wir die Deklination und Rektaszension der Sonne und des Jupiters an diesem Datum ermitteln.

	Rektaszension	Deklination
Position Jupiter	40.25°	14.45°
Position Sonne	121°	20.36°



Wir zeichnen diese Koordinaten in ein Koordinatensystem ein. Dabei ist die Erde der Koordinatenursprung. Die x–Achse zeigt in Richtung des Frühlingspunktes und die x–y–Ebene stellt die Äquatorebene dar.

Faltet man diese Darstellung mit Papier, so kann man den Winkel φ ausmessen. Der gemessene Winkel von 80° wird in die oben genannte Formel eingesetzt und demnach beträgt der Abstand Erde–Jupiter etwa 5,7AE.

Diese Messung ist aber ungenau, weshalb eine genauere Bestimmung des Winkels φ gesucht wird.

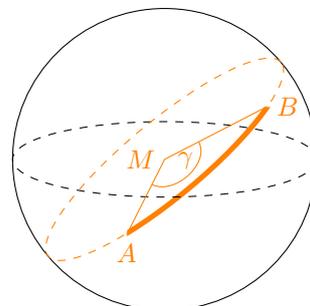
4. Sphärische Geometrie

4.1. Geraden auf Sphären

Eine Sphäre mit Radius $r > 0$ und Mittelpunkt M ist als die Menge aller Punkte definiert, die den Abstand r vom Mittelpunkt M haben. Im Folgenden betrachten wir Sphären im \mathbb{R}^3 .

Großkreise auf einer Sphäre entstehen durch einen Schnitt der Sphäre mit einer Ebene durch den Mittelpunkt. Dadurch kann man eine sphärische Strecke \widehat{AB} zu zwei Punkten $A \neq B$ der Sphäre als kleineren Abschnitt des Großkreises durch die Punkte A, B definieren. Dabei ist das Verhältnis von Bogenlänge des Kreisabschnittes und Radius gleich dem Bogenmaß des Mittelpunktswinkels und es gilt

$$\frac{l(\widehat{AB})}{r} = \gamma \text{ und mit } r = 1 \text{ erhalten wir } l(\widehat{AB}) = \gamma.$$

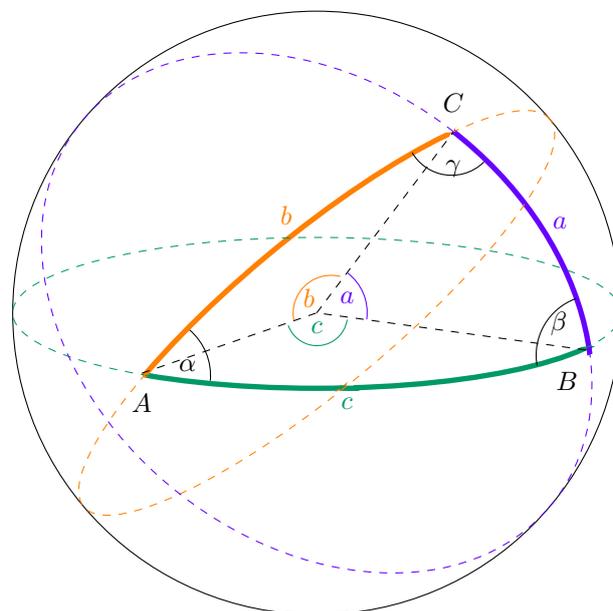


4.2. Dreiecke auf Sphären

Ein Flächenstück der Sphäre, das durch drei Großkreisebögen begrenzt wird, heißt sphärisches Dreieck. Dabei betrachten wir hier nur Dreiecke, deren Innenwinkel kleiner als π (bzw. 180°) sind, sogenannte Eulersche Dreiecke. Die Seitenlängen eines sphärischen Dreiecks stimmen mit den Mittelpunktswinkeln a, b und c überein. Die Innenwinkel des Dreiecks α, β und γ sind die Winkel zwischen den Tangenten an den Dreiecksseiten im jeweiligen Eckpunkt.

$$\begin{aligned} \alpha &= \sphericalangle(e_{ABM}, e_{ACM}) \\ \beta &= \sphericalangle(e_{BAM}, e_{BCM}) \\ \gamma &= \sphericalangle(e_{CAM}, e_{CBM}). \end{aligned}$$

Dabei ist e_{ABM} die Ebene durch die Punkte A, B, M .



