

Hyperbolische Geometrie

Teilnehmer:

Heinrich-Hertz-Gymnasium
Herder-Gymnasium

1 Mädchen, 4 Jungen
1 Mädchen, 3 Jungen

mit tatkräftiger Unterstützung durch:
Luise Fehlinger

Humboldt-Universität zu Berlin

Gruppenleiter:
Klaus Mohnke

Humboldt-Universität zu Berlin



1. Motivation

In seinem *Elemente* formulierte Euklid bereits im 3. Jh. v. Chr. das erste Axiomensystem der Geometrie. Seit damals wurden diese Axiome überarbeitet und für die moderne Mathematik angepasst.

Heutzutage werden die von David Hilbert formulierten Axiome verwendet um die euklidische Geometrie zu beschreiben. Diese Axiome lassen sich in fünf Gruppen kategorisieren.

I Axiome der Inzidenz

II Axiome der Anordnung

III Axiome der Kongruenz

IV Axiom der Parallele

V Axiome der Stetigkeit

Bei diesen fünf Gruppen sticht die vierte besonders hervor, da sie nur ein Axiom enthält, das *Parallelenaxiom*. Dieses Axiom ermöglicht zum Beispiel den Beweis, dass die Innenwinkelsumme eines Dreiecks immer π ist.

Für eine lange Zeit waren Mathematiker der Meinung, dieses Axiom sei redundant und haben vergeblich versucht, es auf die anderen Axiome zurückzuführen. Der Höhepunkt dieser Diskussion wurde erreicht, als Carl Friedrich Gauß hat im Zuge der Hannoverschen Gradmessung die Innenwinkel eines riesigen Dreiecks vermessen hat, um festzustellen, ob die Summe überhaupt π ergibt.

Die Geometrie in der genau dieses Axiom nicht mehr gilt, ist die hyperbolische Geometrie, deren Eigenschaften wir im folgendem genauer untersuchen wollen.

2. Modelle der Hyperbolischen Geometrie



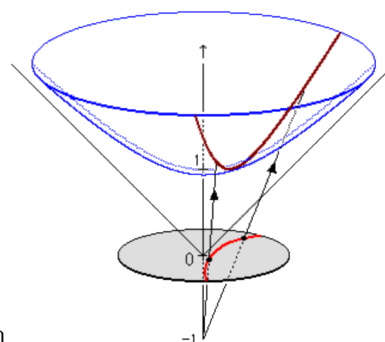
Ein Modell einer Geometrie, in der das Parallelenaxiom nicht gilt, wäre eine hyperbolische Salatschüssel. Auf der Salatschüssel sind Geraden eingezeichnet, welche Schnitte von Ebenen durch den Ursprung mit der Schüssel sind. Dabei schneiden alle lilafarbenen Geraden die gelbe Gerade nicht und gehen durch einen Punkt, weshalb das Parallelenaxiom nicht gilt.

Jedoch ist die Geometrie auf einer Salatschüssel äußerst kompliziert und unhandlich, weshalb das Modell auf die sogenannte Poincaré-Scheibe übertragen wird.

Die „Unendlichkeit“ des Hyperboloids wird dabei auf den Rand der Kreisscheibe abgebildet und die Geraden auf dem Hyperboloid entsprechen Kreisbögen, welche senkrecht auf dem Umfang des Kreises stehen, und Durchmesser.

Um jedoch die hyperbolische Geometrie analytisch zu betrachten, ist es hilfreich, ein Modell in der Ebene zu betrachten. Um solch ein Modell zu erhalten, wird die Poincaré-Scheibe durch Inversion am Kreis in die Poincaré-Halbebene $\mathbb{H}$ überführt.

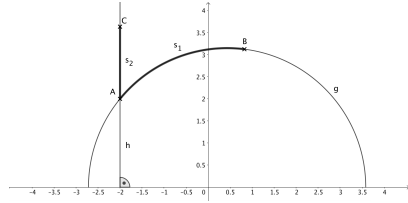
$$\mathbb{H} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\} \text{ bzw. } \mathbb{H} := \{z = a+ib \in \mathbb{C} \mid b > 0\}$$



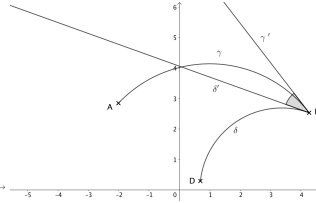
2.1. Geometrische Objekte in der hyperbolischen Geometrie

Obwohl die Halbebene an die euklidische Ebene erinnert, sind geometrische Objekte anders definiert.

