Ein Unendlich über Unendlich großer Baum bei einem Münzwurfspiel

Teilnehmende:

2 Teilnehmende des	Andreas-Gymnasiums
2 Teilnehmende des	Heinrich-Hertz-Gymnasiums
2 Teilnehmende des	Herder-Gymnasiums

mit tatkräftiger Unterstützung durch:

Charlotte Schwerdtner	Humboldt-Universität zu Berlin

Gruppenleiter:

Pia Keckert	Andreas-Gymnasium
Christian Thielecke	Andreas-Gymnasium

Vermutlich hat jeder schon einmal den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \Sigma, \mathcal{P})$ für einen einfachen Münzwurf mit fairer Münze aufgestellt. W sei Wappen und Z sei Zahl, dann können wir das folgende Modell aufstellen.

$$\Omega = \{W;\, Z\}; \qquad \Sigma = \{\{W\};\ \{Z\};\ \{W;\ Z\};\ \emptyset\}$$

$$\mathcal{P}:\ \Sigma\ \rightarrow [0,1] \subset \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \mathcal{P}(x) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } x = \emptyset \\ \frac{1}{2}, & \text{wenn } x = \{W\},\ \{Z\} \\ 1, & \text{wenn } x = \{W, Z\} \end{cases}$$

Was passiert aber, wenn wir dieses Spiel ein wenig abwandeln und die Unendlichkeit zulassen?

1. Einleitung

In diesem Bericht behandeln wir ein bestimmtes Münzwurf-Szenario: Zwei Personen werfen so lange eine Münze, bis eines von zwei vorher festgelegten Tripeln erreicht wird. Bei diesen zwei Tripeln handelt es sich um Wappen-Wappen-Wappen (WWW) und Wappen-Zahl-Wappen (WZW). Dabei wird zusätzlich gezählt, wie viele Münzwürfe nötig sind, bis eines der Tripel auftritt und das Spiel beendet. Die Anzahl der Würfe ist n, wobei n ein beliebiges Element der natürlichen Zahlen ist. Zu diesem Spiel untersuchen wir zwei Fragen.

- Mit welcher Wahrscheinlichkeit treten die zwei Tripel jeweils auf?
- Und wie viele Würfe werden im Durchschnitt erforderlich sein, damit eine Spielrunde endet?

Um ein besseres Gespür für das Problem zu bekommen, wurden zunächst ein paar Versuche durchgeführt, in denen das Münzwurfspiel praktisch durchgespielt wurde. Dabei wurden 24 Runden gespielt, von denen jedes Tripel genau 12 Mal gewonnen hat. Die Wahrscheinlichkeit für WWW und WZW würde also mit dieser Messung als etwa 50 % geschätzt werden. Die durchschnittliche Länge der gespielten Runden lag bei rund 7,167.

Um genauere Näherungswerte für die Wahrscheinlichkeiten und den Erwartungswert zu erhalten, wurde das Spiel auch mithilfe eines Computerprogramms mit 100 Millionen Durchführungen simuliert. Dafür wurde die Programmiersprache Kotlin und der folgende Code verwendet.

```
const val TIMES = 100_000_000

fun main() {
    var totalTries = 0
    var wwwWins = 0
    var wzwWins = 0
    repeat(TIMES) {
        val res = game()
        val str = res.joinToString("") { if (it) "W" else "Z" }
        if (str.endsWith("WWW")) {
            wwwWins++
        } else if (str.endsWith("WZW")) {
            wzwWins++
        }
        totalTries += res.size
    }
    println("Durchschnittlich ${totalTries * 1.0 / TIMES} Versuche bis Abbruch")
    println("WWW gewinnt $wwwWins mal (${wwwWins * 100.0 / TIMES} %)")
    println("WZW gewinnt $wzwWins mal (${wzwWins * 100.0 / TIMES} %)")
}

fun game(): List<Boolean> = game(emptyList())

fun game(recent: List<Boolean>): List<Boolean> {
    val random = Random.nextBoolean()
    if (random) { // Wappen
        val last = recent.takeLast(2)
        if (last.size >= 2) {
            if (last[0]) {
                return recent + random
            }
        }
    }
    // Zahl
    return game(recent + random)
}
```

Das Programm lieferte als Schätzer für die Wahrscheinlichkeiten für WWW ungefähr 40 % und für WZW 60 %, während die durchschnittliche Spieldauer etwa 6,8 betrug.

Diese Ergebnisse weichen im Vergleich zu denen der analogen Spieldurchführung bei den Wahrscheinlichkeiten deutlich voneinander ab, während die durchschnittlichen Spieldauern relativ nah beieinander liegen. Zurückzuführen ist diese Diskrepanz darauf, dass 24 Durchläufe nicht genügend Versuche sind, um gute Schätzer für die Wahrscheinlichkeiten zu liefern. Eine größere Anzahl von Durchführungen führt mit hoher Wahrscheinlichkeit zu deutlich genaueren Werten.

2. Mathematische Grundlagen

Nun werden zunächst alle mathematischen Grundlagen für die Bestimmung und Berechnung der Wahrscheinlichkeiten und des Erwartungswerts eingeführt.

2.1. Geometrische Reihen

Satz 1 (Geometrische Reihe)**.** *Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$. Dann gilt* $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$.