Nun suchen wir einen Ausdruck für die Länge von b . Dabei betrachten wir die Tangentialebene E_B an die Sphäre im Punkt B . Außerdem definieren wir zwei neue Punkte A' und C' als die Schnittpunkte der Strahlen \underline{MA} bzw. \underline{MC} mit der Tangentialebene, $\{A'\} := \underline{MA} \cap E_B$ und $\{C'\} := \underline{MC} \cap E_B$.

Es entsteht ein euklidisches Dreieck $\triangle A'BC'$.

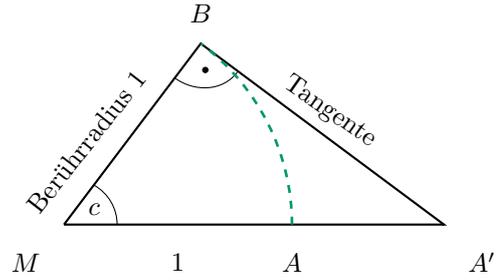
Falls der Winkel a bzw. c ein stumpfer Winkel ist, dann existieren A' bzw. C' nicht, da die Tangentialebene E_B von dem Strahl \underline{MA} bzw. \underline{MC} nicht geschnitten wird. In diesem Fall benutzen wir die Punkte $\{A''\} := \underline{AM} \cap E_B$ bzw. $\{C''\} := \underline{CM} \cap E_B$. Diese Punkte liegen in der Tangentialebene E_B auf der anderen Seite von B . Man benutzt dann $\pi - a$ bzw. $\pi - c$ für die weiteren Umformungen.

5. Der Seitenkosinussatz

Wir betrachten das Dreieck $\triangle MA'B$. Da dies ein rechtwinkliges Dreieck mit rechtem Winkel in B ist, gilt

$$\cos(c) = \frac{1}{\frac{|MA'|}{|A'B|}}$$

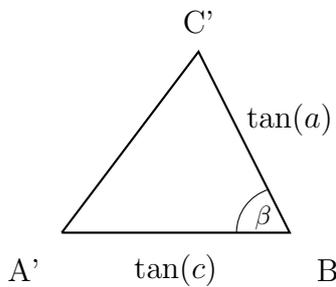
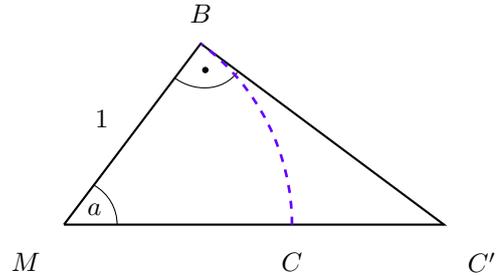
und $\tan(c) = \frac{1}{1}$.



In der Ebene e_{MBC} liegt das Dreieck $\triangle MBC'$. Dieses Dreieck ist ebenfalls rechtwinklig, da $\overline{BC'}$ in der Tangentialebene E_B liegt und es gilt

$$\cos(a) = \frac{1}{\frac{|MC'|}{|BC'|}}$$

und $\tan(c) = \frac{1}{1}$.

