Berichte der Gruppen

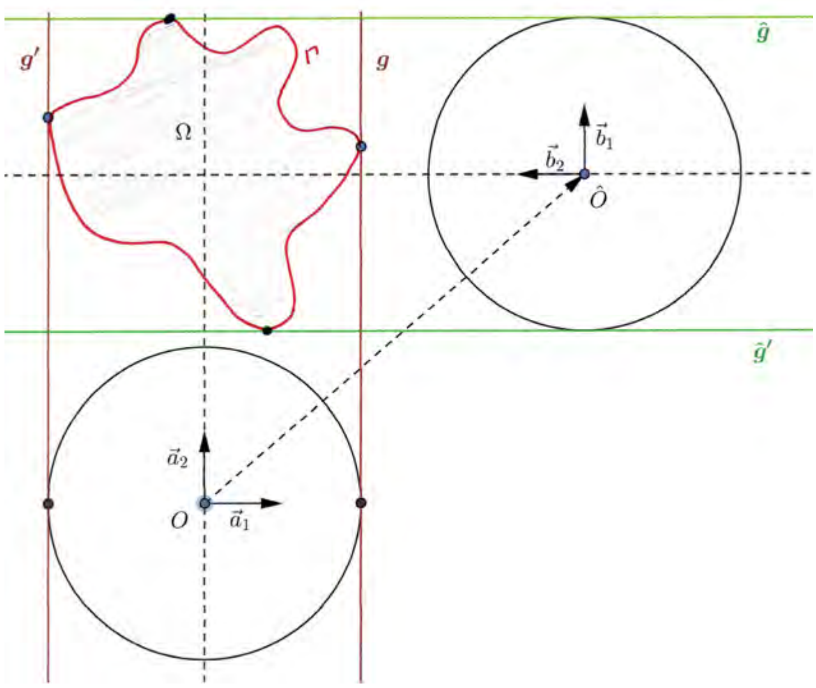
Die isoperimetrische Ungleichung

Teilnehmer:

2 Teilnehmende des	Heinrich-Hertz-Gymnasiums
3 Teilnehmnende des	Herder-Gymnasiums
1 Teilnehmer des	Immanuel-Kant-Gymnasiums
1 Teilnehmer des	Käthe-Kollwitz-Gymnasiums

mit tatkräftiger Unterstützung durch:
Lars Hanisch — Humboldt-Universität zu Berlin

Gruppenleiter:
Helga Baum — Humboldt-Universität zu Berlin



1. Einleitung

Das Ziel dieses Projektes ist, das Verhältnis des Umfangs einer Figur zum eingeschlossenen Flächeninhalt mit

$$(\text{Umfang})^2 \geq 4\pi \cdot \text{Flächeninhalt} \qquad\qquad \textit{Isoperimetrische Ungleichung}$$

zu beweisen. Zudem soll gezeigt werden, dass eine Kreisscheibe die einzige Figur ist, für welche in dieser Abschätzung die Gleichheit gilt. Dies löst das sogenannte *isoperimetrische Problem*: "Welche von allen geschlossenen ebenen Kurven vorgegebener Länge berandet das Gebiet mit dem größten Flächeninhalt?"

Bevor wir die isoperimetrische Ungleichung beweisen, werden wir folgende Fragen klären:

- Welche Gebiete lassen wir zu, d.h. welche Eigenschaften sollen die Randkurven haben?
- Wie berechnet man die Länge einer Kurve, d.h. den Umfang eines Gebietes?
- Wie berechnet man den Flächeninhalt eines Gebietes, wenn man seine Randkurve kennt?

2. Kurven und ihre Parametrisierung

In der realen Welt treten Kurven in verschiedener Weise auf, z. B. als Profilkurve technischer Objekte oder als Spur, die ein Bleistift beim Zeichnen auf Papier hinterlässt. Oft werden alle „eindimensionalen“ Punktmengen in der Ebene oder im Raum als Kurven bezeichnet. „Eindimensional“ bedeutet hierbei, dass die Kurve von nur einem Parameter abhängt. In der Physik benutzt man Kurven, wenn man z. B. die Bewegung eines Massenpunktes in Abhängigkeit von der Zeit beschreiben will. Wir verwenden diesen Kurvenbegriff. Er ist die mathematische Abstraktion der Bewegung eines Punktes in der euklidischen Ebene oder im euklidischen Raum, die durch die Angabe des Ortes $\gamma(t)$ zum Zeitpunkt t beschrieben wird. In folgendem Bericht werden nur ebene Kurven eine Rolle spielen.

