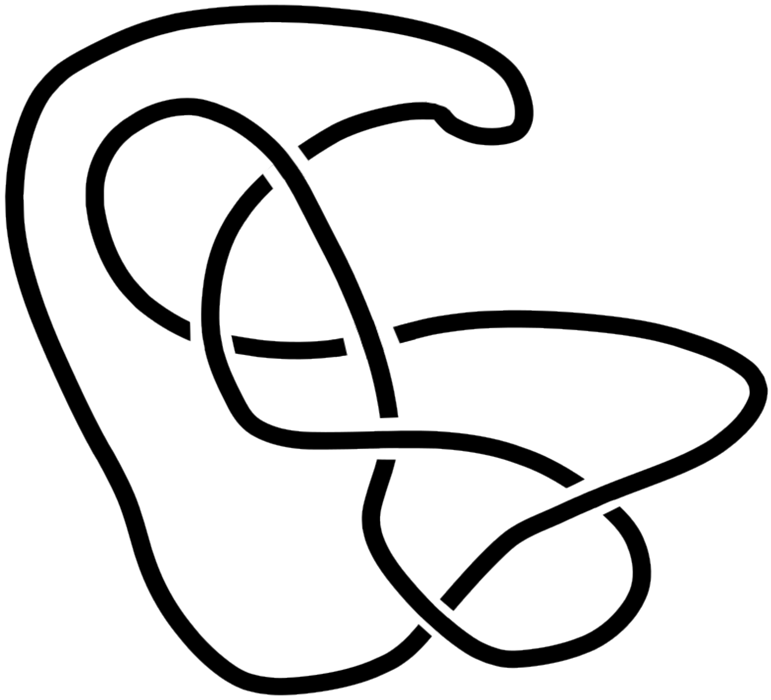
Experimentelle Forschung in der Knotentheorie

Teilnehmer:

2 Teilnehmende des	Andreas-Gymnasiums
3 Teilnehmende des	Heinrich-Hertz-Gymnasiums
2 Teilnehmende des	Herder-Gymnasiums

Gruppenleiter:

Leo Mousseau	Humboldt-Universität zu Berlin



1. Einführung in die Knotentheorie: Invarianten

Wenn man ein Seil in beliebiger Form mit sich selbst verschlingt, und anschließend die Enden zusammenfügt, erhält man ein Gebilde, das als **Knoten** bezeichnet wird.

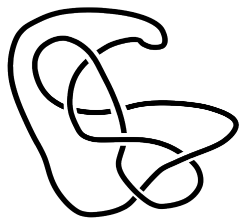


Abbildung 1: Die Projektion eines Knotens mit 6 Kreuzungen

Jetzt stellt sich die Frage, ob ein resultierender Knoten äquivalent zum Unknoten ist, also dem Knoten der einfach aus einem unverknoteten runden Kreis besteht. Allgemeiner kann man sich fragen ob zwei Knoten topologisch **äquivalent** sind, d.h. durch simple Verformungen ineinander überführt werden können.

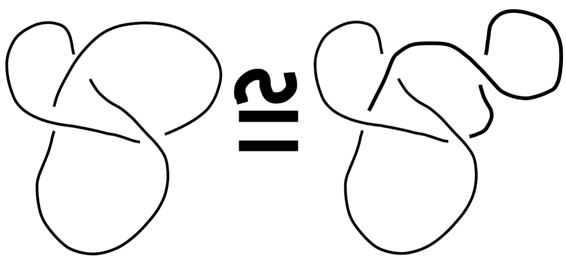


Abbildung 2: Zwei äquivalente Darstellungen des Kleeblattknotens.

Wie man diese Knoten unterscheiden und vergleichen kann, ist Hauptbestandteil der sogenannten Knotentheorie. Die Knotentheorie ist ein Teilgebiet der Topologie und dementsprechend kann man topologische Verformungen, wie dehnen, stauchen, verdrehen und verzerren vornehmen, ohne dass die topologische Form verloren geht. Analog darf man keine Operationen durchführen, die die topologische Form verändern, also nicht schneiden, reißen und keine Löcher entfernen oder hinzufügen.

