Der Satz von Picard-Lindelöf

Teilnehmende:

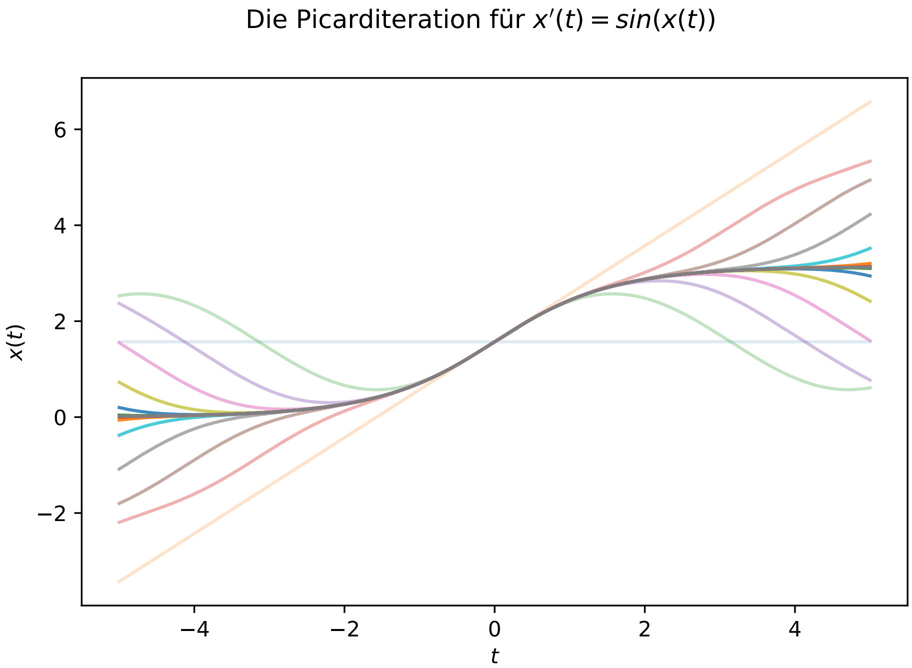
1 Teilnehmende des	Andreas-Gymnasiums
3 Teilnehmende des	Heinrich-Hertz-Gymnasiums
4 Teilnehmende des	Herder-Gymnasiums

mit tatkräftiger Unterstützung durch:

Verda Pinar	Humboldt-Universität zu Berlin

Gruppenleiter:

Arne Geipel	Sorbonne Université, Paris
Matthias Grützner	Technische Universität Berlin, BMS



1. Einleitung

In der Sommerschule „Lust auf Mathematik“ in Blossin haben wir uns mit Differentialgleichungen beschäftigt. Diese sind zum Beispiel unumgänglich für die Physik, stellen jedoch auch aus mathematischer Perspektive ein spannendes und aktuelles Forschungsgebiet dar. Konkreter haben wir uns mit eindimensionalen Anfangswertproblemen erster Ordnung befasst. Der Satz von Picard-Lindelöf liefert Aussagen über die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung solcher Anfangswertprobleme. Dieser Bericht umfasst unsere wesentlichen Erkenntnisse der Woche in Blossin.

2. Vektorraum, Norm und Konvergenz

Die Menge der reellen Zahlen, ausgestattet mit der Addition zwischen zwei reellen Zahlen und Multiplikation einer reellen Zahl mit einer Zahl aus der Menge der reellen Zahlen, ist eine Struktur, die wir verallgemeinern möchten. Dies führt uns zur Definition des Vektorraums.

Definition 1. Es sei $V \neq \varnothing$ eine Menge für die es zwei Abbildungen

$$+ : V \times V \to V,\ (u, v) \mapsto u + v \text{ „}\textbf{Addition}\text{“}$$

und

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \to V,\ (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v \text{ „}\textbf{Skalarmultiplikation}\text{“}$$

gebe. Es heißt V Vektorraum über den reellen Zahlen ($\mathbb{R}$-Vektorraum), wenn gilt:

1. $(V, +)$ ist eine kommutative Gruppe, also
   (a) **Assoziativität:** Für alle $u, v, w \in V$ gilt $(u + v) + w = u + (v + w)$ – wir schreiben dann $u + v + w$.
   (b) Es gibt ein **linksneutrales Element** $e \in V$ mit $e + v = v$ für alle $v \in V$.
   (c) Für alle $v \in V$ gibt es ein **linksinverses Element** $v' \in V$ mit $v' + v = e$.
   (d) **Kommutativität:** Für alle $u, v \in V$ gilt $u + v = v + u$
2. Für alle $v, w \in V$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:
   (a) $(\lambda + \mu) \cdot v = (\lambda \cdot v) + (\mu \cdot v)$,
   (b) $\lambda \cdot (v + w) = (\lambda \cdot v) + (\lambda \cdot w)$,
   (c) $(\lambda\mu) \cdot v = \lambda \cdot (\mu \cdot v)$,
   (d) $1 \cdot v = v$.