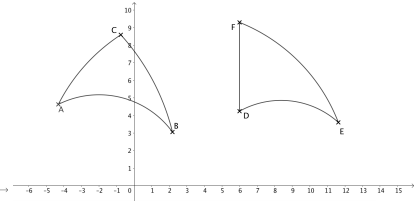
Geraden und Strecken



Winkel



Dreiecke



Geraden sind Kreisbögen durch zwei Punkte mit Mittelpunkt auf der x-Achse. Dabei gehören die Punkte auf der x-Achse nicht zur Geraden dazu, da sie nicht Teil von $\mathbb{H}$ sind. Haben zwei Punkte die gleiche x-Koordinate, ist die Senkrechte zur x-Achse durch die beiden Punkte die Gerade. Strecken sind als Abschnitte auf den Geraden definiert.

Der Winkel zwischen zwei Kurven γ und δ in einem Schnittpunkt B wird definiert als der Schnittwinkel der Tangenten beider Kurven an diesem Punkt.

Ein Dreieck wird wie im euklidischen Raum durch drei Punkte definiert, die paarweise durch Strecken verbunden sind. Es handelt sich in $\mathbb{H}$ nur um hyperbolische Strecken, nicht um euklidische.

3. Längenmessung in der Poincaré-Halbebene

Im Gegensatz zur euklidischen Geometrie, in der die Länge l einer differenzierbaren Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ mit

$$l(\gamma) := \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

beschrieben wird, definiert man in der Poincaré-Halbebene die Länge einer Kurve $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$ mit folgender Formel:

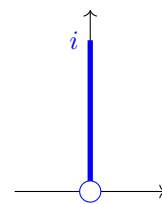
$$\ell(\gamma) := \int_a^b \frac{1}{y(t)} \|\gamma'(t)\| dt = \int_a^b \frac{1}{y(t)} \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

Somit hängt die hyperbolische Länge einer Kurve von ihrer euklidischen Position in der Halbebene ab. Je näher sie sich an der reellen Achse befindet, desto größer wird ihre hyperbolische Länge im Vergleich zur euklidischen Länge. Dies illustriert auch folgendes Beispiel:

Wir betrachten die Halbgerade $\gamma : (0, 1] \rightarrow \mathbb{H}$, parametrisiert durch $\gamma(t) = i \cdot t$.

Deren Länge lässt sich berechnen durch

$$\begin{aligned} \ell(\gamma) &= \int_0^1 \frac{1}{y(t)} \cdot \|\gamma'(t)\| dt = \int_0^1 \frac{1}{\operatorname{Im}(\gamma(t))} \cdot |i| dt \\ &= \int_0^1 \frac{1}{t} dt = \lim_{t \rightarrow 0^+} (\ln(1) - \ln(t)) = \infty \end{aligned}$$



Die Halbgerade ist also unendlich lang.

Aus der euklidischen Geometrie ist bekannt, dass Strecken die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten darstellen. Dies wollen wir auch für die Poincaré-Halbebene zeigen.

Satz 1. Die kürzeste hyperbolische Verbindung zwischen zwei Punkten $P, Q \in \mathbb{H}$ wird durch einen euklidischen Kreisbogen realisiert.

Beweis: Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$ eine differenzierbare Kurve von P nach Q , parametrisiert mithilfe von Polarkoordinaten: $\gamma(t) = r(t) \cdot (\cos(\varphi(t)), \sin(\varphi(t)))$. Zudem sei $r(a) = r(b) =: r$. Dann ist die Länge ℓ von γ gegeben durch:

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \frac{1}{r(t) \sin(\varphi(t))} \cdot \sqrt{(r'(t))^2 + (r(t))^2 (\varphi'(t))^2} dt.$$

Da wir uns in der oberen Halbebene befinden, gilt $\sin(\varphi(t)) \neq 0$. Dies nutzen wir zum Abschätzen der Länge.

$$\begin{aligned} \ell(\gamma) &\stackrel{r>0}{\geq} \int_a^b \frac{1}{r(t) \sin(\varphi(t))} \cdot r(t) |\varphi'(t)| dt \\ &\geq \int_a^b \frac{1}{\sin(\varphi(t))} \cdot \varphi'(t) dt \\ &\stackrel{\text{subst.}}{=} \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \frac{1}{\sin \varphi} d\varphi \end{aligned}$$

Es gilt also noch zu zeigen, dass der letzte Term dem euklidischen Kreisbogen entspricht.