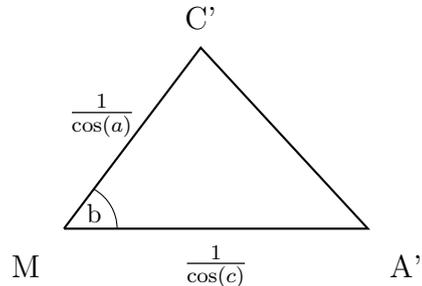


In der Tangentialebene E_B gilt aufgrund des Kosinussatzes

$$|\overline{A'C'}|^2 = \tan^2(a) + \tan^2(c) - 2 \cdot \tan(a) \cdot \tan(c) \cdot \cos(\beta).$$

Das nächste Hilfsdreieck liegt in der Ebene $e_{A'C'M}$ und wir benutzen wieder den Kosinussatz

$$|\overline{A'C'}|^2 = \frac{1}{\cos^2(a)} + \frac{1}{\cos^2(c)} - 2 \cdot \frac{\cos(b)}{\cos(a) \cdot \cos(c)}.$$



Wir setzen die beiden letzten Gleichungen gleich. Für die Umformungen benutzen wir den trigonometrischen Pythagoras $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ und die Identität für den Tangens $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos^2(a)} + \frac{1}{\cos^2(c)} - 2 \cdot \frac{\cos(b)}{\cos(a) \cdot \cos(c)} &= \tan^2(a) + \tan^2(c) - 2 \cdot \tan(a) \cdot \tan(c) \cdot \cos(\beta) \\ \Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{\cos^2(a)} - \tan^2(a)}_{=1} + \underbrace{\frac{1}{\cos^2(c)} - \tan^2(c)}_{=1} &= 2 \cdot \frac{\cos(b)}{\cos(a) \cdot \cos(c)} - 2 \cdot \tan(a) \cdot \tan(c) \cdot \cos(\beta) \\ \Leftrightarrow 1 &= \frac{\cos(b)}{\cos(a) \cdot \cos(c)} - \tan(a) \cdot \tan(c) \cdot \cos(\beta) \\ \Leftrightarrow \cos(a) \cdot \cos(c) &= \cos(b) - \sin(a) \cdot \sin(c) \cdot \cos(\beta) \\ \Leftrightarrow \cos(b) &= \cos(a) \cdot \cos(c) + \sin(a) \cdot \sin(c) \cdot \cos(\beta) \end{aligned}$$

Analog erhalten wir aus Symmetriegründen

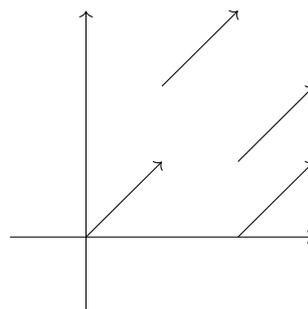
$$\begin{aligned} \cos(a) &= \cos(b) \cdot \cos(c) + \sin(b) \cdot \sin(c) \cdot \cos(\alpha) \\ \text{und } \cos(c) &= \cos(a) \cdot \cos(b) + \sin(a) \cdot \sin(b) \cdot \cos(\gamma). \end{aligned}$$

Diese drei Gleichungen sind der Seiten-Kosinussatz für sphärische Dreiecke mit Standardbezeichnung. Wir berechnen den Abstand von Sonne und Jupiter genauer mit rund 5,2AE.

6. Ein kurzer Abstecher in die Vektorrechnung

6.1. Definition und Beispiele

Ein Vektor ist eine Größe, die sowohl einen Betrag als auch eine Richtung hat. Beispiele für Vektoren im wirklichen Leben sind Verschiebung, Geschwindigkeit und Kraft. Im Gegensatz zu Skalaren, die nur den Betrag haben (wie Temperatur oder Masse), geben Vektoren mehr Informationen, indem sie die Richtung angeben. Vektoren werden oft grafisch als Pfeile dargestellt. Die Länge des Pfeils repräsentiert den Betrag, während die Richtung des Pfeils die Richtung des Vektors zeigt.

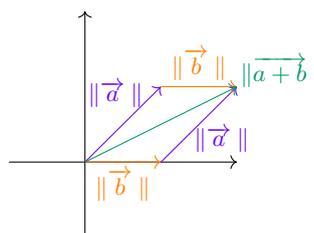


Vektoren stellen wir wie folgt dar: $\vec{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = (e_1 \ e_2)^T$. Für unsere Zwecke benötigen wir zwei Vektoroperationen, die Vektoraddition und das Skalarprodukt.