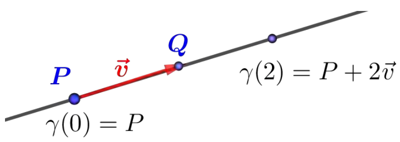
Definition 1. Eine *parametrisierte Kurve* im $\mathbb{R}^2$ ist eine Abbildung $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$t \in I \longmapsto \gamma(t) =: (\gamma_1(t), \gamma_2(t)) \in \mathbb{R}^2,$$

deren Komponentenfunktionen $\gamma_k : I \to \mathbb{R},\ k = 1, 2$, stetig sind.
$\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ heißt *differenzierbar (stetig differenzierbar, . . .)*, wenn jede der Komponentenfunktionen γ_k die entsprechende Eigenschaft hat.
Die Elemente des Intervalls I heißen die *Parameter von* γ.
Die Bildmenge $K := \gamma(I) \subset \mathbb{R}^2$ nennt man auch die *Spur von* γ. γ heißt dann eine *Parametrisierung der Menge* $K \subset \mathbb{R}^2$.

Beispiel 1. Sei $L \subset \mathbb{R}^2$ eine Gerade, $P, Q \in L$ zwei verschiedene Punkte und $\vec{v} := \overrightarrow{PQ} = Q - P$ der Verbindungsvektor von P nach Q. Eine Parametrisierung von L ist gegeben durch $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit

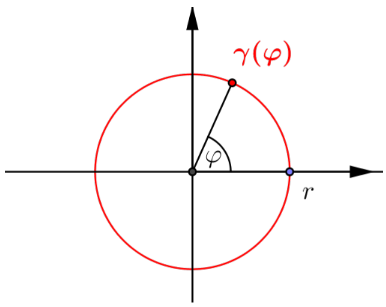
$$\gamma(t) := P + t \cdot \vec{v}.$$



Beispiel 2. Sei $K_r := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = r^2\}$ der Kreis vom Radius r. Man kann ihn mit Hilfe der trigonometrischen Funktionen in der Form $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\gamma(\varphi) \quad := \quad (r \cos\varphi, r \sin\varphi), \qquad \varphi \in [0, 2\pi],$$

parametrisieren.



Definition 2. Sei $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ eine differenzierbare Kurve. Dann heißt

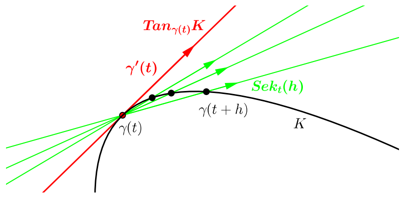
$$\gamma'(t) := \big(\gamma_1'(t), \gamma_2'(t)\big) = \lim_{h \to 0} \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h}$$

Tangentialvektor von γ im Parameter $t \in I$. Die Kurve γ heißt im Parameter $t \in I$ *regulär*, wenn $\gamma'(t) \neq \vec{0}$. γ heißt *regulär*, wenn sie in jedem Parameter regulär ist.

Ist $\gamma'(t) \neq \vec{0}$, so beschreibt die Gerade

$$\mathrm{Tan}_{\gamma(t)}K := \gamma(t) + \mathbb{R} \cdot \gamma'(t)$$

die *Tangente an die Kurve $K = \gamma(I) \subset \mathbb{R}^2$ im Kurvenpunkt $\gamma(t)$*.



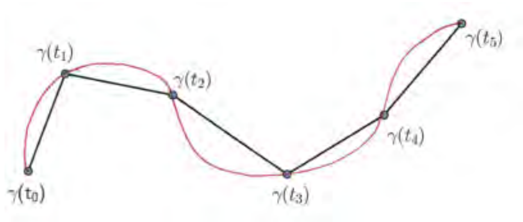
3. Die Länge parametrisierter Kurven

Um die Länge einer Kurve $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ zu definieren, wird geometrische Intuition benutzt. Bereits im Altertum haben Mathematiker den Kreisumfang berechnet, in dem sie ihn durch einbeschriebene reguläre n-Ecke approximiert haben. Für allgemeine Kurven knüpft man an dieses Verfahren an.

Sei $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \ldots, t_m\}$ eine endliche Menge von Teilungspunkten des Intervalls I mit $t_0 < t_1 < \ldots < t_m$. Ist $I = [a, b]$, so wird $t_0 = a$ und $t_m = b$ gesetzt. Dann beschreibt

$$L(\gamma, \mathcal{P}) := \sum_{k=1}^{m} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|$$

die Länge des durch die Zerlegung $\mathcal{P}$ definierten Sehnenpolygons durch die Punkte $\gamma(t_0), \gamma(t_1), \ldots, \gamma(t_m)$, wobei $\|\cdot\|$ die euklidische Norm beschreibt.[1]



Entsteht $\widetilde{\mathcal{P}}$ durch Hinzufügen von weiteren Teilungspunkten zu $\mathcal{P}$, so folgt aus der Dreiecksungleichung für die Norm , dass $L(\gamma, \widetilde{\mathcal{P}}) \geq L(\gamma, \mathcal{P})$ ist.