Um zu zeigen, dass zwei Knoten äquivalent sind, reicht es meistens aus eine explizite Deformation des einen Knotens in den anderen Knoten anzugeben, wie zum Beispiel in Abbildung 2 gezeigt. Andererseits ist es oft sehr schwer zu zeigen, dass zwei Knoten nicht äquivalent sind. Dafür definiert man sogenannte **Invarianten**, die zwei äquivalenten Knoten dieselbe Zahl (oder ein allgemeineres algebraisches Objekt) zuordnen, d.h., eine Invariante ist eine Abbildung

$$\text{Invariante}\colon \{\text{Äquivalenzklassen von Knoten}\} \to \mathbb{Z}.$$

Wenn man dann berechnen kann, dass zwei Knoten verschiedene Invarianten haben, so können diese nicht äquivalent sein. Eines der Hauptziele der Knotentheorie ist es, möglichst viele Knoten unterscheiden zu können, das heißt möglichst gute Invarianten zu finden und diese zu verstehen. Die Ansprüche an topologische Invarianten, sind zum einen, dass sie möglichst viele Knoten eindeutig unterscheiden können und zum anderen, dass sie sich in endlicher Zeit möglichst leicht berechnen lassen.

2. Das 3-Geschlecht

Das 3-Geschlecht ist eine der fundamentalsten Invarianten der Knotentheorie. Zusätzlich ist es auch für verschiedenste geometrische Anwendungen nützlich. Um das 3-Geschlecht zu definieren müssen wir zuerst erklären was eine Fläche ist und wie man die Anzahl der Löcher dieser bestimmt.

2.1. Flächen und deren Invarianten

Um Invarianten zu verifizieren, werden drei Kriterien verwendet. Diese orientieren sich an verschiedenen Eigenschaften der Topologie der Fläche des Knotens. Wenn alle Kriterien bei einem Knoten erfüllt werden, dann kann dessen Geometrie verändert werden, wobei die Topologie immer gleich bleibt.

Als erstes Kriterium gibt es die Anzahl der Randkomponenten. Diese werden hierbei als Abbruch einer kontinuierlich verlaufenden Fläche verstanden.

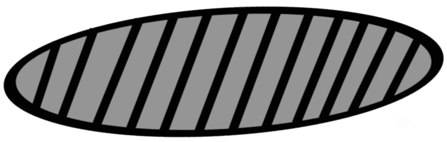


Abbildung 3: Ein ausgefüllter Unknoten mit einer Randkomponente

Das zweite Kriterium betrachtet die Orientierbarkeit einer Fläche. Die Eigenschaft gibt an, ob bei einer Fläche ein bestimmter Punkt ebenfalls nur eine Ausrichtung besitzt, unabhängig davon, wie viele Umdrehungen abgeschlossen wurden.

Die Euler Charakteristik stellt das letzte Kriterium dar. Der Knoten wird zur Bestimmung von dieser in eine oder mehrere Ecken, Kanten und Flächen aufgeteilt.

Definition 1. Wir definieren diese als

$$\chi(F) = e - k + f,$$

wobei e, k und f für die Anzahl an Ecken, Kanten und Flächen steht.

Satz 1. *Es bleibt dabei χ gleich, unabhängig davon, in wieviele Ecken, Kanten oder Flächen der Knoten unterteilt wird.*

Definition 2. Daraus haben wir durch Umformen geschlussfolgert, wie entsprechend das Geschlecht defininiert werden kann:

$$g = \frac{-\chi + 2 - r}{2}.$$

2.2. Seifert-Flächen und das 3-Geschlecht

Die Seifert-Fläche ist nützlich, um zu beweisen, dass ein Knoten lochlos ist und somit ein Geschlecht von null besitzt. Damit aber eine Fläche als Seifert-Fläche bezeichnet werden kann, muss sie glatt und orientierbar sein, denselben Rand wie den des Knotens beguthaben und keine Löcher beinhalten. Sie befindet sich auf einer dreidimensionalen Sphäre, welche als Hülle für einen vierdimensionalen Ball agiert.

Definition 3. In der Gestalt einer Formel kann die Definition dieser wie folgt dargestellt werden:

$$g_3(K) := \min\left\{g(F) \,\middle|\, F \subsetneq S^3 \text{ glatt, orientierbar, } \partial F = K\right\}.$$

Das Seifert-Geschlecht gibt das minimale Geschlecht einer Seifert-Fläche an. F, S^3 und ∂ stehen dabei für die Fläche, die dreidimensionale Sphäre und für den Rand.

Bei hochkomplexen Knoten ist es angemessener, ein Rechenprogramm für die Berechnung des Geschlechtes zu verwenden. Ein zentraler Aussichtspunkt ist dabei die Annäherung an den richtigen Wert durch untere und obere Schranken. Das Alexander-Polynom ist für die Setzung der unteren und der Seifert-Algorithmus für die obere Schranke zuständig.