6.2. Vektoraddition

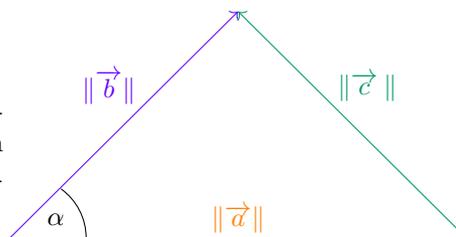
Bei der Vektoraddition werden die Komponenten einzeln addiert. Dies können wir sowohl symbolisch als auch graphisch darstellen.

$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$$



6.3. Das Skalarprodukt

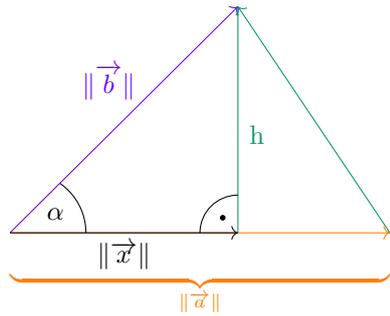
Um den Winkel zwischen zwei Vektoren \vec{a} und \vec{b} zu berechnen, betrachten wir ein beliebiges Dreieck mit den Seitenlängen $\|\vec{a}\|$, $\|\vec{b}\|$ und $\|\vec{c}\|$. Nun können wir den Kosinussatz zur Berechnung des Winkels $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$ verwenden. Wir erhalten



$$\begin{aligned} \|\vec{b} - \vec{a}\|^2 = \|\vec{c}\|^2 &= \|\vec{a}\|^2 + \|\vec{b}\|^2 - 2 \cdot \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \\ \Leftrightarrow (b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 &= a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 - 2 \cdot \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \\ \Leftrightarrow b_1 a_1 + b_2 a_2 &= \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) \\ \Leftrightarrow \cos \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) &= \frac{b_1 a_1 + b_2 a_2}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}. \end{aligned}$$

Genau diesen Zähler definieren wir als das Skalarprodukt der Vektoren \vec{a} und \vec{b} . Wir schreiben für das Skalarprodukt $a_1 b_1 + a_2 b_2 =: \langle \vec{a}, \vec{b} \rangle = \langle \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \rangle$ oder $\vec{a} \cdot \vec{b}$. Mit der obigen Gleichung sehen wir, dass das Skalarprodukt zweier Vektoren gleich dem Kosinus des eingeschlossenen Winkels multipliziert mit den Längen der beiden Vektoren ist.

Um die geometrische Bedeutung des Skalarproduktes zu veranschaulichen, betrachten wir das Teildreieck bestehend aus der Höhe h , dem Vektor \vec{b} und der Ankathete von Winkel α , Vektor \vec{x} .

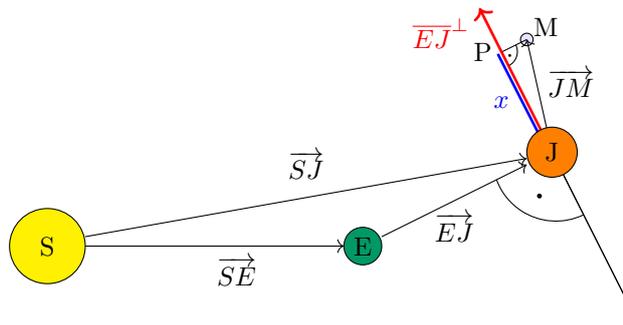
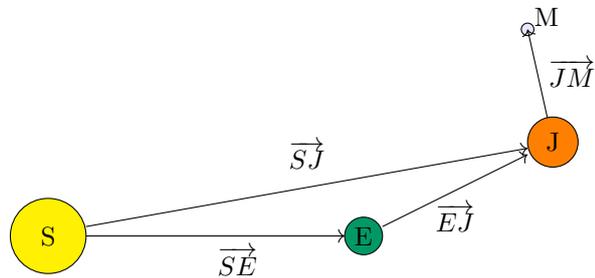


Mit $\|\vec{x}\| = \|\vec{b}\| \cdot \cos \alpha$ und $\cos \alpha = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$
 folgt $\|\vec{x}\| = \frac{\langle \vec{a}, \vec{b} \rangle}{\|\vec{a}\|}$.