Beweis: Es ist mit $|q| < 1$. Wir berechnen

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{(1 + q + q^2 + ... + q^n) \cdot (1-q)}{1-q} = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-q}.$$

$\square$

Satz 2 (Erweiterte geometrische Reihe)**.** *Sei $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| < 1$ und $a_1,\ a_2,\ a_3 \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\sum_{k=a_1}^{\infty} (k + a_2) \cdot q^{k+a_3} = \frac{q^{a_1+a_3}}{1-q} \cdot \left(a_1 + a_2 - 1 + \frac{1}{1-q}\right).$$

Beweis: Wir nutzen denselben Trick.

$$\begin{aligned}\sum_{k=a_1}^{n} (k + a_2) \cdot q^{k+a_3} &= \Big((a_1 + a_2) \cdot q^{a_1+a_3} + (a_1 + a_2 + 1) \cdot q^{a_1+a_3+1} + ... + (n + a_2) \cdot q^{n+a_3}\Big) \cdot \frac{1-q}{1-q} \\ &= \left((a_1 + a_2) \cdot q^{a_1+a_3} + \left(\sum_{k=a_1+1}^{n} q^{k+a_3}\right) + (n + a_2) \cdot q^{n+1+a_3}\right) \cdot \frac{1}{1-q}\end{aligned}$$

Es ist $\sum\limits_{k=a_1+1}^{n} q^{k+a_3} = q^{a_1+1+a_3} \cdot \sum\limits_{k=0}^{n-a_1-1} q^k = q^{a_1+a_3+1} \cdot \frac{1-q^{n-a_1}}{1-q}$. Dies setzen wir ein und erhalten das gewünschte Resultat.

$$\begin{aligned}\sum_{k=a_1}^{n} (k + a_2) \cdot q^{k+a_3} &= \frac{(a_1 + a_2) \cdot q^{a_1+a_3} + \frac{q^{a_1+a_3+1} - q^{n+a_3+1}}{1-q} + (n + a_2) \cdot q^{n+1+a_3}}{1-q} \\ &\overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{(a_1 + a_2) \cdot q^{a_1+a_3} + \frac{q^{a_1+a_3+1}}{1-q}}{1-q} \\ &= \frac{q^{a_1+a_3}}{1-q} \cdot \left(a_1 + a_2 + \frac{q}{1-q}\right) = \frac{q^{a_1+a_3}}{1-q} \cdot \left(a_1 + a_2 - 1 + \frac{1}{1-q}\right)\end{aligned}$$

$\square$

2.2. Binomischer Satz und binomische Reihen

Bemerkung 1 (Binomialkoeffizient)**.** Wir erinnern uns an die Definition und einige Eigenschaften des Binomialkoeffinzienten für $n, k \in \mathbb{N}; 0 < k \leq n$.

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}; \quad \binom{n}{0} = 1; \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}; \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Ebenso ist der Binomische Lehrsatz aus der Schule bekannt. Sei $n, k \in \mathbb{N}; 0 < k \leq n$. Dann gilt

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}.$$

Satz 3 (Binomische Summe)**.** *Sei $q \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot q^k = (1+q)^n.$$

Beweis: Für den Beweis nutzen wir den Binomischen Lehrsatz.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot q^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot q^k \cdot 1^{n-k} \overset{Bin.L.}{=} (1+q)^n$$

□

Satz 4 (Erweiterte binomische Summe)**.** *Sei $q \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k} \cdot q^k = q \cdot n \cdot (1+q)^{n-1}.$$

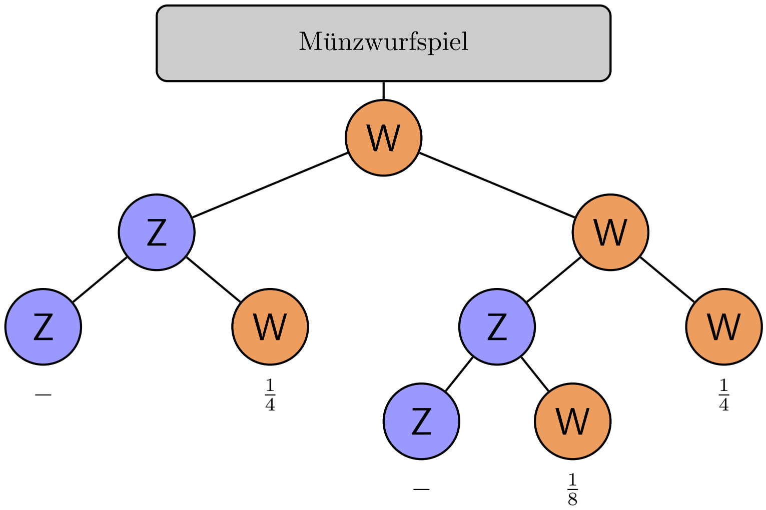
Beweis: Wir kürzen den Faktor k geschickt und nutzen die Binomische Summe.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k \cdot \binom{n}{k} \cdot q^k &= \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot q^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{n!}{(k-1)! \cdot (n-k)!} \cdot q^k \qquad | \ \ell := k-1 \\
&= \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{n!}{\ell! \cdot ((n-1)-\ell)!} \cdot q^{\ell+1} \\
&= n \cdot q \cdot \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} \cdot q^\ell \\
&= n \cdot q \cdot (1+q)^{n-1}
\end{aligned}$$

□

3. Wahrscheinlichkeiten

Da die relevanten mathematischen Grundlagen geklärt wurden, kommen wir nun zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten, mit denen die einzelnen Tripel auftreten.



Anhand des oben abgebildeten Baudiagramms lassen sich die Wahrscheinlichkeiten verschiedener Pfade bestimmen. Dabei gehen wir zunächst davon aus, dass der erste Wurf Wappen ist, was mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ der Fall ist. So ist in diesem Fall abzulesen, dass WWW oder WZW nach drei Runden mit einer Wahrscheinlichkeit von jeweils $1/4$ auftreten. Da das Spiel in diesem Fall beendet wäre oder für den linken Pfad, der aufgrund von zwei aufeinanderfolgenden Z keine Gewinnoption durch einen weiteren Wurf bietet, besteht an diesen Stellen entweder keine Fortsetzungsmöglichkeit oder diese ist vorerst zu vernachlässigen. Hängt man an der rechten Seite an das Z, welches in der dritten Runde geworfen wurde, einen weiteren Durchgang an, so kommt es entweder zu einem Sieg oder das Spiel läuft mit einem doppeltem Z weiter, was einen Sieg in einem nächsten Durchgang ausschließen würde und einen erneuten Start mit W für einen Sieg erfordert. Für einen Sieg müsste also an die Z erneut der oben gezeigte Baum ansetzen, damit eines der erforderlichen Szenarien eintreten könnte.