Definition 3. Das Supremum der Längen der γ einbeschriebenen Sehnenpolygone

$$L(\gamma) := \sup\{L(\gamma, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \text{ endliche Zerlegung von } I\}$$

heißt die Länge von γ.

Ist $I = I_1 \cup I_2$ eine Zerlegung von I in zwei Teilintervalle, so gilt

$$L(\gamma) = L(\gamma|_{I_1}) + L(\gamma|_{I_2}).$$

Die Approximation durch Sehnenpolygone ist i. A. zu umständlich, um die Länge einer Kurve zu berechnen. Für *stetig differenzierbare* Kurven $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ wird die Länge einfacher durch ein Riemann-Integral berechnet. In diesem Fall ist die Funktion $t \in [a, b] \mapsto \|\gamma'(t)\| \in \mathbb{R}$ stetig und folglich Riemann-integrierbar.

[1] Eine Norm ist anschaulich die Länge eines Vektors. Sie ist für $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ definiert durch $\|\vec{v}\| := \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

Satz 1. *Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ eine stetig differenzierbare parametrisierte Kurve. Dann gilt für ihre Länge*

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| \, dt.$$

Den Beweis haben wir in Kurs besprochen. Wir lassen ihn hier aus Platzgründen weg.

4. Flächeninhaltsformeln für ebene Gebiete

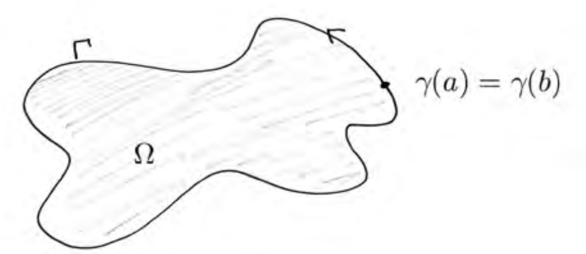
In diesem Abschnitt werden Formeln für den Flächeninhalt ebener Gebiete hergeleitet, deren Rand sich stückweise stetig differenzierbar parametrisieren läßt.

Definition 4. Eine parametrisierte Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ heißt

- geschlossen, wenn $\gamma(a) = \gamma(b)$,
- einfach, wenn $\gamma : (a,b) \to \mathbb{R}^2$ injektiv ist.

Eine einfache, geschlossene Kurve $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ heißt positiv-orientiert, wenn sie entgegen dem Uhrzeigersinn durchlaufen wird.

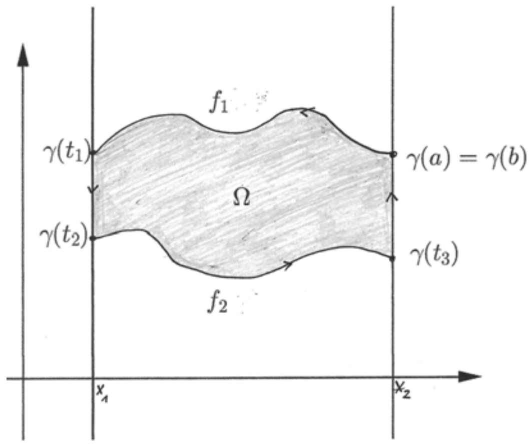
Sei nun $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ eine einfache, geschlossene und positiv-orientierte Kurve mit der Spur Γ. Ω bezeichne das von Γ umschlossene beschränkte Gebiet. Es wird nun eine Formel angegeben, mit der man den Flächeninhalt von Ω mit Hilfe der Randkurve berechnen kann.



Satz 2. *Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ eine einfache, geschlossene, positiv-orientierte und stetig differenzierbare Kurve mit $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, Γ die Spur von γ und $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ das von Γ umschlossene beschränkte Gebiet. Dann gilt für den Flächeninhalt von Ω:*

$$\begin{aligned} Area(\Omega) &= -\int_a^b y(t)x'(t)\, dt \overset{part.Int.}{=} \int_a^b y'(t)x(t)\, dt \\ &= \frac{1}{2}\int_a^b \big(x(t)y'(t) - y(t)x'(t)\big)\, dt. \end{aligned}$$

Beweis: Es werden zunächst Kurven γ betrachtet, deren Spur aus zwei zur y-Achse parallelen Strecken und zwei Bögen, die Graphen von Funktionen f_1 und f_2 mit $0 < f_1 < f_2$ sind, besteht.