   Wir schreiben $\mathbf{0}$ für das neutrale Element von $(V, +)$. Es gilt die Punkt-vor-Strich-Konvention.

Lemma 1. *Das Tripel* $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ *bildet einen Vektorraum über den reellen Zahlen. Die Abbildungen* $+$ *und* $\cdot$ *meinen hier die übliche Addition und Multiplikation auf den reellen Zahlen.*

Beweis: Die Definition eines Vektorraums ist als verträglich mit den „üblichen Rechenregeln“ konstruiert. Für das (links-)neutrale Element gilt $e = 0$ für alle $v \in \mathbb{R}$. Für das (links-)inverse Element gilt $v' = (-1) \cdot v =: -v$ für alle $v \in \mathbb{R}$. $\square$ Es lässt sich aber auch auf dem $\mathbb{R}^n$ eine Vektorraumstruktur definieren.

Lemma 2. *Das Tripel* $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$ *mit*

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \left(\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \right) \mapsto \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ \vdots \\ u_n + v_n \end{bmatrix}$$

sowie

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad \left(\lambda, \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \right) \mapsto \lambda \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} \lambda v_1 \\ \vdots \\ \lambda v_n \end{bmatrix}$$

bildet einen Vektorraum über den reellen Zahlen.

Beweis: Die Gültigkeit aller geforderten Rechenregeln im $\mathbb{R}^n$ lässt sich mit den Definitionen für „+“ und „·“ auf die komponentenweise Gültigkeit dieser Regeln zurückführen. Diese ist gewährleistet, da $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ einen Vektorraum bildet. Für das (links-)neutrale und (links-)inverse Element gilt analog zu $(\mathbb{R}, +, \cdot)$

$$\mathbf{0} = e = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ und } \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} -v_1 \\ \vdots \\ -v_n \end{bmatrix} = (-1) \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

□

Auch Mengen von Funktionen ausgestattet mit einer Addition und Skalarmultiplikation können Vektorräume bilden. Ein für uns wichtiges Beispiel bildet hier die Menge aller stetigen Funktionen auf einem abgeschlossenen und beschränkten Intervall.

Lemma 3. *Das Tripel* $(\mathcal{C}(I, \mathbb{R}), +, \cdot)$ *mit* $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}) := \{f : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) |\ f \textit{ ist stetig}\}$*, einem abgeschlossenen Intervall* $I \subset \mathbb{R}$ *und*

$$+ : \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \times \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}(I, \mathbb{R}),\ (f, g) \mapsto f + g \textit{ mit } (f + g)(x) = f(x) + g(x)\ \forall x \in I$$

sowie

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}(I, \mathbb{R}),\ (\lambda, f) \mapsto \lambda \cdot f \textit{ mit } (\lambda \cdot f)(x) = \lambda f(x)\ \forall x \in I$$

bildet einen Vektorraum über den reellen Zahlen.

Beweis: Zunächst wird die Wohldefiniertheit der Operationen gezeigt. Für $f, g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ gilt nach Definition der Stetigkeit

$$f(x_0) = f\left(\lim_{x \to x_0} x \right) = \lim_{x \to x_0} f(x)\ \forall x_0, x \in I$$

und Analoges für g. Somit existieren $\lim_{x \to x_0} f(x)$ und $\lim_{x \to x_0} g(x)$ und es sind die Grenzwertsätze anwendbar. Mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und $x_0, x \in I$ führt dies nach den Definitionen von „+“ und „·“ auf $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ zu

$$\lim_{x \to x_0} (f + g)(x) = \lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) + \lim_{x \to x_0} g(x) = f(x_0) + g(x_0) = (f + g)(x_0)$$
$$\lim_{x \to x_0} (\lambda \cdot f)(x) = \lim_{x \to x_0} (\lambda f(x)) = \lambda \lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda f(x_0) = (\lambda \cdot f)(x_0).$$

Damit gilt $f + g \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ sowie $\lambda \cdot f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$.
Das (links-)neutrale und (links-)inverse Element ergibt sich entsprechend der Addition und Skalarmultiplikation auch punktweise analog zu $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ durch

$$\mathbf{0} : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto \mathbf{0}(x) := 0 \text{ und } f' : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto f'(x) := -f(x)\ \forall x \in I.$$

Die geforderten Eigenschaften von „+“ und „·“ auf $\mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ lassen sich wegen der punktweisen Definition der Addition und Skalarmultiplikation auf die „üblichen Rechenregeln“ zurückführen. □

Definition 2. Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine Abbildung

$$\|\cdot\| : V \to [0, \infty[, \; v \mapsto \|v\|$$

heißt **Norm**, wenn:

(a) Für alle $v \in V$ gilt die **Definitheit** $\|v\| = 0 \Rightarrow v = \mathbf{0}$.