Daraus folgt die nachstehende Rechnung zur Bestimmung der Wahrscheinlichkeiten.

$$p := \mathrm{P}(\text{WWW gewinnt} \mid \text{erster Wurf W}) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8}\cdot\frac{1}{4} + \left(\frac{3}{8}\right)^2\cdot\frac{1}{4} + \left(\frac{3}{8}\right)^3\cdot\frac{1}{4} + \ldots = \frac{1}{4}\cdot\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{8}\right)^n}_{=\frac{1}{1-\frac{3}{8}}} = \frac{2}{5}$$

Da der erste (die ersten beiden, die ersten drei, ...) Wurf natürlich auch Zahl sein kann, erhalten wir insgesamt

$$\mathbb{P}(\text{WWW gewinnt}) = \frac{1}{2}\cdot p + \left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot p + \left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot p + \ldots = \frac{p}{2}\cdot\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k}_{=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}} = p = \frac{2}{5}.$$

Analog bestimmen wir die Wahrscheinlichkeit für den Gewinn durch WZW.

$$\widetilde{p} := \mathbb{P}(\text{WZW gewinnt} \mid \text{erster Wurf W}) = \underbrace{\frac{3}{8}}_{(i)} + \underbrace{\frac{3}{8}\cdot\frac{3}{8}}_{(ii)} + \underbrace{\left(\frac{3}{8}\right)^2\cdot\frac{3}{8}}_{(iii)} + \left(\frac{3}{8}\right)^3\cdot\frac{3}{8} + \ldots = \frac{3}{8}\cdot\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{8}\right)^n}_{=\frac{1}{1-\frac{3}{8}}} = \frac{3}{5}$$

Und folglich

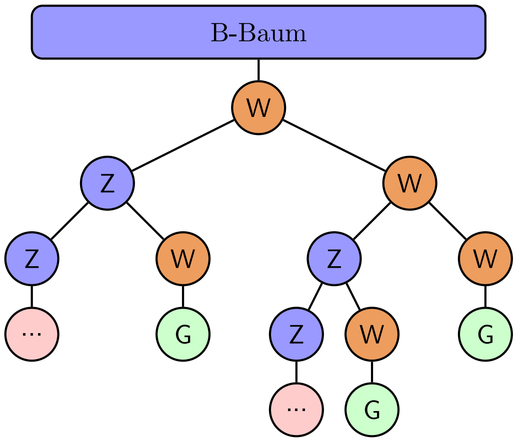
$$\mathbb{P}(\text{WWW gewinnt}) = \frac{1}{2} \cdot \widetilde{p} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \widetilde{p} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \widetilde{p} + \ldots = \widetilde{p} = \frac{3}{5}.$$

Wir sehen hier auch, dass sich beide Wahrscheinlichkeiten zu 1 addieren. Das ist vernünftig, denn einer muss ja irgendwann gewinnen.

4. Erwartungswert

4.1. Motivation

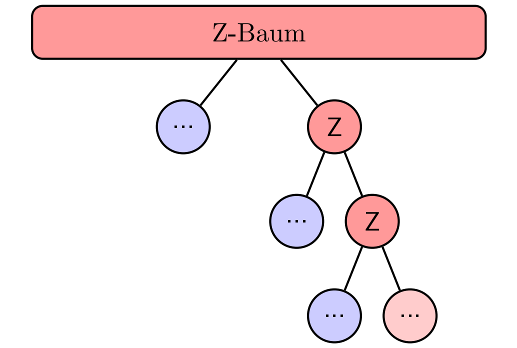
Um den Erwartungswert der Spiellänge berechnen zu können, benötigen wir einen Blick auf das Problem mit einem unendlich über unendlich großen Baum. Um diese Struktur darstellen zu können, nutzen wir Teilbäume B und Z.



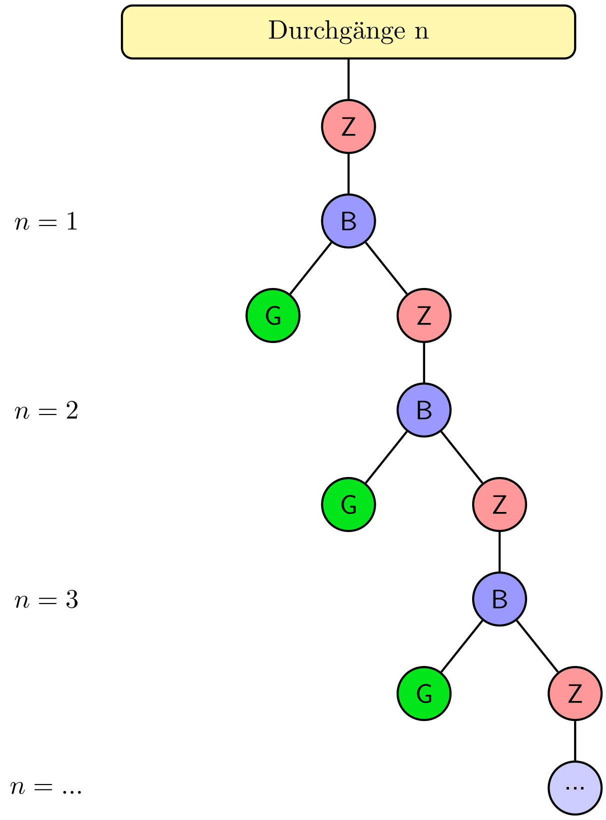
Der B-Baum enthält

- alle Pfade, die zu einem Gewinn führen,
- alle Pfade, die zu einer Wiederholung des Spiels führen.