Nach Definition des Riemann–Integrals ist

$$Area(\Omega) = \int_{x_1}^{x_2} f_1(x)\,dx - \int_{x_1}^{x_2} f_2(x)\,dx. \tag{1}$$

Für die obige Kurve $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ gilt

$$(x(t), y(t)) = \begin{cases} \big(x(t), f_1(x(t))\big), & t \in [a, t_1] \\ \big(x_1, y(t)\big), & t \in [t_1, t_2] \\ \big(x(t), f_2(x(t))\big), & t \in [t_2, t_3] \\ \big(x_2, y(t)\big), & t \in [t_3, b]. \end{cases}$$

Die Substitution $x = x(t)$, $dx = x'(t)dt$ mit $x_1 = x(t_1)$ und $x_2 = x(a)$ liefert für das erste Integral

$$\int_{x_1}^{x_2} f_1(x)\,dx = \int_{t_1}^{a} f_1(x(t)) \cdot x'(t)\,dt = -\int_{a}^{t_1} y(t)x'(t)\,dt.$$

Analog ergibt sich mit $x = x(t)$, $dx = x'(t)dt$ sowie $x_1 = x(t_2)$ und $x_2 = x(t_3)$ für das zweite Integral

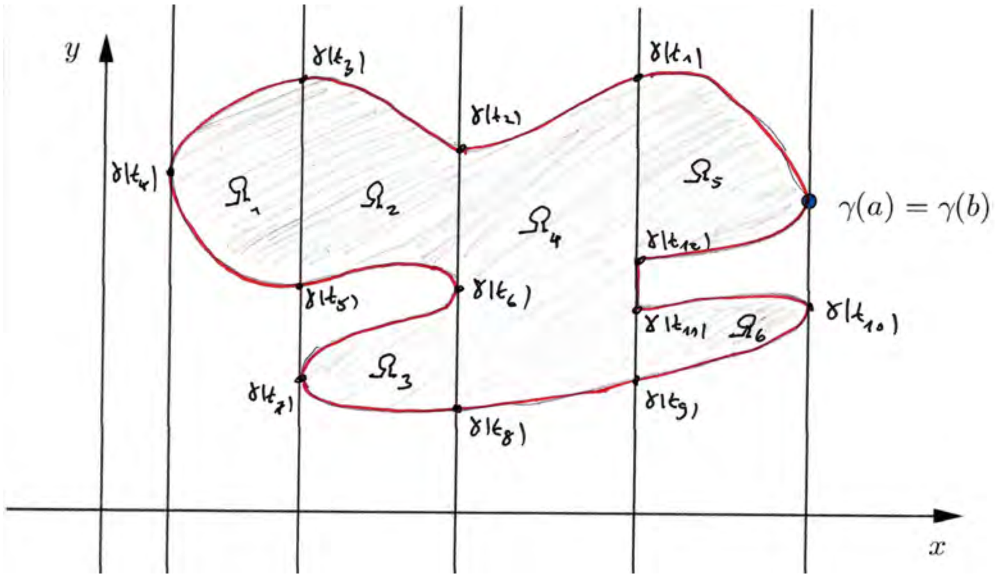
$$\int_{x_1}^{x_2} f_2(x)\,dx = \int_{t_2}^{t_3} y(t)x'(t)\,dt.$$

Damit ergibt sich insgesamt

$$Area(\Omega) = -\left(\int_{a}^{t_1} y(t)x'(t)\,dt + \int_{t_2}^{t_3} y(t)x'(t)\,dt\right) = -\int_{a}^{b} y(t)x'(t)\,dt,$$

da $x(t) = const$ für $t \in [t_1, t_2]$ und $t \in [t_3, b]$.

Es wird nun der allgemeine Fall betrachtet.