Die hyperbolische Länge eines euklidischen Kreisbogens δ lässt sich beschreiben durch:

$$\begin{aligned} \ell(\delta) &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \frac{1}{r \sin \varphi} \cdot \sqrt{r^2 \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \varphi} d\varphi \\ &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \frac{1}{r \sin \varphi} \cdot r d\varphi \\ &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \frac{1}{\sin \varphi} d\varphi. \end{aligned}$$

Insgesamt folgt $\ell(\gamma) \geq \ell(\delta)$.

Also ist der euklidische Kreisbogen die kürzeste hyperbolische Verbindung zwischen P und Q . □

4. Spiegelung am Kreis

Definition 1. Sei K ein Kreis in $\mathbb{C}$ mit Radius r und Mittelpunkt z_0 . Eine Abbildung S_K von $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ in sich selbst heißt Spiegelung am Kreis, falls für alle $z \in \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ der Bildpunkt $S_K(z)$ auf dem Strahl aus z_0 durch z liegt, bzw. $c \cdot (z - z_0) = z' - z_0$ mit $c \in (0; \infty)$, und $|z_0 - z| \cdot |z_0 - z'| = r^2$.

Für Kreisspiegelungen gilt $S_K \circ S_K = id$ und S_K lässt sich auch als

$$S_K(z) = \frac{r^2}{z - z_0} + z_0$$

darstellen. Das geht aus den folgenden äquivalenten Umformungen hervor:

$$\begin{aligned} c \cdot (z - z_0) &= z' - z_0 \\ \iff c \cdot (z - z_0) \cdot (\overline{z - z_0}) &= (z' - z_0) \cdot (\overline{z - z_0}) \\ \iff c \cdot \|z - z_0\|^2 &= (z' - z_0) \cdot (\overline{z - z_0}) \end{aligned}$$

Das Produkt auf der rechten Seite ist demnach reell und größer als Null. Es gilt also

$$(z' - z_0) \cdot (\overline{z - z_0}) = |(z' - z_0) \cdot (\overline{z - z_0})| = |z' - z_0| \cdot |\overline{z - z_0}| = r^2.$$

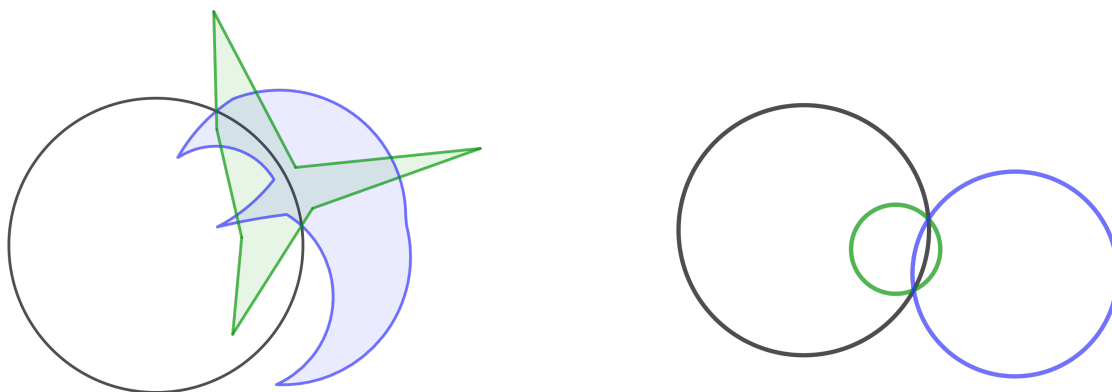
Dabei folgt der letzte Schritt aus der Definition der Spiegelung am Kreis. Wir erhalten also

$$z' - z_0 = \frac{r^2}{\overline{z - z_0}}, \quad \text{da } z \neq z_0.$$

Schließlich erhalten wir die gewünschte Formel:

$$S_K(z) = \frac{r^2}{\overline{z - z_0}} + z_0.$$

Hier sind zwei Beispiele für Kreisspiegelungen. Die grünen Objekte werden auf die blauen abgebildet und umgekehrt.



Wie wir sehen können, wird in diesem Beispiel ein Kreis auf einen Kreis abgebildet. Das werden wir nun allgemeiner untersuchen.