Durch ein W gelangen wir in den B-Baum. *G* markiert Gewinn und damit Spielende und „…“ bedeutet eine Wiederholung des Durchlaufs, d.h. einen Übergang zum Z-Baum.



Der Z-Baum beschreibt die Anzahl an Würfen, die hintereinander Zahl als Ergebnis haben – dies kann auch 0 sein. Sobald Wappen geworfen wird, befinden wir uns im B-Baum. Zu Beginn des Spiels und nach jedem neuen Durchgang befinden wir uns im Z-Baum.



Der n-te Durchgang beginnt im Z-Baum und endet nach Durchlaufen eines B-Baums bei einem Gewinn G (Spielende), falls eins der beiden gewünschten Ereignisse $\{(WWW);\ (WZW)\}$ auftritt, bzw. führt andernfalls über den B-Baum in den nächsten Z-Baum, und damit in den nächsten Durchgang. Dies geht so weiter, bis irgendwann ein gewünschtes Ereignis auftritt.

Den Erwartungswert unterteilen wir in Teilsummen $M(n)$, wobei n die Anzahl der durchlaufenen B-Bäume ist. Dabei versuchen wir, uns eine allgemeine Formel herzuleiten, die uns den Erwartungswert liefert. Zunächst definieren wir für bessere Lesbarkeit den „Teilerwartungswert“ für einen Sieg, wenn genau ℓ Z-Bäume und ein B-Baume durchlaufen werden, und nennen ihn $\widetilde{\alpha}(\ell)$. Dabei haben wir zwei Pfade, die je mit Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{8} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\ell}$ nach $3+\ell$ Münzwürfen zum Gewinn führen, und einen Pfad mit Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{16} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\ell}$, der nach $4+\ell$ Münzwürfen zum Gewinn führt.

$$\widetilde{\alpha}(\ell) = 2 \cdot \left((3+\ell) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\ell+3}\right) + (4+\ell) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\ell+4}$$

Wir substituieren $k = \ell + 3$, damit ist k mindestens 3, und wir setzen

$$\alpha(k) = 2 \cdot (k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k}) + (k+1) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}.$$

Für die Teilsumme $M(1)$, bei der wir die Längen der Gewinnpfade nach den Wahrscheinlichkeiten gewichten, wenn genau ein B-Baum durchlaufen wird, erhalten wir unter Beachtung, dass vorher beliebig viele (wir summieren über die Anzahl k) Z-Bäume durchlaufen werden können,

$$M(1) = \sum_{k=3}^{\infty} \alpha(k).$$

Der nächste Fall, der betrachtet wird, ist $n = 2$, d.h., es werden 2 B-Bäume und beliebig viele Z-Bäume durchlaufen. Hier kann das Spiel nach frühestens 6 Runden $(2 \cdot 3)$ enden, da zwei B-Bäume durchlaufen werden, deren kürzeste Pfade für die Weiterführung des Spiels jeweils eine Länge von 3 haben.

Als nächstes muss ein k_1 eingeführt werden, da Z-Bäume sowohl vor dem ersten als auch zwischen dem ersten und dem zweiten B-Baum liegen können. Ein weiterer Fall muss ebenfalls noch mit einbezogen werden, denn derzeit wird davon ausgegangen, dass im ersten B-Baum der kürzere Pfad mit Länge 3 durchlaufen wurde. Allerdings gibt es auch einen Viererpfad, nach dem das Spiel fortgesetzt werden muss, da noch kein Sieg eingetreten ist. Daher wird eine zweite, grundlegend gleich Summe hinzugefügt, bei der k um 1 größer ist als bei der ersten Summe.

$$M(2) = \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k=3\cdot 2+k_1}^{\infty} \alpha(k) \right) + \left(\sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k=3\cdot 2+1+k_1}^{\infty} \alpha(k) \right)$$

Um die Änderung zu verallgemeinern und auch auf höhere n anwendbar zu machen, fassen wir die beiden Summanden zu einer Summenformel zusammen, indem wir eine Laufvariable i einführen, die für die Anzahl der Viererpfade steht, die in den vorherigen B-Bäumen durchlaufen wurden. Es folgt der Term:

$$M(2) = \sum_{i=0}^{2-1} \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k=3\cdot 2+i+k_1}^{\infty} \alpha(k).$$

Der Fall $n = 3$ ist ähnlich aufgebaut wie der vorherige. Das Spiel endet nach minimal 9 Runden $(3 \cdot 3)$, da drei B-Bäume mit jeweils mindestens drei Würfen durchlaufen werden. i läuft jetzt bis $2 = 3 - 1$, da vor dem aktuellen B-Baum bereits zwei Bäume und somit insgesamt entweder keine $(i = 0)$, einer $(i = 1)$ oder zwei $(i = 2)$ Viererpfade durchlaufen wurden. Allerdings gibt es für $i = 1$ zwei Möglichkeiten: Viererpfad im ersten Baum und Dreierpfad im zweiten $(4; 3)$ **oder** Dreierpfad im ersten, Viererpfad im zweiten $(3; 4)$. Bei $n = 4$ wird die Problematik noch deutlicher. Hier läuft i bis 3. Die Anzahl der Möglichkeiten für die Positionen der Viererpfaden erhalten wir durch die Binomialkoeffizienten. Allgemein werden i aus $(n-1)$ B-Bäumen ausgewählt, in denen ein Viererpfad durchlaufen wird.