Es wird zuerst überlegt, dass man Ω in Gebiete zerlegen kann, die die Form aus dem vorangegangenen Schritt haben. Um das einzusehen, wird das Koordinatensystem so gelegt, dass Ω im positiven Quadranten liegt. Der Abstand des Punktes $\gamma(t)$ zur y-Achse ist dann durch die erste Koordinate $x(t)$ gegeben. Es werden alle Parameter $t \in [a, b]$, für die $x'(t) = 0$ gilt, d. h. für die die Tangente in $\gamma(t)$ parallel zur y-Achse ist, betrachtet. Diese Tangenten werden, wie im Bild dargestellt, eingezeichnet. Die Kurve γ wird dabei in Teilstücke $\gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}$ zerlegt, so dass $x'(t) \neq 0$ für alle $t \in (t_i, t_{i+1})$. Folglich ist x' auf (t_i, t_{i+1}) überall positiv oder überall negativ, also ist die Funktion $x = x(t)$ auf $[t_i, t_{i+1}]$ streng monoton wachsend oder streng monoton fallend. Deshalb existiert dort eine Umkehrfunktion $t = t(x)$ und das entsprechende Teilstück von γ kann als Graph der Funktion f mit $f(x) := y(t(x))$ dargestellt werden:

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) = (x(t), f(x(t))).$$

Nun kann die Fläche von Ω leicht berechnet werden:

$$\begin{aligned} Area(\Omega) &= \sum_{i=1}^{m} Area(\Omega_i) \\ &= -\Big(\int_a^{t_1} y(t)x'(t)\,dt + \int_{t_{12}}^{b} y(t)x'(t)\,dt + \int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)\,dt + \int_{t_8}^{t_9} y(t)x'(t)\,dt + \dots \Big) \\ &= -\int_a^b y(t)x'(t)\,dt, \end{aligned}$$

wobei benutzt wurde, dass alle Parameterabschnitte $[t_i, t_{i+1}]$ genau einmal auftreten. □

Satz 3. *Sei die Randkurve γ in Polarkoordinaten gegeben, d.h., sei*

$$\gamma(t) = (r(t)\cos\varphi(t), r(t)\sin\varphi(t)). \tag{2}$$

Dann gilt

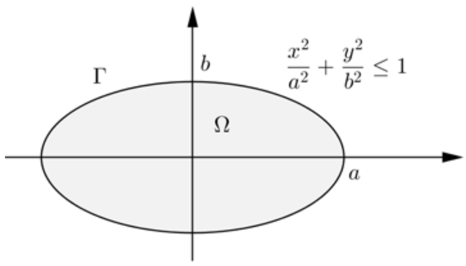
$$Area(\Omega) = \frac{1}{2}\int_a^b r^2(t)\varphi'(t)\,dt.$$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
Area(\Omega) &\overset{\text{Satz 2}}{=} \frac{1}{2}\int\limits_a^b \big(x(t)y'(t) - y(t)x'(t)\big)\,dt \\
&\overset{(2)}{=} \frac{1}{2}\int_a^b (r(t)\cos\varphi(t)\cdot[r(t)\sin\varphi(t)]' - r(t)\sin\varphi(t)\cdot[r(t)\cos\varphi(t)]'\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_a^b (r(t)\cos\varphi(t)\cdot(r'(t)\sin\varphi(t) + r(t)\varphi'(t)\cos\varphi(t)) \\
&\quad -r(t)\sin\varphi(t)\cdot(r'(t)\cos\varphi(t) - r(t)\varphi'(t)\sin\varphi(t)))\,dt \\
&= \frac{1}{2}\int_a^b (r^2(t)\varphi'(t)(\cos^2\varphi(t) + \sin^2\varphi(t)))\,dt \\
&\overset{\text{Trig. Pyth.}}{=} \frac{1}{2}\int_a^b r^2(t)\varphi'(t)\,dt
\end{aligned}
$$

□

Beispiel 3. Sei Ω die von einer Ellipse mit den Halbachsen a und b eingeschlossene Fläche.



Wir parametrisieren die Ellipse durch die Kurve $\gamma(t) = (a\cos t, b\sin t) =: (x(t), y(t))$ mit $t \in [0, 2\pi]$. Dann ist nach Satz 2

$$Area(\Omega) = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} \big(x(t)y'(t) - y(t)x'(t)\big)\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi} ab\cdot\big(\cos^2 t + \sin^2 t\big)\,dt = \pi ab.$$