4.1. Verallgemeinerte Kreistreue

Satz 2. *Kreisspiegelungen überführen Kreise und Geraden in Kreise oder Geraden.*

Beweis: Zunächst schreiben wir die Kreisspiegelung S_k als Verkettung einer Möbiustransformation mit der komplexen Konjugation.

$$\begin{aligned} S_K(z) &= \frac{r^2}{\overline{z - z_0}} + z_0 \\ &= \frac{r^2 + z_0 \overline{z - z_0}}{\overline{z - z_0}} \\ &= \frac{z_0 \overline{z} + r^2 - |z_0|^2}{\overline{z} - \overline{z_0}} \\ &= \frac{a\overline{z} + b}{c\overline{z} + d} \quad \text{mit } a = z_0, b = r^2 - |z_0|^2, c = 1, d = -\overline{z_0} \\ &=: \Phi(\overline{z}) \end{aligned}$$

Wir können auch a, b, c, d normieren durch die Forderung $ad - bc \stackrel{!}{=} 1$.

Da die komplexe Konjugation die Spiegelung an der reellen Achse ist, genügt es, die verallgemeinerte Kreistreue für die Abbildung Φ zu zeigen.

Zunächst betrachten wir den Spezialfall $c = 0$. In diesem Fall muss a ungleich Null sein. Φ ist dann lediglich eine Rotation und Streckung mit einem komplexen Faktor und einer anschließenden Verschiebung. Dabei werden Kreise in Kreise und Geraden in Geraden überführt.

Nun betrachten wir den allgemeinen Fall. Es gilt

$$\begin{aligned}\Phi(z) &+ \frac{az+b}{cz+d} \\ &= \frac{\frac{a}{c} \cdot (cz+d) + (b - \frac{ad}{c})}{cz+d} \\ &= \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz+d}\end{aligned}$$

Damit können wir Φ in mehrere Funktionen zerlegen.

$$\Phi : z \mapsto cz + d \mapsto \frac{1}{cz + d} \mapsto \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz + d} \mapsto \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{ad}{c}}{cz + d}.$$

Nur bei der Reziprokenbildung müssen wir nun noch nachweisen, dass Geraden und Kreise auf Geraden oder Kreise abgebildet werden.

Dazu stellen wir Kreise und Geraden dar als

$$M := \{z = x + iy \mid az\bar{z} + b\bar{z} + \bar{b}z + c = 0\}.$$

Hierbei sind a und c reelle Zahlen und b ist komplex. Dabei dürfen a, b, c nicht gleichzeitig Null sein, da M sonst die gesamte Ebene ist. Auch b und c dürfen nicht gleichzeitig Null sein, da sonst M ein Punkt ist. Auch b und a dürfen nicht gleichzeitig verschwinden, da M sonst die leere Menge ist. Ist $a = 0$, so liegt eine Gerade vor. Wir müssen darauf achten, dass die Parameter so gewählt werden, dass M nicht die leere Menge wird.

Die komplexe Zahl $z \neq 0$ erfülle nun

$$az\bar{z} + b\bar{z} + \bar{b}z + c = 0.$$

Dann erfüllt $\frac{1}{z} = z'$ die Gleichung

$$a + \frac{b}{z} + \overline{\left(\frac{b}{z}\right)} + \frac{c}{z\bar{z}} = 0 \quad \text{bzw.} \quad cz'\bar{z}' + b\bar{z}' + \bar{b}z' + a = 0.$$

Damit ist ersichtlich, dass Geraden und Kreise durch die Reziprokenbildung auf Geraden oder Kreise abgebildet, denn die Reziprokenabbildung ist auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ bijektiv. $\square$

5. Möbiustransformationen

In der euklidischen Ebene kennen wir Spiegelung an Geraden, Verschiebung und Drehung als sogenannte Kongruenzabbildungen. Spiegelung an einer Geraden in der Euklidischen Geometrie entsprechen in der Poincaré-Halbebene einer Inversion am euklidischen Kreis. Um nun auch die entsprechenden Abbildungen für die Verschiebung und Drehung zu definieren, sammeln wir erst einmal die, aus der euklidischen Geometrie bekannten Eigenschaften, die wir von solchen Abbildungen fordern. Dies sind: *Wohldefiniertheit*, *Bijektivität*, *Verknüpfungsabgeschlossenheit*, *Längentreue*, *Winkeltreue*.

Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, dass die Möbiustransformationen diese Eigenschaften erfüllen.

Definition 2. Seien $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $ad - bc = 1$, dann heißt $\Phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ mit

$$\Phi(z) := \frac{az + b}{cz + d}$$

reelle Möbiustransformation.