Wir können das Skalarprodukt also zur Bestimmung von Projektionen entlang einer Richtung nutzen.

7. Die Formel für das verbesserte Modell

Um den senkrecht zur Beobachtungsrichtung projizierten Abstand x eines Jupitermonds zum Jupiter zu bestimmen, betrachten wir zunächst die nebenstehende Skizze. Hier können wir die Positionen von Sonne, Erde, Jupiter und einem Mond durch Vektoren beschreiben. Nun wollen wir darstellen, wie die Entfernung eines Mondes zum Jupiter von der Erde aus gesehen wird.



Blickt man von der Erde aus auf Jupiter und Mond, wird die Mondposition auf Grund der großen Entfernung näherungsweise auf die Gerade g senkrecht zur Beobachtungsrichtung \vec{EJ} projiziert. Nun können wir das rechtwinklige Dreieck Jupiter, Mond und P (Punkt, auf den die Mondposition projiziert wird) einzeichnen. Weiterhin können wir den Vektor \vec{EJ} um 90° gegen den Uhrzeigersinn auf g drehen und erhalten \vec{EJ}^\perp .

Unser Ziel ist es jetzt, den scheinbaren Abstand x des Mondes vom Jupiter in Abhängigkeit von der Zeit zu bestimmen. Um x zu ermitteln, betrachten wir das Dreieck Jupiter, Mond, P . Hier können wir x mit dem Skalarprodukt als $\frac{\langle \vec{EJ}^\perp, \vec{JM} \rangle}{\|\vec{EJ}^\perp\|}$ berechnen.

Mit Polarkoordinaten gilt $\vec{JM} = r_m \cdot (\cos \phi_m \quad \sin \phi_m)^T$, wobei ϕ_m der variable Winkel zwischen einer festgelegten Achse und \vec{JM} ist. Nun müssen wir noch \vec{EJ}^\perp bestimmen. Wir betrachten zunächst \vec{EJ} .

Es ist $\vec{EJ} = \vec{SJ} - \vec{SE}$. \vec{SJ} und \vec{SE} lassen sich wieder mit Polarkoordinaten beschreiben, d.h.

$\vec{SJ} = r_j \cdot (\cos \phi_j \quad \sin \phi_j)^T$ und $\vec{SE} = r_e \cdot (\cos \phi_e \quad \sin \phi_e)^T$, wobei ϕ_j und ϕ_e wieder Winkel zwischen \vec{SJ} bzw. \vec{SE} und der festgelegten Achse sind.

Wir setzen \vec{JM} ein, um x zu bestimmen.

$$x = \frac{\langle \vec{EJ}^\perp, \vec{JM} \rangle}{\|\vec{EJ}^\perp\|} = \frac{\langle \vec{EJ}^\perp, r_m \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi_m \\ \sin \phi_m \end{pmatrix} \rangle}{\|\vec{EJ}^\perp\|}$$

Da die Länge eines Vektors unabhängig von seiner Richtung ist, brauchen wir im Nenner das Drehen von \vec{EJ} nicht beachten.

$$x = \frac{\langle (\vec{SJ} - \vec{SE})^\perp, r_m \cdot \begin{pmatrix} \cos \phi_m \\ \sin \phi_m \end{pmatrix} \rangle}{\|\vec{SJ} - \vec{SE}\|} = \frac{\langle \begin{pmatrix} r_j \cdot \cos \phi_j - r_e \cdot \cos \phi_e \\ r_j \cdot \sin \phi_j - r_e \cdot \sin \phi_e \end{pmatrix}^\perp, \begin{pmatrix} r_m \cdot \cos \phi_m \\ r_m \cdot \sin \phi_m \end{pmatrix} \rangle}{\left\| \begin{pmatrix} r_j \cdot \cos \phi_j - r_e \cdot \cos \phi_e \\ r_j \cdot \sin \phi_j - r_e \cdot \sin \phi_e \end{pmatrix} \right\|}$$