(b) Für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v \in V$ gilt die **Homogenität** $\|\lambda v\| = |\lambda| \|v\|$.

(c) Für alle $v, w \in V$ gilt die **Dreiecksungleichung** $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$.

Definition 3. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\|\cdot\| : V \to [0, \infty[, \; v \mapsto \|v\|$ eine Norm auf V. Dann heißt das Tupel $(V, \|\cdot\|)$ **normierter Vektorraum**.

Lemma 4. *Die Abbildung* $\|\cdot\|_\infty : \mathcal{C}(I, \mathbb{R}) \to [0, \infty[, \; f \mapsto \|f\|_\infty := \sup\limits_{x \in I} |f(x)|$ *heißt* ***Supremumsnorm*** *und bildet nach obiger Definition eine Norm.*

Beweis: Zunächst wird die Wohldefiniertheit der Operationen gezeigt. Mit $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R})$ ist f stetig. Das Intervall I ist per Definition abgeschlossen und beschränkt. Somit existiert nach dem Satz vom Minimum und Maximum ein Maximum also existiert das Supremum $\sup_{x \in I} \; |f(x)|$. Die Normeigenschaften sind erfüllt, wie durch folgende Überlegung klar wird:

(a) $\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} \; |f(x)| = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \; \forall x \in I$ also $f = \mathbf{0}$.

(b) $\|\lambda \cdot f\|_\infty = \sup_{x \in I} |\lambda f(x)| = \sup_{x \in I} \; |\lambda||f(x)| = |\lambda| \; \sup_{x \in I} \; |f(x)| = |\lambda| \; \|f\|_\infty$

(c) $\|f + g\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x \in I}(|f(x)| + |g(x)|)$
$\leq \sup_{x \in I} |f(x)| + \sup_{x \in I} |g(x)| = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

□

Die Norm definiert zunächst einen Abstand eines Elements des Vektorraums zum Nullvektor des Vektorraums. Tatsächlich lässt sich jedoch zeigen, dass jede Norm eine Metrik induziert. Gegeben zwei Vektoren $v, w \in V$ lässt sich durch $\|v - w\|$ ein Abstand zwischen diesen Vektoren feststellen. Dies erlaubt eine Verallgemeinerung des Grenzwertes von Folgen auf beliebige normierte Vektorräume.

Definition 4. Ein Vektor $g \in V$ heißt Grenzwert einer Folge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem normierten Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$\|v_n - g\| < \varepsilon \text{ für alle } n > k.$$

Definition 5. Eine Folge $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in einem normierten Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ heißt **Cauchyfolge** genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $k \in \mathbb{N}$ gibt mit

$$\|v_m - v_n\| < \varepsilon \text{ für alle } m, n > k.$$

Hierbei bedeutet die Konvergenz einer Folge von Funktionen gegen eine Grenzfunktion bezüglich der Supremumsnorm, dass sich die Funktionenfolge an allen Stellen gleichmäßig der Grenzfunktion annähert. Bezüglich der Grenzwertdefinition lässt sich schnell zeigen, dass jede konvergente Folge in V (im Sinne der ε-Definition) auch eine Cauchy-Folge in V ist. Die Umkehrung gilt auf beliebigen normierten Vektorräumen nicht.

Definition 6. Ein normierter Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ heißt **vollständig**, wenn jede Cauchyfolge in V konvergent ist.

Zum Beispiel ist $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ nicht vollständig. Hier lässt sich eine Cauchyfolge konstruieren, die in $\mathbb{Q}$ liegt, deren Grenzwert jedoch irrational (bspw. $\sqrt{2}$) ist.

Definition 7. Ein vollständiger normierter Vektorraum heißt **Banachraum**.