5.1. Wohldefiniertheit

Da wir in der Definition sagen, dass Φ die Halbebene $\mathbb{H}$ wieder auf $\mathbb{H}$ abbildet, müssen wir zeigen, dass für alle $a, b, c, d, \in \mathbb{R}$ das Bild von $\mathbb{H}$ unter Φ wieder in $\mathbb{H}$ liegt.

D.h., wir müssen beweisen, dass für ein beliebiges $z = x + iy \in \mathbb{H}$ auch $\Phi(z) \in \mathbb{H}$ bzw. $\operatorname{Im}(z) > 0$ gilt.

Beweis:

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \frac{az+b}{cz+d} \\ &= \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{(cz+d)(c\bar{z}+d)} \\ &= \frac{acz\bar{z}+bd+adz+bc\bar{z}}{|cz+d|^2}\end{aligned}$$

$acz\bar{z} + bd$ ist eine reelle Zahl, da a, b, c, d reelle Zahlen sind und das Produkt von einer komplexen Zahl mit ihrer konjugiert komplexen Zahl auch eine reelle Zahl ist. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

$$\begin{aligned}\operatorname{Im}(\Phi(z)) &> 0 \\ \operatorname{Im}(adz + bc\bar{z}) &> 0 \\ \operatorname{Im}(ad(x + iy) + bc(x - iy)) &> 0 \\ \operatorname{Im}((ad + bc)x + iy(ad - bc)) &> 0 \\ y &> 0\end{aligned}$$

Da $z \in \mathbb{H}$ gilt, ist $y > 0$ eine wahre Aussage, wodurch die Wohldefiniertheit bewiesen ist. $\square$

5.2. Bijektivität

Beweis: Wir bestimmen die Umkehrfunktion von Φ . Dazu setzen wir $w := \Phi(z)$. Und erhalten nach umstellen von

$$w = \Phi(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{nach } z \quad z = \frac{dw-b}{-cw+a}.$$

Damit erhalten wir als Umkehrfunktion:

$$\Phi^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}.$$

Φ^{-1} ist also auch eine Möbiustransformation, von der wir schon wissen, dass sie $\mathbb{H}$ auf $\mathbb{H}$ abbildet, weshalb die ursprüngliche Funktion bijektiv sein muss. $\square$

5.3. Verknüpfungsabgeschlossenheit

Den Nachweis der Verknüpfungsabgeschlossenheit überlassen wir dem Leser. Der Nachweis erfolgt mit Hilfe der Definition und den beiden obigen Beweisen. Man zeigt, dass für zwei Möbiustransformationen $\Phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ und $\Psi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ immer die Verknüpfung $\Phi \circ \Psi$ wieder eine Möbiustransformation ist.

5.4. Längenerhaltung

Sei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}$ eine differenzierbare Kurve und $\Phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ mit $\Phi(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ und $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $ad - bc = 1$ eine reelle Möbiustransformation. Dann sollte die Längen der Kurven γ und $\Phi \circ \gamma$ übereinstimmen. Es soll also gelten:

$$\int_a^b \frac{1}{\operatorname{Im}(\gamma(t))} |\gamma'(t)| dt = \int_a^b \frac{1}{\operatorname{Im}(\Phi(\gamma(t)))} |(\Phi \circ \gamma)'(t)| dt$$

Beweis: Sei $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im} \left(\frac{a(x(t) + iy(t)) + b}{c(x(t) + iy(t)) + d} \right) &= \operatorname{Im} \left(\frac{[ax(t) + b + iay(t)][cx(t) + d - icy(t)]}{|c\gamma(t) + d|^2} \right) \\
&= \operatorname{Im} \left(\frac{i(ay(t)d - bcy(t))}{|c\gamma(t) + d|^2} \right) \\
&= \operatorname{Im} \left(\frac{iy(t)}{|c\gamma(t) + d|^2} \right) \\
&= \frac{y(t)}{|c\gamma(t) + d|^2}
\end{aligned}$$

und für die Ableitung der Kurve $\Phi \circ \gamma$ gilt

$$\begin{aligned}
(\Phi \circ \gamma)'(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(\gamma(t+h)) - \Phi(\gamma(t))}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{a\gamma(t+h) + b}{c\gamma(t+h) + d} - \frac{a\gamma(t) + b}{c\gamma(t) + d}}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{ad\gamma(t+h) - ad\gamma(t) - bc\gamma(t+h) + bc\gamma(t)}{h(c\gamma(t+h) + d)(c\gamma(t) + d)} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} \cdot \frac{1}{(c\gamma(t+h) + d)(c\gamma(t) + d)} \right] \\
&= \frac{\gamma'(t)}{(c\gamma(t) + d)^2}
\end{aligned}$$