Zur Berechnung der Möglichkeiten eignet sich also der Binomialkoeffizient $\binom{n-1}{i}$, der als Faktor mit den inneren Summen multipliziert wird, um tatsächlich alle Möglichkeiten miteinzubeziehen. Außerdem kommt ein k_2 dazu, da zwischen dem zweiten und dritten B-Baum wieder Z-Bäume durchlaufen werden können.

$$M(3) = \sum_{i=0}^{3-1} \binom{3-1}{i} \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \sum_{k=3\cdot 3+k_1+k_2+i}^{\infty} \alpha(k)$$

Aus den ersten drei betrachteten Fällen lässt sich jetzt eine allgemeine Formel für $n \in \mathbb{N}$ herleiten. Jetzt läuft i bis $n - 1$, da vor dem aktuellen Baum $n - 1$ B-Bäume liegen, in denen jeweils der Dreier- oder der Viererpfad durchlaufen werden kann. Wie oben erklärt, ist der Binomialkoeffizient $\binom{n-1}{i}$ notwendig, um alle möglichen Kombinationen davon zu betrachten. Dazu kommen n verschiedene ks (k und k_1 bis k_{n-1}), um alle vorherigen Z-Bäume zu betrachten.

$$M(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_{n-1}=0}^{\infty} \left(\sum_{k=3n+i+\sum\limits_{j=0}^{n-1} k_j}^{\infty} \alpha(k) \right)$$

Daraus ergibt sich für den Erwartungswert:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=1}^{\infty} M(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_{n-1}=0}^{\infty} \left(\sum_{k=3n+i+\sum\limits_{j=0}^{n-1} k_j}^{\infty} \alpha(k) \right).$$

Dieser Term muss nun bestimmt werden.

4.2. Berechnung

Diesen Term für den Erwartungswert wollen wir nun berechnen. Zunächst nutzen wir für die inneren Summen die erweiterte geometrische Reihe.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=3n+i+\sum\limits_{j=1}^{n-1} k_j}^{\infty} 2k \left(\tfrac{1}{2}\right)^k &= 2 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{3n+i+\sum\limits_{j=1}^{n-1} k_j}}{1-\frac{1}{2}} \cdot \left(3n+i+\sum_{j=1}^{n-1} k_j - 1 + \frac{1}{1-\frac{1}{2}}\right) \\
&= 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+i+\sum\limits_{j=1}^{n-1} k_j - 1} \cdot \left(3n+i+\sum_{j=1}^{n-1} k_j + 1\right) \\
&= 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+i+\sum\limits_{j=1}^{n-1} k_j - 1} \cdot \left(3n+i+\sum_{j=1}^{n-1} k_j + 1\right)
\end{aligned}$$

Für die zweite innere Summe erhalten wir analog

$$\sum_{k=3n+i+\sum\limits_{j=1}^{n-1} k_j}^{\infty} (k+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3n+i+\sum\limits_{j=1}^{n-1} k_j + 1 - 1} \cdot \left(3n+i+\sum_{j=1}^{n-1} k_j + 1 + 1\right).$$

So berechnen wir nacheinander die jeweils inneren Summen mit der erweiterten geometrischen Reihe.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_{n-1}=0}^{\infty} \Bigg(2 \cdot \left(3n+i+\sum_{j=1}^{n-1} k_j + 1\right) \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{3n+i+\sum\limits_{j=1}^{n-1} k_j - 1} \\
&\qquad + \left(3n+i+\sum_{j=1}^{n-1} k_j + 1 + 1\right) \left(\tfrac{1}{2}\right)^{3n+i+\sum\limits_{j=1}^{n-1} k_j + 1 - 1} \Bigg) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \sum_{k_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{k_{n-2}=0}^{\infty} \Bigg(2 \cdot \left(3n+i+\sum_{j=1}^{n-2} k_j + 2\right) \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{3n+i+\sum\limits_{j=1}^{n-2} k_j - 2} \\
&\qquad + \left(3n+i+\sum_{j=1}^{n-2} k_j + 1 + 2\right) \left(\tfrac{1}{2}\right)^{3n+i+\sum\limits_{j=1}^{n-2} k_j + 1 - 2} \Bigg) \\
&= \ldots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \left(2 \cdot (3n+i+n) \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{3n+i-n} + (3n+i+1+n)\left(\tfrac{1}{2}\right)^{3n+i+1-n} \right)
\end{aligned}$$

Wir fassen weiter zusammen und ziehen Faktoren, die unabhängig von i sind, aus der inneren Summe heraus.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \left(2 \cdot (4n+i) \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2n+i} + (4n+i+1)\left(\tfrac{1}{2}\right)^{2n+i+1} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \left(2 \cdot (4n+i) \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{i} + (4n+i+1)\left(\tfrac{1}{2}\right)^{i+1} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \left(\left(10n+\tfrac{1}{2}\right) \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{i} + \tfrac{5}{2}\, i \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{i} \right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2n} \cdot \left(\left(10n+\tfrac{1}{2}\right) \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{i} + \tfrac{5}{2} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i}\, i \cdot \left(\tfrac{1}{2}\right)^{i} \right)
\end{aligned}$$

Nun verwenden wir die Binomische Summe und die erweiterte Binomische Summe.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^{2n} \cdot \left(\left(10n + \tfrac{1}{2}\right) \cdot \left(\tfrac{3}{2}\right)^{n-1} + \tfrac{5}{4}(n-1) \cdot \left(\tfrac{3}{2}\right)^{n-2}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{1}{4}\right)^{n} \cdot \left(\left(\tfrac{20}{3}n + \tfrac{2}{6}\right) \cdot \left(\tfrac{3}{2}\right)^{n} + \tfrac{20}{36}(n-1) \cdot \left(\tfrac{3}{2}\right)^{n}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{3}{8}\right)^{n} \cdot \left(\tfrac{65}{9}n - \tfrac{2}{9}\right) \\ &= \tfrac{65}{9} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \left(\tfrac{3}{8}\right)^{n} - \tfrac{2}{9} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{3}{8}\right)^{n}\end{aligned}$$

Dies sind eine geometrische Reihe und eine erweiterte geometrische Reihe.