3. Das 4-Geschlecht

Das 4-Geschlecht g_4, ist dem 3-Geschlecht sehr ähnlich. Wir erinnern uns an die Definition des Dreigeschlechts eines Knotens K

$$g_3(K) := \min\left\{g(F) \,\middle|\, F \subset S^3 \text{ glatt, orientierbar, } \partial F = K\right\}. \tag{1}$$

In Analogie dazu ist das 4-Geschlecht definiert.

Dabei ist S^3 der Rand eines 4-dimensionalen Balls und D^4 der Ball selbst.

Definition 4. Wir definieren das 4-**Geschlecht** als das Minimum aller Seifert-Flächen F im 4-Ball, wobei der Knoten K auf dem Rand $S^3 = \partial D^4$ eines 4-dimensionalen Balls liegt. Das heißt

$$g_4(K) := \min\left\{g(F) \,\middle|\, F \subset D^4 \text{ glatt, orientierbar, } \partial F = K\right\}.$$

Da wir jede Seifert-Fläche in S^3 auch als Seifert Fläche in D^4 auffassen können, erhalten wir sofort für jeden Knoten K die triviale Ungleichung

$$g_4(K) \leq g_3(K).$$

Es stellt sich jetzt natürlich sofort die Frage, ob es überhaupt Knoten gibt, für die das 4-Geschlecht ungleich dem 3-Geschlecht ist. Wir werden ein solches Beispiel im nächsten Kapitel betrachten.

3.1. Ein verknoteter Scheibenknoten

Ein Knoten K mit verschwindendem 4-Geschlecht heißt auch **Scheibenknoten**, da er eine Scheibe im 4-Ball berandet.

Satz 2. *Der Knoten* 8_{20} *hat* 3*-Geschlecht* $g_3 = 2$ *aber verschwindendes* 4*-Geschlecht* $g_4 = 0$.

Beweis: Das 3-Geschlecht vom 8_{20} ist 2, was sich aus der Gleichung für $g_3(K)$ und der Definition für g(K) in Kapitel 1 errechnen lässt.

Da die Seifert Fläche F beim 4-Geschlecht in D^4 liegen darf, können wir die Flächen an den Selbstschnittstellen in die 4. Dimension voneinander wegbiegen und diese Selbstschnittstellen verschwinden. Damit verändert sich das minimale Gechlecht der Seifert Fläche F des Knotens und damit ist auch das 4 Geschlecht kleiner als das 3 Geschlecht, nämlich 0, da die Seifert Fläche dann topologisch äquivalent zur Seifert Fläche des Unknotens ist.

□

3.2. Das 4-Geschlecht der Whitehead-Verdopplung

Eine zentrale und seit langer Zeit offene Vermutung der Knotentheorie fragt nach dem 4-Geschlecht der negativen Whiteheadverdopplung W_-T_+ des positive Kleeblattknotens T_+. Wir erklären diese Vermutung hier.

Der Name „positiver Kleeblattknoten“ heißt, dass die drei Kreuzungen des Kleeblattknotens, aus dem der Knoten gebildet wird, positiv sind.

Definition 5. Eine **negative** Kreuzung ist eine Kreuzung, bei der der obere Strang den unteren in Verlaufsrichtung von rechts nach links überquert. Analog überquert bei einer **positiven** Kreuzung, der obere Strang den unteren von links nach rechts. Dies ist in Abbildung 4 dargestellt.

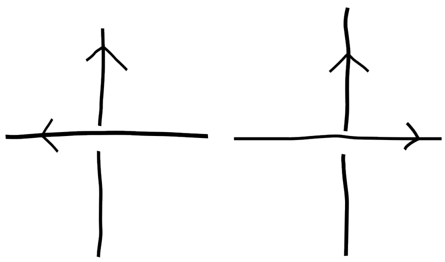


Abbildung 4: Links: eine negative Kreuzung; Rechts: eine positive Kreuzung

Die **Whitehead-Verdopplung** wird wie folgt aus einer Verdopplung des Kleeblattknotens konstruiert. Zusätzlich wird noch eine Schlaufe hinzugefügt um die, bis dahin parrallel verlaufenen Stränge zu verbinden und aus den zwei Einzelsträngen einen zusammenhängenden Knoten zu machen. Zuletzt, werden noch für jede positive Kreuzung im Ursprungsknoten zwei negative Kreuzung zwischen den Strängen hinzugefügt. Beim Kleeblattknoten gibt es 3 positive Kreuzungen also muss man dem W_-T_+ noch 6 negative Kreuzungen hinzufügen.

4. Zöpfe

Zöpfe sind eine einfache Möglichkeit Knotendiagramme durch eine Sequenz von ganzen Zahlen darzustellen. Vorallem wenn man mit Computern arbeiten will, ist diese Schreibweise von Knoten sehr hilfreich, da man diese sehr leicht in Programme eingeben und modifizieren kann.