Es reicht zu zeigen, dass folgende Gleichung gilt:

$$\frac{1}{\operatorname{Im}(\gamma(t))} |\gamma'(t)| = \frac{1}{\operatorname{Im}(\Phi(\gamma(t)))} |(\Phi \circ \gamma)'(t)|,$$

welche äquivalent zu

$$\frac{1}{y(t)} |\gamma'(t)| = \frac{1}{\frac{y(t)}{|c\gamma(t) + d|^2}} \left| \frac{\gamma'(t)}{(c\gamma(t) + d)^2} \right|$$

ist. Da dies aber eine wahre Aussage ist, sind reelle Möbiustransformationen längenerhaltend. $\square$

5.5. Winkelerhaltung

Um die Winkelerhaltung zu beweisen, möchten wir diese Eigenschaft zunächst formal beschreiben.

Satz 3. Seien $\gamma : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{H}$ und $\delta : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{H}$ differenzierbare Kurven und $\Phi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ eine reelle Möbiustransformation. Zudem seien $t_1 \in [a_1, b_1]$ und $t_2 \in [a_2, b_2]$ mit $\gamma(t_1) = \delta(t_2) =: z_0$. Dann ist

$$\angle(\gamma'(t_1), \delta'(t_2)) = \angle((\Phi \circ \gamma)'(t_1), (\Phi \circ \delta)'(t_2))$$

Beweis: Wir wissen bereits, wie sich Ableitungen bezüglich Möbiustransformationen verhalten. Nämlich ist

$$(\Phi \circ \gamma)'(t_1) = \frac{\gamma'(t_1)}{(cz_0 + d)^2}$$

und

$$(\Phi \circ \delta)'(t_2) = \frac{\delta'(t_2)}{(cz_0 + d)^2}$$

Wir nennen $\alpha := \arg \left(\frac{1}{(cz_0 + d)^2} \right)$. Dann gilt:

$$\arg \left(\frac{\gamma'(t_1)}{(cz_0 + d)^2} \right) = \arg(\gamma'(t_1)) + \alpha \quad \text{und} \quad \arg \left(\frac{\delta'(t_2)}{(cz_0 + d)^2} \right) = \arg(\delta'(t_2)) + \alpha.$$

Also ergibt sich insgesamt

$$\begin{aligned}\angle((\Phi \circ \gamma)'(t_1), (\Phi \circ \delta)'(t_2)) &= |(\arg(\gamma'(t_1)) + \alpha) - (\arg(\delta'(t_2)) + \alpha)| \\ &= |\arg(\gamma'(t_1)) - \arg(\delta'(t_2))| \\ &= \angle(\gamma'(t_1), \delta'(t_2))\end{aligned}$$

Womit die Aussage bewiesen ist. $\square$

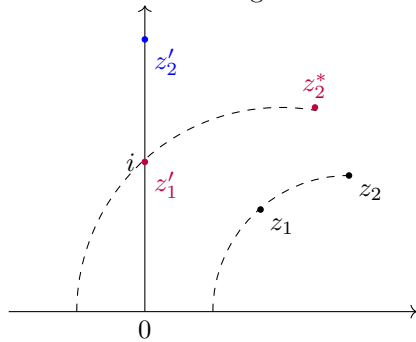
6. Kongruenz von Dreiecken in $\mathbb{H}$

6.1. Kongruenzsatz SWS

Satz 4 (Kongruenzsatz SWS). *Alle Dreiecke, welche gleich in zwei Seitenlängen und dem eingeschlossenen Winkel sind, sind kongruent.*

Beweis:

Isometrische Abbildung einer Strecke auf die imaginäre Achse



Es ist also eine abstands- und winkelerhaltende Abbildung zu finden, welche alle Dreiecke aus der Voraussetzung aufeinander abbildet. Zunächst werden die Punkte $z_1, z_2 \in \mathbb{H}$ betrachtet. Die Möbiustransformation

$$f: \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}, f(z) := \frac{1}{\operatorname{Im}(z_1)}(z - \operatorname{Re}(z_1))$$

bildet z_1 auf i ab und z_2 auf z_2^* . Nun ist eine Möbiustransformation Φ , welche i auf sich selbst und z_2^* auf it mit $t > 0$ abbildet. Es muss somit gelten:

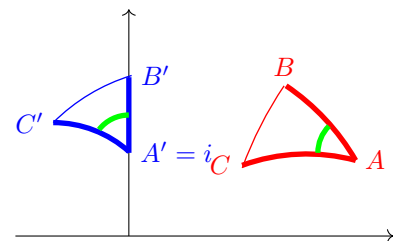
$$\Phi(i) = \frac{ai + b}{ci + d} = i \Leftrightarrow ai + b = -c + id$$

Diese Bedingung kann nur erfüllt werden mit: $a = d$ und $b = -c$. Konkret ist Φ gegeben durch:

$$\Phi(z) = \frac{z \cos(\phi) + \sin(\phi)}{-z \sin(\phi) + \cos(\phi)}$$

ϕ ist gegeben durch den halben Winkel zwischen der imaginären Achse und der Gerade durch i und z_2^* .

Es ist somit möglich, jede Strecke auf die Halbgerade durch den Ursprung abzubilden. Wird diese Transformation auf ein Dreieck mit gegebenen Stücken nach Voraussetzung angewendet, kann man eine gegebene Strecke auf die imaginäre Achse abbilden. Durch den gegebene Winkel an dieser und die andere gegebene Strecke ist das abgebildete Dreieck eindeutig bestimmt. Dies bedeutet, dass alle Dreiecke mit zwei gleichen Seitenlängen und gleich großem eingeschlossenen Winkel aufeinander durch Möbiustransformationen abgebildet werden können. Sie sind also kongruent.

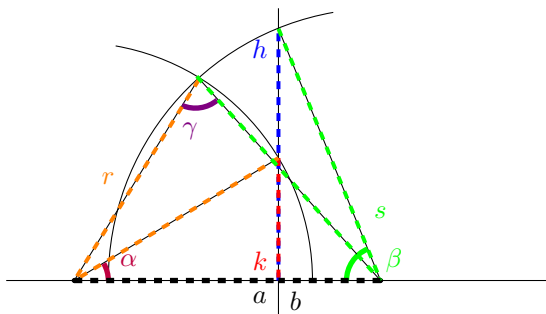
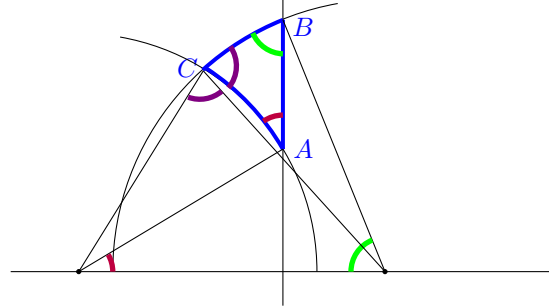


$\square$

7. Innenwinkelsumme von hyperbolischen Dreiecken

Es soll nun gezeigt werden, dass die Innenwinkelsumme in einem hyperbolischen Dreieck kleiner als π ist. Dazu wird ein Dreieck $\triangle ABC$ betrachtet, wobei die Seite AB der Einfachheit halber senkrecht zur reellen Achse steht. Das Dreieck kann, wie zuvor gezeigt, durch Möbiustransformationen in andere, kongruente Dreiecke überführt werden.

Die Innenwinkel des hyperbolischen Dreiecks haben den gleichen Betrag wie die gleichfarbigen euklidischen Winkel (s. Abb.), da die Tangenten senkrecht auf den Berührradien stehen. Es genügt also, für die euklidischen Winkel zu zeigen, dass deren Summe kleiner π ist.



Die Benennungen seien wie in der Abbildung. Es gilt $\cos(\alpha) = \frac{a}{r}$, $\cos(\beta) = \frac{b}{s}$, $\sin(\alpha) = \frac{k}{r}$, $\sin(\beta) = \frac{h}{s}$ und mit dem Kosinussatz nach Umformung

$$\cos(\gamma) = -\frac{(a+b)^2 - r^2 - s^2}{2rs}.$$

Nun wird die Ungleichung $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ solange äquivalent umgeformt, bis sich eine wahre Aussage ergibt.