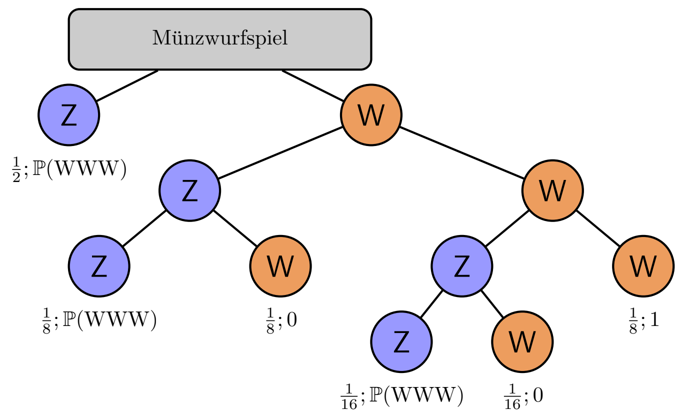
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \tfrac{65}{9} \cdot \frac{\frac{3}{8}}{\left(1-\frac{3}{8}\right)^2} - \tfrac{2}{9} \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{3}{8}} - 1\right) = \tfrac{65}{9} \cdot \tfrac{3}{8} \cdot \tfrac{64}{25} - \tfrac{2}{9} \cdot \tfrac{3}{5} \\ &= 6,8\end{aligned}$$

5. Alternativer Lösungsweg

5.1. Gewinnwahrscheinlichkeiten WWW und WZW

Betrachten wir abermals das Baumdiagramm aus Abschnitt 3. Neben der Wahrscheinlichkeit für jeden Pfad durch den Baum geben wir die Wahrscheinlichkeit p an, dass WWW vor WZW auftaucht, wenn dieser Pfad bereits durchlaufen wurde. Ist eines der Tripel Teil dieses Pfades, so ist diese Wahrscheinlichkeit offensichtlich 0 beziehungsweise 1.

Die bedeutende Beobachtung ist, dass die Wahrscheinlichkeit p, dass das Tripel WWW vor WZW auftritt nach dem Auftreten zweier Z gleich ist wie am Anfang des Spiels, also $\mathbb{P}(\text{WWW})$. Dies ist der Fall, da die Abfolge ZZ nicht Teil eines der gesuchten Tripel ist und eines der Tripel in jedem Fall mit einem späteren W beginnen muss – ganz so, wie am Anfang des Spiels ein Tripel nur mit einem W beginnen kann. Diese Wahrscheinlichkeit am Anfang des Spiels ist ferner gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten p gewichtet mit der Wahrscheinlichkeit der Pfade und kann wie folgt berechnet werden.

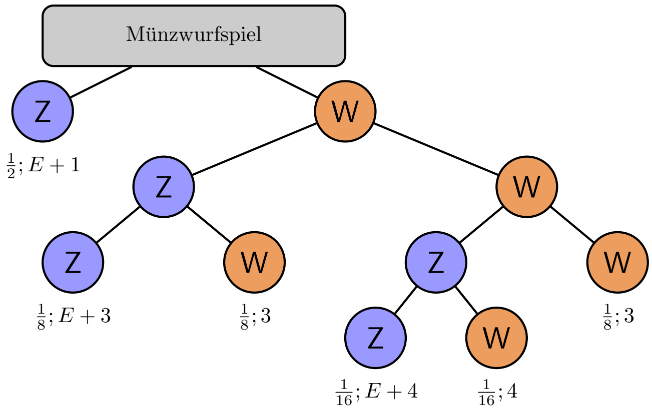


$$\mathbb{P}(\text{WWW}) = \frac{1}{2} \cdot \mathbb{P}(\text{WWW}) + \frac{1}{8} \cdot \mathbb{P}(\text{WWW}) + \frac{1}{8} \cdot 0 + \frac{1}{16} \cdot \mathbb{P}(\text{WWW}) + \frac{1}{16} \cdot 0 + \frac{1}{8} \cdot 1$$

Umstellen nach der Wahrscheinlichkeit ergibt $\mathbb{P}(\text{WWW}) = \frac{2}{5} = 0,4$.

5.2. Erwartungswert der Spieldauer

Ähnlich kann man auch den Erwartungwert für die Spieldauer E berechnen. Dazu betrachten wir abermals den obigen Baum; diesmal mit der für jeden Pfad zu erwartenden Spieldauer.