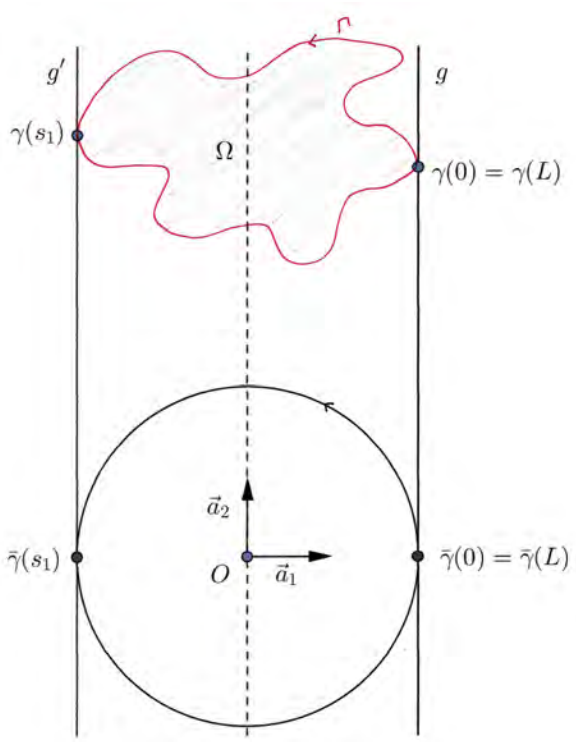
5. Die isoperimetrische Ungleichung

In diesem Abschnitt beweisen wir nun die isoperimetrische Ungleichung.

Satz 4. *Sei γ eine reguläre, einfache und geschlossene Kurve und Ω das von der Spur Γ von γ umschlossene beschränkte Gebiet. Dann gilt:*

$$L(\gamma)^2 \geq 4\pi\, Area(\Omega).$$

Beweis: Wir betrachten zwei parallele Geraden g und g', die das Gebiet Ω einschließen und berühren (siehe Bild).



Der Abstand von g und g' sei $2r$. Außerdem wird ein Kreis K_r vom Radius r mit den Tangenten g und g', der außerhalb von Ω liegt, betrachtet. Es wird in der Ebene ein kartesisches Koordinatensystem $(O, \vec{a}_1, \vec{a_2})$ fixiert, dessen Ursprung O im Mittelpunkt des Kreises K_r liegt, die y-Achse sei parallel zu g und g', die x-Achse senkrecht dazu. In diesem Koordinatensystem wird Γ durch eine Parametrisierung $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ beschrieben, die Γ mit konstanter Geschwindigkeit 1 in positiver Richtung durchläuft. Dies ist möglich, da γ regulär ist. Die Komponenten von γ werden $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ genannt. Der Startparameter $s = 0$ wird so gewählt, dass γ die Gerade g im Parameter $s = 0$ das erste Mal berührt. $s = s_1$ sei derjenige Parameter, in dem γ die Gerade g' das erste Mal berührt. Da $\|\gamma'(s)\| = 1$, gilt für die Länge von Γ:

$$L(\gamma) = \int_0^L \|\gamma'(s)\|\, ds = \int_0^L 1\, ds = L.$$

Der Kreis K_r wird in positiver Richtung durch eine Kurve $\bar{\gamma} : [0, L] \to \mathbb{R}^2$ der Form $\bar{\gamma}(s) := (\bar{x}(s), \bar{y}(s))$ mit $\bar{x}(s) = x(s)$ parametrisiert. Außerdem soll gelten, dass $\bar{y}(s) \geq 0$ für alle $s \in [0, s_1]$ und $\bar{y}(s) \leq 0$ für alle $s \in [s_1, L]$. Da K_r den Radius r hat, gilt $x^2(s) + \bar{y}^2(s) = r^2$.
Der Flächeninhalt der vom Kreis eingeschlossenen Kreisscheibe D_r ist

$$Area(D_r) = \pi r^2 \overset{\text{Satz 2}}{=} -\int_0^L \bar{y}(s) x'(s)\, ds.$$

Der Flächeninhalt von Ω ist beschrieben durch

$$Area(\Omega) \overset{\text{Satz 2}}{=} \int_0^L x(s) y'(s)\, ds.$$

Die Addition beider Formeln ergibt

$$\begin{aligned}
Area(\Omega) + \pi r^2 &= \int_0^L \big(x(s)y'(s) - \bar{y}(s)x'(s)\big)\, ds \\
&\leq \int_0^L \sqrt{\big(x(s)y'(s) - \bar{y}(s)x'(s)\big)^2}\, ds \qquad (3) \\
&= \int_0^L \sqrt{x(s)^2y'(s)^2 + \bar{y}(s)^2x'(s)^2 - 2x(s)x'(s)\bar{y}(s)y'(s)}\, ds \\
&\leq \int_0^L \sqrt{\big(x(s)^2 + \bar{y}(s)^2\big)\big(x'(s)^2 + y'(s)^2\big)}\, ds. \qquad (4)
\end{aligned}$$

Abschätzung (4) erhält man durch Ausmultiplizieren der Radikanten und Anwenden der binomischen Formel.