Um \vec{EJ} nun um 90° zu drehen, tauschen wir die erste und die zweite Koordinate und wechseln anschließend das Vorzeichen der neuen ersten Koordinate.

$$\begin{aligned} x &= \frac{\langle \begin{pmatrix} -r_j \cdot \sin \phi_j + r_e \cdot \sin \phi_e \\ r_j \cdot \cos \phi_j - r_e \cdot \cos \phi_e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_m \cdot \cos \phi_m \\ r_m \cdot \sin \phi_m \end{pmatrix} \rangle}{\left\| \begin{pmatrix} r_j \cdot \cos \phi_j - r_e \cdot \cos \phi_e \\ r_j \cdot \sin \phi_j - r_e \cdot \sin \phi_e \end{pmatrix} \right\|} \\ &= \frac{(-r_j \cdot \sin \phi_j + r_e \cdot \sin \phi_e) \cdot r_m \cdot \cos \phi_m + (r_j \cdot \cos \phi_j - r_e \cdot \cos \phi_e) \cdot r_m \cdot \sin \phi_m}{\sqrt{(r_j \cdot \cos \phi_j - r_e \cdot \cos \phi_e)^2 + (r_j \cdot \sin \phi_j - r_e \cdot \sin \phi_e)^2}} \end{aligned}$$

Nun ersetzen wir die Winkel mit $\phi_{...} = \frac{2\pi}{T_{...}} + \phi'_{...}$, wobei $T_{...}$ die Umlaufzeit des jeweiligen Himmelskörpers und $\phi'_{...}$ den Startwinkel darstellen.

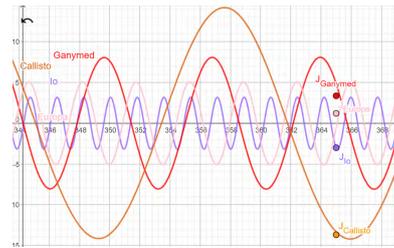
$$\begin{aligned} x &= \frac{(-r_j \cdot \sin(\frac{2\pi}{T_j} + \phi'_j) + r_e \cdot \sin(\frac{2\pi}{T_e} + \phi'_e)) \cdot r_m \cdot \cos(\frac{2\pi}{T_m} + \phi'_m)}{\sqrt{(r_j \cdot \cos(\frac{2\pi}{T_j} + \phi'_j) - r_e \cdot \cos(\frac{2\pi}{T_e} + \phi'_e))^2 + (r_j \cdot \sin(\frac{2\pi}{T_j} + \phi'_j) - r_e \cdot \sin(\frac{2\pi}{T_e} + \phi'_e))^2}} \\ &+ \frac{(r_j \cdot \cos(\frac{2\pi}{T_j} + \phi'_j) - r_e \cdot \cos(\frac{2\pi}{T_e} + \phi'_e)) \cdot r_m \cdot \sin(\frac{2\pi}{T_m} + \phi'_m)}{\sqrt{(r_j \cdot \cos(\frac{2\pi}{T_j} + \phi'_j) - r_e \cdot \cos(\frac{2\pi}{T_e} + \phi'_e))^2 + (r_j \cdot \sin(\frac{2\pi}{T_j} + \phi'_j) - r_e \cdot \sin(\frac{2\pi}{T_e} + \phi'_e))^2}} \end{aligned}$$

Nun können wir die konkreten Radien und Umlaufzeiten für Jupiter und Erde einsetzen. Da die Erde per Definition (durchschnittlich) eine astronomische Einheit von der Sonne entfernt ist, fällt r_e weg.