Satz 1. *$(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ist ein Banachraum.*

Satz 2. *$(\mathcal{C}(I,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ ist ein Banachraum.*

Satz 3. *Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Dann ist $(M, \|\cdot\|)$ mit $M \subset V$ und M abgeschlossen auch vollständig.*

3. Fixpunktsatz von Banach

Definition 8. Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum. Eine Funktion $f : M \subset V \to V$ heißt **Lipschitz-stetig**, falls es $L \geq 0$ gibt, sodass

$$\|f(v) - f(w)\| \leq L\|v - w\| \text{ für alle } v, w \in M.$$

L heißt Lipschitz-Konstante.

Lemma 5. *Lipschitz-stetige Funktionen sind stetig.*

Beweis: Der Beweis ist dem aufmerksamen Leser überlassen. □

Satz 4. (Fixpunktsatz von Banach). *Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Sei weiter $M \neq \emptyset$, $M \subset V$ abgeschlossen und $T : M \to M$ eine Abbildung, so dass ein $L \in [0, 1)$ existiert mit*

$$\|T(v) - T(w)\| \leq L\|v - w\|$$

*für alle $v, w \in M$ (**Kontraktion**). Dann gilt:*

1. *T hat genau einen **Fixpunkt** $a \in M$ d.h. es gibt genau ein $a \in M$ mit $a = T(a)$.*
2. *Konstruktives Verfahren: Für beliebiges $v_0 \in M$ setze $v_{n+1} := T(v_n)$ für $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $\lim_{n\to\infty} v_n = a$.*

Beweis:

1. Zur Eindeutigkeit: Sind $a, b \in M$ Fixpunkte von T, dann ist $\|a - b\| = \|T(a) - T(b)\| \leq L\|a - b\|$ woraus wegen $L < 1$ dann $\|a - b\| = 0$, also $a = b$ folgt.
2. Zur Existenz: Ist $v_0 \in M$, $v_{n+1} := T(v_n)$ für $n \geq 0$ und $k \leq m$, dann gilt:

$$\begin{aligned}\|v_k - v_m\| = \|T(v_{k-1}) - T(v_{m-1})\| \leq L\|v_{k-1} - v_{m-1}\| \leq ... \leq L^k\|v_0 - v_{m-k}\| \leq \\ \leq L^k \sum_{j=0}^{m-k-1} \|v_j - v_{j+1}\| \leq \|v_0 - v_1\|L^k \sum_{j=0}^{m-k-1} L^j = \|v_0 - v_1\|L^k \frac{1 - L^{m-k}}{1 - L} \\ \leq \|v_0 - v_1\| \frac{L^k}{1 - L},\end{aligned}$$

Wegen $L < 1$ findet sich für jedes $\varepsilon > 0$ ein $k(\varepsilon)$, so dass für alle $k \geq k(\varepsilon)$ und wegen $k \leq m$ also auch für alle $m \geq k(\varepsilon)$ gilt, dass $\|v_k - v_m\| < \varepsilon$. Somit ist $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $(M, \|\cdot\|)$. Da wegen der Vollständigkeit von $(V, \|\cdot\|)$ und der Abgeschlossenheit von M auch $(M, \|\cdot\|)$ vollständig ist, existiert der Grenzwert $a := \lim_{n\to\infty} v_n \in M$. Aufgrund der Kontraktionseigenschaft ist T Lipschitz-stetig und somit stetig. Daher gilt

$$a = \lim_{n\to\infty} v_n = \lim_{n\to\infty} v_{n+1} = \lim_{n\to\infty} T(v_n) = T\left(\lim_{n\to\infty} v_n\right) = T(a),$$

also ist a Fixpunkt von T.

$\square$

Aufgabe. Gesucht ist die Lösung der Gleichung $2 - x^2 = e^x$ auf dem Intervall $[0.2, 0.7]$.

Lösung. Logarithmieren der Gleichung ergibt $\ln\left(2 - x^2\right) = x$. Definiere

$$T : [0.2, 0.7] \to [0.2, 0.7],\ x \mapsto \ln\left(2 - x^2\right).$$

Man sieht, dass x genau dann Lösung der obigen Gleichung ist, wenn $T(x) = x$ gilt, d.h. x Fixpunkt von T ist. Es lässt sich zeigen, dass T eine Kontraktion auf dem Intervall $[0.2, 0.7]$ ist. Der Fixpunktsatz von Banach ist also anwendbar. Zur numerischen Approximation der Lösung iteriert man $x_{n+1} = T(x_n) = \ln\left(2 - x_n^2\right)$ mit gegebenem $x_0 \in [0.2, 0.7]$. Nach einigen Iterationsschritten ergibt sich $x \approx 0.5373$.