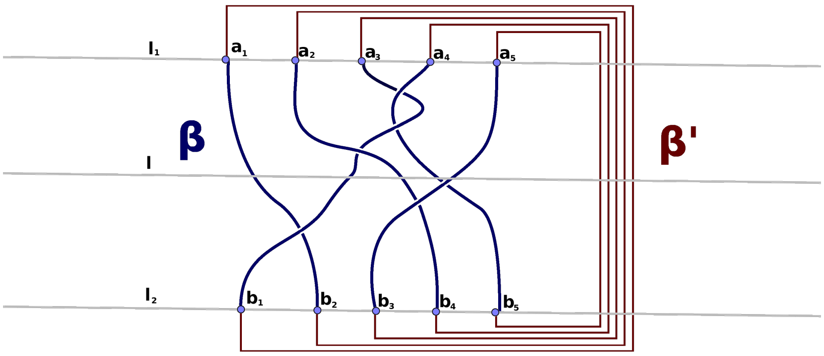


Abbildung 5: 5-Zopf mit 6 Kreuzungen und Zopfwort $[1;3;4;-2;3;-3]$

Definition 6. Seien $A = \{a_1; a_2; ...; a_n\}$ und $B = \{b_1; b_2; ...; b_n\}$ Mengen von Punkten auf zwei parallelen Linien l_1 und l_2 auf der Ebene P. Ein n-**Zopf** β ist eine Menge von Kurven, die genau einen Endpunkt in A und B haben, sodass irgendeine Linie l parallel zu l_1 und l_2 jede Kurve nur in maximal einem Punkt schneidet und maximal nur durch eine Kreuzung gehen darf, sodass die Kreuzungen von unten nach oben sortiert werden können. Des Weiteren gilt für alle $0 \leq i \leq n$, dass a_i mit b_i durch durch jeweils unverknotete Bögen im $\mathbb{R}^3$ verbunden wird. Dieser Abschluss heißt β'.

Satz 3 (Alexander's Theorem)**.** *Jede Verschlingung ist der Abschluss eines Zopfes.*

Definition 7. Zur Kodierung bekommt der Strang, der bei a_k startet die Nummer k. Wenn Strang k Strang $k-1$ kreuzt werden die Nummern getauscht und die Kreuzung bekommt einen ganzzahligen Wert w zugewiesen mit dem Betrag $k-1$. Das Vorzeichen dieses Wertes wird dadurch bestimmt, ob die Kreuzung negativ oder positiv ist. Das **Zopfwort** ist die Kodierung des Zopfes. Hierbei werden die Werte der Kreuzungen, startend bei dem untersten Knoten und endend bei dem obersten, in eine Liste geschrieben. Sei l hierbei die Anzahl der Kreuzungen, so gilt: Die Länge des Zopfwortes ist l und $\beta = [w_1; w_2; ...; w_l]$.

Definition 8. Gegeben seien 2 Zopfwörter $\beta_1 = [w_1; w_2; ...; w_l]$ und $\beta_2 = [v_1; v_2; ...; v_m]$ vom selben Index. Dann definieren wir das **Produkt** $\beta_1 \cdot \beta_2$ als

$$\beta_1 \cdot \beta_2 = [w_1; w_2; ...; w_l; v_1; v_2; ...; v_m].$$

Als nächstes werden wir spezielle Klassen von Zöpfen diskutieren. Unser Interesse in diesen Zöpfen ist, dass man für die Abschlüsse dieser speziellen Zöpfe das 4-Geschlecht sofort ablesen kann und keine komplizierteren Rechnung mehr durchführen muss.

Definition 9.

- Ein Zopf $P = [w_1; w_2; ...; w_l]$ heißt **positiv**, wenn alle w_i positiv sind.
- Ein Zopf QP heißt **quasi-positiv**, wenn man ihn schreiben kann als

  $$QP = \prod_{i=1}^{l} q_i \cdot P_i \cdot q_i^{-1},$$

  wobei die P_i postive Zöpfe sind und $q_i^{-1} = [-w_1; -w_2; ...; -w_l]$ das **Inverse** von $q_i = [w_1; w_2; ...; w_l]$ ist.

- Ein Zopf heißt **stark quasi-positiv** (SQP), wenn er ein quasi-positiver Zopf ist mit der extra Eigenschaft, dass jedes q_i von der Form $q_i = [w_k; (w_k - 1); (w_k - 2); ...; (w_k - l)]$ ist.