Wieder enthalten die Erwartungwerte bestimmter Pfade E, diesmal allerdings nicht allein. Für jeden Durchlauf des Baumes steigt die Anzahl der Münzwürfe. Damit ist der Erwartungswert für die Spieldauer gegeben durch

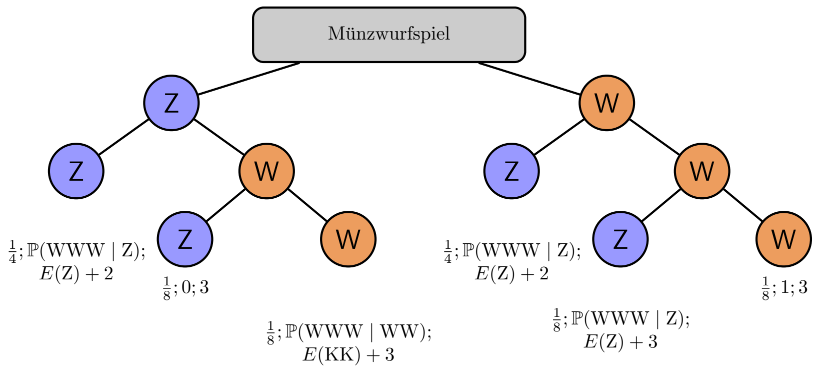
$$E = \frac{1}{2}(E+1) + \frac{1}{8}(E+3) + \frac{1}{8}\cdot 3 + \frac{1}{16}\cdot(E+4) + \frac{1}{16}\cdot 4 + \frac{1}{8}\cdot 3 = \frac{17}{8} + \frac{11}{16}\cdot E$$

und wir erhalten durch Umstellen nach dem Erwartungswert $E = \frac{34}{5} = 6,8$.

5.3. Verallgemeinerung

Die bisherigen Ergebnisse sind sehr spezifisch, sie beziehen sich nur auf die Tripelkombination aus WWW und WZW. Es stellt sich damit die Frage, inweweit die obigen Methoden geeignet sind, andere Fälle und allgemeinere Formulierungen des Problems zu lösen.

So einfach wie das obige Beispiel lassen sich tatsächlich nur wenige Fälle lösen. Die Strategie scheitert z.B. schon, wenn die beiden ersten Würfe der Tripel verschieden sind, wie bei WWW und ZWZ. Nach keinem Wurf hat man dann wieder dieselbe Ausgangssituation wie am Anfang, da jeder Wurf der Beginn eines der Tripel sein könnte. Allerdings kann man die Strategie stark verallgemeinern, wenn man Variablen für die Wahrscheinlichkeiten bzw. Erwartungswerte ausgehend von bestimmten Situationen, wie zuerst einmal Wappen oder zweimal Zahl, aufstellt, und dann das entstehende lineare Gleichungssystem löst.



Hier steht z.B. $\mathbb{P}(\text{WWW} \mid \text{Z})$ für die Gewinnwahrscheinlichkeit von WWW, unter der Bedingung, dass bereits einmal Zahl gewürfelt wurde, und $E(Z)$ für die erwartete Spieldauer, nachdem einmal Zahl geworfen wurde.

Aus diesem Baum lassen sich nun mehrere Gleichungen ablesen, sowohl für die Gewinnwahrscheinlichkeiten, als auch für die Erwartungswerte der Länge des Spiels. Dabei müssen die Pfadwahrscheinlichkeiten und -längen abhängig von der Länge des Ausgangspfads gewählt werden.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(\mathrm{WWW}) &= (\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{8})\mathbb{P}(\mathrm{WWW} \mid \mathrm{Z}) + \tfrac{1}{8}\mathbb{P}(\mathrm{WWW} \mid \mathrm{WW}) + \tfrac{1}{8} \\
\mathbb{P}(\mathrm{WWW} \mid \mathrm{Z}) &= \tfrac{1}{2}\mathbb{P}(\mathrm{WWW} \mid \mathrm{Z}) + \tfrac{1}{4}\mathbb{P}(\mathrm{WWW} \mid \mathrm{WW}) \\
\mathbb{P}(\mathrm{WWW} \mid \mathrm{WW}) &= \tfrac{1}{2}\mathbb{P}(\mathrm{WWW} \mid \mathrm{Z}) + \tfrac{1}{2}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
E &= \tfrac{1}{4}(E(\mathrm{Z})+2) + \tfrac{1}{8}\cdot 3 + \tfrac{1}{8}(E(\mathrm{WW})+3) + \tfrac{1}{4}(E(\mathrm{Z})+2) + \tfrac{1}{8}(E(\mathrm{Z})+3) + \tfrac{1}{8}\cdot 3 \\
E(\mathrm{Z}) &= \tfrac{1}{2}(E(\mathrm{Z})+1) + \tfrac{1}{4}\cdot 2 + \frac{1}{4}(E(\mathrm{WW})+2) \\
E(\mathrm{KK}) &= \tfrac{1}{2}(E(\mathrm{Z})+1) + \tfrac{1}{2}\cdot 1
\end{aligned}
$$

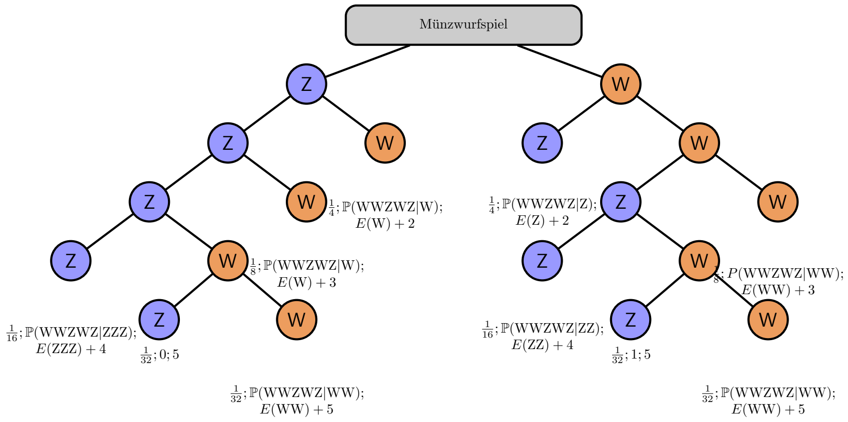
Da wir für jede Variable genau eine Gleichung aufstellen, erhalten wir ein LGS mit genau einer Lösung. In diesem Fall ergeben sich:

$$\mathbb{P}(\mathrm{WWW}) = \frac{5}{12} \quad \text{und} \quad E = \frac{35}{6} = 5.8\overline{3}.$$