Es wird nun verwendet, dass

$$1 = \|\gamma'(s)\|^2 = x'(s)^2 + y'(s)^2$$

und man erhält aus (4):

$$Area(\Omega) + \pi r^2 \leq \int_0^L \sqrt{x(s)^2 + \bar{y}(s)^2}\, ds = \int_0^L \sqrt{\bar{x}(s)^2 + \bar{y}(s)^2}\, ds = \int_0^L r\, ds = rL.$$

Folglich gilt

$$Area(\Omega) + \pi r^2 \leq rL. \qquad (5)$$

Für alle positiven reellen Zahlen a und b gilt

$$\sqrt{a \cdot b} \leq \frac{a+b}{2}.$$

Die Gleichheit gilt genau dann, wenn $a = b$.

Werden $a = Area(\Omega)$ und $b = \pi r^2$ gesetzt, dann folgt

$$\sqrt{Area(\Omega) \cdot \pi r^2} \;\leq\; \frac{Area(\Omega) + \pi r^2}{2}. \qquad (6)$$

Aus (5) und (6) erhält man durch Umstellen die isoperimetrische Ungleichung

$$L(\gamma)^2 \geq 4\pi \cdot Area(\Omega).$$

□

6. Das isoperimetrische Problem

Nachdem die isoperimetrische Ungleichung gezeigt wurde, wird nun gezeigt, dass ein Kreis die einzige Kurve ist, für die die Gleichheit gilt. Dies bedeutet, dass für eine gegebene Länge L, ein Kreis mit Radius $r = \frac{L}{2\pi}$ unter allen einfachen, geschlossenen C^1-Kurven diejenige mit maximalem Flächeninhalt $\frac{L^2}{4\pi}$ ist.

Satz 5 (Das isoperimetrische Problem)**.** *Sei L eine vorgegebene positive reelle Zahl. Der Kreis vom Radius $r = \frac{L}{2\pi}$ ist unter allen einfach geschlossenen Kurven der Länge L die einzige Kurve, die ein Gebiet mit dem größt möglichen Flächeninhalt $\frac{L^2}{4\pi}$ umschließt.*

Beweis: Man betrachte eine nach Bogenlänge parametrisierte, einfache und geschlossene C^1-Kurve $\gamma : [0, L] \to \mathbb{R}^2$. Angenommen für γ gilt in der isoperimetrischen Ungleichung die Gleichheit. Nun soll bewiesen werden, dass die Spur von γ ein Kreis ist.

In der Herleitung der isoperimetrischen Ungleichung muss bei (3), (4), (5) und (6) Gleichheit gelten, damit insgesamt der Gleichheitsfall eintritt. Wenn Gleichheit in (5) und (6) gilt, muss gelten:

$$Area(\Omega) = \pi r^2,$$

$$Area(\Omega) + \pi r^2 = Lr.$$

Folglich gilt:

$$L(\gamma) = 2\pi r. \tag{7}$$

Der Abstand $2r$ zwischen den Geraden g und g' ist also nur von $L(\gamma)$ abhängig. Somit ist die Richtung von g und g' irrelevant. Bei (4) gilt Gleichheit, wenn:

$$(xy' - x'\bar{y})^2 = \underbrace{(x^2 + \bar{y}^2)}_{=r^2} \cdot \underbrace{(x'^2 + y'^2)}_{=1} = r^2. \tag{8}$$

Da x und $\bar{y}$ die Komponenten der Kurve, deren Spur K_r ist, sind, gilt $x^2 + \bar{y}^2 = r^2$.

Da γ nach Bogenlänge parametrisiert ist, gilt $x'^2 + y'^2 = 1$. Nun kann ausmultipliziert werden:

$$\begin{aligned}
& & (xy' - x'\bar{y})^2 &= r^2 \\
&\Leftrightarrow & x^2y'^2 + x'^2\bar{y}^2 - 2xx'y'\bar{y} &= x^2x'^2 + x^2y'^2 + \bar{y}^2x'^2 + \bar{y}^2y'^2 \\
&\Leftrightarrow & 0 &= (xx' + y'\bar{y})^2 \\
&\Leftrightarrow & 0 &= xx' + y'\bar{y}.
\end{aligned} \tag{9}$$

Wegen (8) und (3) gilt:

$$\begin{aligned}
& & xy' - x'\bar{y} &= r \\
&\Leftrightarrow & x^2y' - xx'\bar{y} &= rx.
\end{aligned}$$