Zunächst stellt man nach γ um. Dann wird der Kosinus auf die Ungleichung angewendet, wobei sich das Ungleichheitszeichen umkehrt, da Kosinus im Intervall $[0, \pi]$ monoton fallend ist. Es ist zu beachten, dass $\pi - (\alpha + \beta) > 0$ gelten muss und nach dem schwachen Außenwinkelsatz auch gilt.

$$\gamma < \pi - \alpha - \beta$$

$$\cos(\gamma) > \cos(\pi - \alpha - \beta) = -\cos(\alpha + \beta)$$

Jetzt werden die zuvor bestimmten Seitenverhältnisse eingesetzt und die Additionstheoreme genutzt.

$$-\frac{(a+b)^2 - r^2 - s^2}{2rs} > -\frac{a}{r} \cdot \frac{b}{s} + \frac{k}{r} \cdot \frac{h}{s}$$

Mit weiteren Äquivalenzumformungen und dem Satz des Pythagoras bei $r^2 - a^2 = k^2$ ergibt sich schließlich

$$\begin{aligned} -a^2 - b^2 - 2ab + r^2 + s^2 &> -2ab + 2hk \\ \Leftrightarrow r^2 - a^2 + s^2 - b^2 = k^2 + h^2 &> 2hk \\ \Leftrightarrow (k-h)^2 &> 0. \end{aligned}$$

Dies ist eine wahre Aussage, weil die Punkte A und B die Eckpunkte eines Dreiecks und deshalb verschieden voneinander sind, sodass $h \neq k$ gilt.

Somit wurde gezeigt, dass für die Innenwinkel eines hyperbolischen Dreiecks $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ gilt.

7.1. Kongruenzsatz WWW

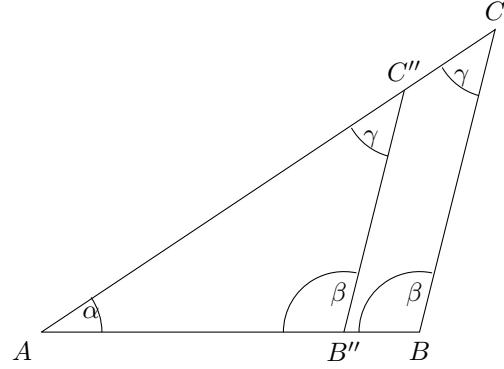
Satz 5 (Kongruenzsatz WWW).

Seien $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ zwei Dreiecke. Wenn $\alpha = |\angle ABC| = |\angle A'B'C'|$, $\beta = |\angle BCA| = |\angle B'C'A'|$ und $\gamma = |\angle CAB| = |\angle C'A'B'|$, dann ist $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$.

Beweis:

O. B. d. A. gilt $|A'B'| \leq |AB|$ und $|A'C'| \leq |AC|$. Bei Gleichheit würde aus dem Kongruenzsatz SWS sofort die Kongruenz der Dreiecke folgen. Außerdem existiert o. B. d. A. ein Dreieck $\triangle AB''C''$, wobei $B'' \in \overline{AB}$ mit $|AB''| = |A'B'|$ und $C'' \in \overline{AC}$ mit $|AC''| = |A'C'|$. Nach dem Kongruenzsatz SWS ist $\triangle AB''C'' \cong \triangle A'B'C'$.

Angenommen, $|A'B'| < |AB|$ und $|A'C'| < |AC|$. Für die Innenwinkelsumme gilt dann:



$$IWS(\triangle AB''C'') + IWS(\square B''BCC'') - (|\angle A''C''C| + |\angle BB''A|) = IWS(\triangle ABC) \quad (I)$$

Da $IWS(\square B''BCC'') < 2\pi$ und $|\angle A''C''C| + |\angle BB''A| = 2\pi$ ist

$$IWS(\square B''BCC'') - (|\angle A''C''C| + |\angle BB''A|) < 0$$

Damit ist die linke Seite der Gleichung (I) kleiner als $IWS(\triangle AB''C'')$, was ein Widerspruch ist. Also muss $|AB''| = |AB|$ und $|AC''| = |AC|$ gelten, womit Kongruenz gilt. $\square$

7.2. Flächeninhalt in der hyperbolischen Geometrie

Der Flächeninhalt A des Dreiecks $\triangle ABC$ ist definiert als

$$A(\triangle ABC) = \pi - IWS(\triangle ABC)$$

Dies ist tatsächlich eine sinnvolle Definition, da sie folgende Eigenschaften erfüllt:

1. $A \geq 0$, $A(\emptyset) = 0$, $A(\text{Dreieck}) > 0$
2. Möbiustransformationen als Isometrien erhalten den Flächeninhalt
3. Der so definierte Flächeninhalt ist additiv.
4. Für zwei Mengen M, N mit $M \subset N$ gilt $A(M) \leq A(N)$

Interessant ist, dass der Flächeninhalt von Dreiecken damit auf π beschränkt ist. Und der Flächeninhalt π wird auch nur für ideale Dreiecke, bei denen alle Eckpunkte im Unendlichen, d.h. z.B. auf der reellen Achse, liegen.