Beispiel 1. $P = [2; 3; 4]$

$QP = [2; -1; 2; 3; 4; -2; 1; -4; 1; 4]$

$SQP = [2; 1; 2; 3; 4; -2; -1; -4; 1; 4]$

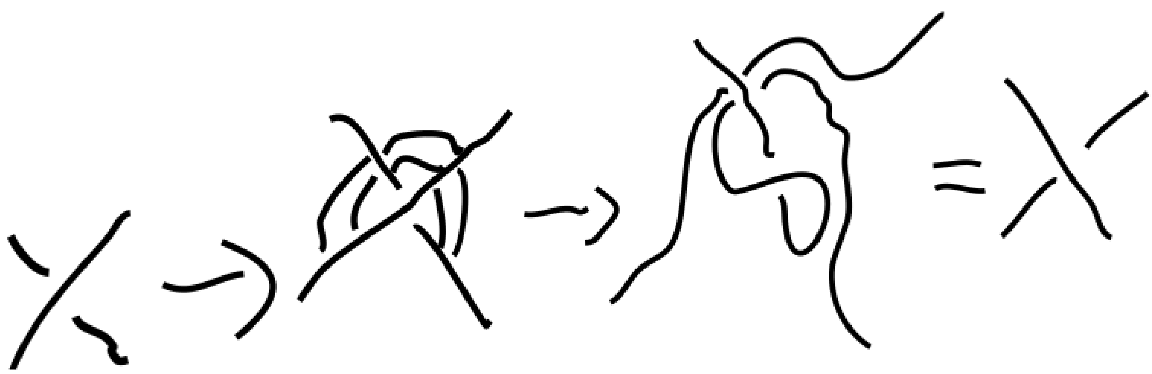
Satz 4. *Falls L der Abschluss eines quasi-positiven Zopfes $\prod_{i=1}^{l} q_i \cdot P_i \cdot q_i^{-1}$ von Index n ist, so gilt für die Euler-Characteristic $\chi_4(L)$ der Fläche, welches das 4-Geschlecht von L realisiert*

$$\chi_4(L) = n - l.$$

5. Beweisstrategie des Problems

Die Beweisidee ist ein Widerspruchsbeweis. Man nehme also an, dass das 4-Geschlecht von $W = W_- T_+$ gleich 0 ist. Dann berandet W eine 2-Scheibe D^2 in D^4. Nun führe man n Kreuzungswechsel an diesem Knoten durch und nenne den neu enstandenen Knoten K.

Lemma 1. *Das Vertauschen einer Kreuzung kann auch mithilfe von Hinzufügen von zwei Bändern erfolgen, etwa wie im Folgenden dargestellt:*



Lemma 2. *Durch das Ausrechnen der Euler-Charakteristik und somit auch des 4-Geschlechts kann man zeigen, dass beim Hinzufügen von solchen Bändern das Geschlecht eines Knotens um höchstens* 1 *erhöht wird.*

Es folgt also, dass es eine Fläche Σ von Geschlecht n gibt, deren Rand W und K ist. Da wir angenommen haben, dass W eine Scheibe berandet, kann man diese Scheibe an Σ ankleben und erhält eine Seifert-Fläche von K im 4-Ball von Geschlecht n, so wie in der Abbildung zu sehen. Deswegen folgt, da wir nun eine Seifert-Fläche für K mit Geschlecht n gefunden haben, dass das 4-Geschlecht von K höchsten n sein kann

$$g_4(K) \leq n.$$

Das Ziel ist es nun einen Knoten K zu finden, der sich vom Knoten W durch n Kreuzungswechsel unterscheidet und von dem wir wissen, dass er 4-Geschlecht $g_4(K)$ größer als n hat. Dadurch kommt es

zum Widerspruch, da in unserem Fall das 4-Geschlecht von K höchstens n sein kann und wir könnten folgern, dass W keine Scheibe im 4-Ball beranden kann und somit 4-Geschlecht 1 hat.

Hierbei ergibt sich jetzt natürlich das Problem, dass man das 4-Geschlecht eines Knotens K im Allgemeinen nicht berechnen kann. Denoch gibt es spezielle Klassen von Knoten bei denen dies möglich ist. Zum Beispiel sind alle Knoten mit höchsten 12 Kreuzungen und deren 4-Geschlechter in der KnotInfo-Bibliothek aufgelistet (https://knotinfo.math.indiana.edu/). Eine andere Möglichkeit ist es, einen Knoten K wie oben zu finden, der Abschluss eines positiven, quasipositiven oder stark-quasipositiven Zopfes ist, von denen wir das 4-Geschlecht leicht mittels Satz 4 berechnen können.