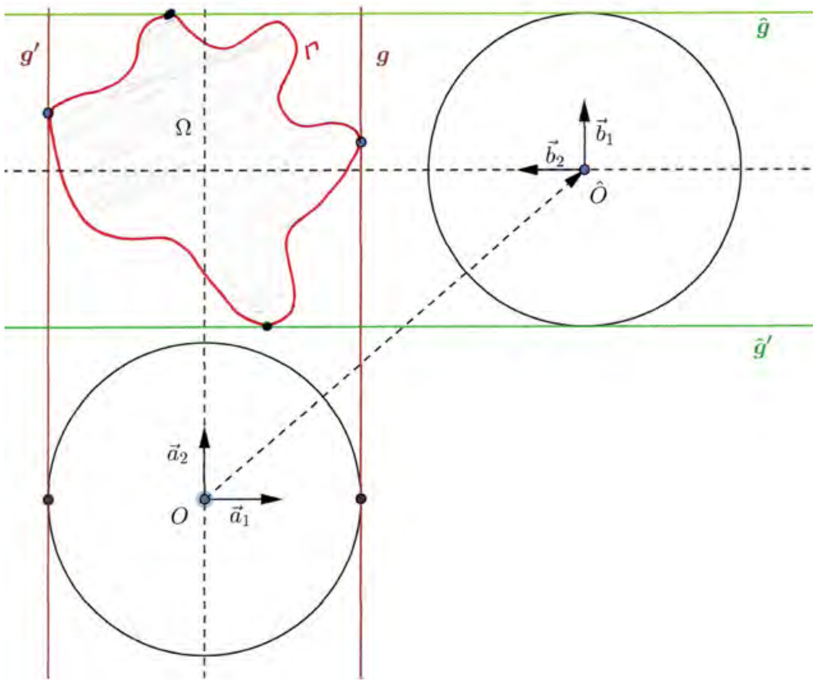
Es wird (9) eingesetzt:

$$x^2y' + y'\bar{y}^2 = rx \quad \Leftrightarrow \quad y'\underbrace{(x^2 + \bar{y}^2)}_{=r^2} = rx \quad \Leftrightarrow \quad y'r^2 = rx \quad \Leftrightarrow \quad y'r = x.$$

Nun sollen x und y wieder als Komponenten der Kurve γ betrachtet werden:

$$x(s) = r \cdot y'(s). \tag{10}$$

Es wird nun die gleiche Situation für zwei Ω einschließende Geraden $\hat{g}$ und $\hat{g}'$, die senkrecht zu g und g' sind, betrachtet. Ihr Abstand sei $2\hat{r}$ und $\hat{K}_{\hat{r}}$ ein beliebiger Kreis mit Mittelpunkt $\hat{O}$ zwischen $\hat{g}$ und $\hat{g}'$ außerhalb von Ω. Die Vektoren $\vec{b_1}$ und $\vec{b_2}$ sind genau wie $\vec{a_1}$ und $\vec{a_2}$ Einheitsvektoren, wobei $\vec{b_1} = \vec{a_2}$ und $\vec{b_2} = -\vec{a_1}$.



Im kartesischen Koordinatensystem $(\hat{O}, \vec{b_1}, \vec{b_2})$ soll γ gegeben sein durch:

$$\gamma(s) = (\hat{x}(s), \hat{y}(s)).$$

Nach (7) gilt $\hat{r} = \frac{L(\gamma)}{2\pi} = r$. Analog zu (10) gilt für $\hat{K}_{\hat{r}}$:

$$\hat{x}(s) = r \cdot \hat{y}'(s). \tag{11}$$

Nun sollen die Koordinaten der beiden kartesischen Koordinatensysteme in einander umgerechnet werden. Ein Punkt P soll im Koordinatensystem $(O, \vec{a_1}, \vec{a_2})$ die Koordinaten (x, y) und in $(\hat{O}, \vec{b_1}, \vec{b_2})$ die Koordinaten $(\hat{x}, \hat{y})$ haben. Es gilt:

$$P = O + x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2 = \hat{O} + \hat{x}\vec{b}_1 + \hat{y}\vec{b}_2.$$

Sei $\overrightarrow{O\hat{O}} = c_1\vec{a_1} + c_2\vec{a_2}$. Dann gelten folgende Beziehungen:

$$x = c_1 - \hat{y} \qquad \text{und} \qquad y = c_2 + \hat{x}.$$

Für γ bedeutet dies:

$$x(s) = c_1 - \hat{y}(s) \qquad \text{und} \qquad y(s) = c_2 + \hat{x}(s).$$

Mit (11) gilt:

$$y(s) - c_2 = \hat{x}(s) = r\hat{y}'(s) = r \cdot (c_1 - x)'(s) = -r \cdot x'(s).$$

Quadrieren und Addieren liefert:

$$(y(s) - c_2)^2 + x(s)^2 = r^2 \cdot \underbrace{(x'(s)^2 + y'(s)^2)}_{=1} = r^2.$$

Folglich parametrisiert γ einen Kreis. $\square$