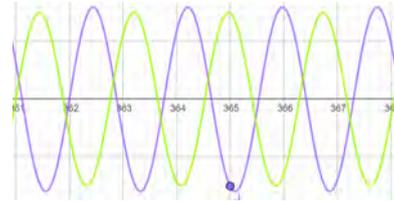
$$\begin{aligned} x &= \frac{(-5,2 \cdot \sin(\frac{2\pi}{4329} + \phi'_j) + \sin(\frac{2\pi}{365} + \phi'_e)) \cdot r_m \cdot \cos(\frac{2\pi}{T_m} + \phi'_m)}{\sqrt{(5,2 \cdot \cos(\frac{2\pi}{4329} + \phi'_j) - \cos(\frac{2\pi}{365} + \phi'_e))^2 + (5,2 \cdot \sin(\frac{2\pi}{4329} + \phi'_j) - \sin(\frac{2\pi}{365} + \phi'_e))^2}} \\ &+ \frac{(5,2 \cdot \cos(\frac{2\pi}{4329} + \phi'_j) - \cos(\frac{2\pi}{365} + \phi'_e)) \cdot r_m \cdot \sin(\frac{2\pi}{T_m} + \phi'_m)}{\sqrt{(5,2 \cdot \cos(\frac{2\pi}{4329} + \phi'_j) - \cos(\frac{2\pi}{365} + \phi'_e))^2 + (5,2 \cdot \sin(\frac{2\pi}{4329} + \phi'_j) - \sin(\frac{2\pi}{365} + \phi'_e))^2}} \end{aligned}$$

Die Startwinkel werden wieder in GeoGebra per Schieberegler angepasst, bzw. die Werte aus dem ersten Modell verwendet. Die Werte im Diagramm sind Vielfache des Jupiterradius.

Prüfen wir nun unsere Formel. Hierfür erfassen wir die Entfernungen von den Monden zum Jupiter in einem Jahr (Punkte) und vergleichen sie mit der Vorhersage unseres Modells (Graphen). Wie man sieht, funktioniert unser Modell deutlich besser und erlaubt auch nach einem Jahr noch gute Abschätzungen der Zeit.



Vergleichen wir nun noch unsere beiden Modelle, zeigt sich nach einem Jahr eine starke Diskrepanz zwischen den beiden Modellen. Das erste Modell (grün) wurde nach schon nach wenigen Wochen enorm ungenau, wohingegen das zweite Modell (blau) weiterhin ausreichend präzise Vorhersagen liefert.



8. Ausklang

Auch wenn es für unser Projekt nicht notwendig war, haben wir uns noch angesehen, was mit dem Seiten-Kosinussatz passiert, wenn die Seitenlängen des betrachteten sphärischen Dreiecks konstant bleiben, der Radius der Sphäre aber gegen unendlich geht. Hierbei müssen wir für die Mittelpunktwinkel nun die Längen der Seiten des sphärischen Dreiecks durch den Radius teilen. Der Seiten-Kosinussatz erhält also das folgende Aussehen.

$$\cos\left(\frac{a}{r}\right) = \cos\left(\frac{b}{r}\right) \cdot \cos\left(\frac{c}{r}\right) + \sin\left(\frac{b}{r}\right) \cdot \sin\left(\frac{c}{r}\right) \cdot \cos(\alpha)$$

Wir nutzen die Approximation für Sinus und Kosinus durch Taylor-Polynome. Dabei notieren wir nur maximal quadratische Potenzen, da höhere Potenzen im Grenzwert gegen Null gehen werden.

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{a}{r}\right)^2 + \dots &= \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{r}\right)^2 + \dots\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\left(\frac{c}{r}\right)^2 + \dots\right) + \left(\frac{b}{r} + \dots\right) \cdot \left(\frac{c}{r} + \dots\right) \cdot \cos(\alpha) \\ \stackrel{|\cdot(-2)|}{\iff} \left(\frac{a}{r}\right)^2 + \dots &= \left(\frac{b}{r}\right)^2 + \left(\frac{c}{r}\right)^2 + \dots - 2\frac{bc}{r^2} \cdot \cos(\alpha) + \dots \\ \stackrel{|\cdot r^2|}{\iff} a^2 + \dots &= b^2 + c^2 + \dots - 2bc \cdot \cos(\alpha) + \dots \\ \stackrel{r \rightarrow \infty}{\implies} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos(\alpha) \end{aligned}$$

Dies ist der Euklidische Kosinussatz.