Dieser verallgemeinterte Ansatz löst nicht nur alle möglichen Tripelkombinationen, sondern alle Kombinationen aus Blöcken der Länge n – die Bäume werden höchstens ein bisschen groß. Um diese Lösungen schnell finden zu können, haben wir einen Algorithmus programmiert, der für jede Kombination von Blöcken einen solchen Baum generiert, damit die Koeffizienten für das Gleichungssystem findet und dieses dann löst. Hier ist z.B. die Funktion der Klasse `MuenzwurfTreeNode`, die von einem Wurzelknoten aus einen solchen Baum generiert.

```
def generate_nodes(self, block_a, block_b, k: int = 3, prev_throws: tuple = ()):
    # k ist die Laenge der Bloecke, im Beispiel 3, der Algorithmus nimmt aber alle
    # Werte. prev_throws enthaelt die bisherigen Wuerfe, d.h. den Elternpfad.

  current_block = (*prev_throws[-k+1:], self.throw)
  # Ueberpruefe, ob jemand gewonnen hat
  if current_block == block_a:
    self.won = 'a'
  elif current_block == block_b:
    self.won = 'b'
  if self.won is not None:
    return

    # Finde die laengste Folge der letzten Wuerfe, die der Anfang eines Blocks
    # sein koennte.
  reference = current_block
  for i in range(min(len(current_block), k), -1, -1): # meist k, k-1, ..., 0
    if reference in (block_a[:i], block_b[:i]):
      break
    reference = reference[1:]

    # Falls diese nicht bis zum Wurzelknoten reicht, verweise auf den
    # entsprechenden Pfad (sonst waere es ein Zirkelschluss)
  if len(reference) < len(current_block):
    self.reference = reference
    return

    # Andernfalls generiere die beiden Folgeknoten rekursiv.
  self.zahlnode = MuenzwurfTreeNode('Z')
  self.kopfnode = MuenzwurfTreeNode('K')
  if self.throw is not None:
    prev_throws += (self.throw,)
  self.zahlnode.generate_nodes(block_a, block_b, k, prev_throws)
  self.kopfnode.generate_nodes(block_a, block_b, k, prev_throws)
```

Ist dieser Baum dann generiert, können durch eine weitere rekursive Funktion die Gleichungssysteme der Gewinnwahrscheinlichkeiten und erwarteten Spiellängen aufgestellt und gelöst werden, auch für beliebige Längen von Blöcken. Hier ist z.B. der Baum zum Spiel WWZWZ gegen ZZZWZ mit $\mathbb{P}(\text{WWZWZ}) = \frac{17}{32}$ und $E = 17$.



Mithilfe unseres Algorithmus konnten wir uns auch mal alle möglichen Tripel anschauen und die Gewinnchancen vergleichen. Hieraus haben wir folgende Tabelle aufgestellt.

vs.	ZZZ	ZZW	ZWZ	ZWW	WZZ	WZW	KKZ	WWW	Ø
ZZZ	–	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{2}$	37,7%
ZZW	$\frac{1}{2}$	–	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{10}$	55,8%
ZWZ	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3}$	–	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{12}$	48,5%
ZWW	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	–	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$	58,0%
WZZ	$\frac{7}{8}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	–	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{5}$	58,0%
WZW	$\frac{7}{12}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	–	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{5}$	48,5%
WWZ	$\frac{7}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	–	$\frac{1}{2}$	55,8%
WWW	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$	–	37,7%

Wir haben hier fast keine Muster gefunden, allein eine Symmetrie über die Diagonale ist zu erkennen. Dies liegt daran, dass man in einem Spiel einfach Zahl und Wappen bei beiden Tripeln vertauschen kann, ohne die Wahrscheinlichkeiten zu verändern. Außerdem sind auch die durchschnittlichen Gewinnwahrscheinlichkeiten unterschiedlich. Wenn ihr also das Spiel irgendwann gegen jemanden spielen wollt, habt ihr mit ZZZ bzw. WWW die niedrigsten, mit ZWW bzw. WZZ die höchsten Gewinnchancen.

5.4. Fazit

Aus unserem Seminar geht jetzt also hervor, dass die Kombination Wappen-Zahl-Wappen mit einer Wahrscheinlichkeit von 60% für das oben beschriebene Spiel eher gewinnen wird als Wappen-Wappen-Wappen. Der Erwartungswert liegt bei 6,8 Münzwürfen. Genauere Untersuchungen zu Fragestellungen in Bezug auf die Wahrscheinlichkeit (z.B. $\mathbb{P}$(Gewinn genau bei 23 Münzwürfen)) wurden jedoch nicht durchgeführt. Die in der Beschreibung angekündigte Verallgemeinerung wurde stark untersucht und Ergebnisse generiert. Leider war dann die Zeit des Seminars um und würde somit eine spannende Fortsetzung darstellen. Erste Ansätze dafür wurden bereits in dem Algorithmus, der Teil der alternativen Lösung ist, aufgenommen. Was genau bedeutet das aber jetzt alles für unser Pizza-Sushi-Problem vom Anfang?

Nach einer Vielzahl von Beweisen und einer endlos langen Summe, welche einiges an Tricks zur Entschlüsselung erforderte, kann man jetzt also sagen, dass Sie bei der nächsten Entscheidung durch einen Münzwurf mithilfe eines kleinen Spielchens die Wahrscheinlichkeit mit der ihre präferierte Mahlzeit gewinnt also durchaus anpassen könnten. Und selbst wenn Sie beschließen, dass eine derartige Anpassung nicht notwendig ist, selbst darauf reinfallen werden Sie nun mit Sicherheit nicht mehr.