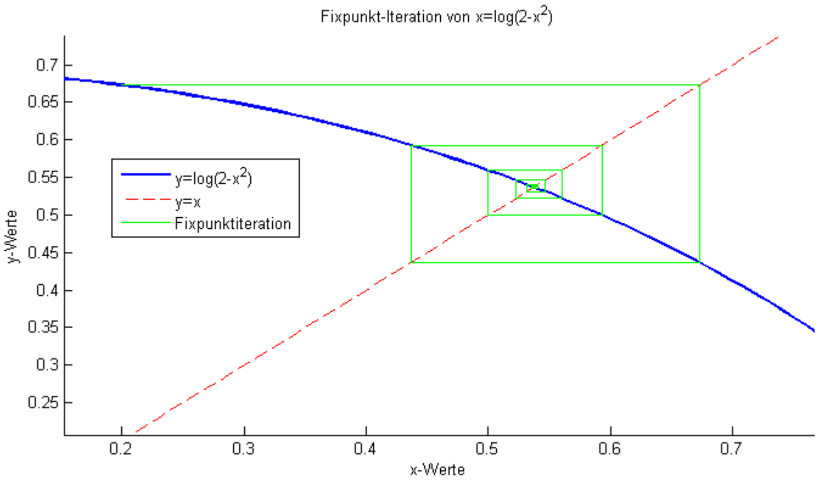


Abbildung 6: Graphische Veranschaulichung der Fixpunktiteration für $x_0 = 0.2$. Abbildung entnommen aus Wikipedia: Fixpunktiteration, `https://de.wikipedia.org/wiki/Fixpunktiteration`, letzter Zugriff: 03.07.2022, 11:05 Uhr.

Der oben bewiesene Fixpunktsatz von Banach ist jedoch allgemeiner. Die Kontraktion T kann insbesondere auch zwischen zwei Funktionenräumen abbilden. Dies wird den Kern des Existenzsatzes von Picard-Lindelöf ausmachen.

4. Satz von Picard-Lindelöf

Was ist überhaupt eine Differentialgleichung? Hierbei handelt es sich allgemein (und ersteinmal wenig formal) um eine Gleichung, in der in irgendeiner Form eine Funktion und deren Variablen sowie insbesondere Ableitungen der Funktion vorkommen. Eine Lösung einer solchen Differentialgleichung ist dann also eine Funktion und keine Zahl. Das wohl einfachste Beispiel ist die Differentialgleichung

$$x'(t) = 0 \ \forall t \in \mathbb{R},$$

das zunächst durch eine beliebige konstante Funktion $x_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \ \mapsto c$ mit $c \in \mathbb{R}$ gelöst wird. Hier fällt sofort auf, dass eine ganze Funktionenschar diese Differentialgleichung löst. Erst die Zusatzforderung $x(t_0) = x_0$ mit $t_0, x_0 \in \mathbb{R}$ scheint die Lösung auf $x_{c=x_0}$ zu fixieren. Das wohl typischste Beispiel für eine Differentialgleichung ist

$$x'(t) = x(t) \ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Diese Differentialgleichung wird allgemein durch die Funktionen $\mathcal{E}_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto c \exp(t)$ gelöst. Auch hier beobachtet man Analoges zur Eindeutigkeit der Lösung. Auch

$$x'(t) = 2tx(t) \ \forall t \in \mathbb{R}$$

ist eine Differentialgleichung.
Unter der Verwendung besonderer Ableitungen und Funktionen lassen sich natürlich noch viele weitere ganz unterschiedliche Differentialgleichungen aufschreiben. Wir müssen also definieren mit welchem Typ Differentialgleichung wir uns hier beschäftigen möchten und wann wir von einer Lösung dieser Differentialgleichungen sprechen.

Definition 9 (Anfangswertproblem)**.** Seien $a, r \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ beliebig und

$$f : [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - r, x_0 + r] \to \mathbb{R}$$

(bzw. $[t_0 - a, t_0 + a] := \mathbb{R}$ für $a = \infty$ und Analoges für $r = \infty$) eine stetige Funktion. Hierbei ist $x_0 \in \mathbb{R}$ der Anfangswert zu einem Anfangszeitpunkt $t_0 \in \mathbb{R}$. Dann heißt eine differenzierbare Funktion

$$x : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to [x_0 - r, x_0 + r]$$

mit $\alpha \leq a$, **Lösung** des durch f, t_0 und x_0 gegebenen Anfangswertproblems, wenn Folgendes gilt:

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)) && \forall t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \\ x(t_0) &= x_0. \end{aligned}$$

Lemma 6 (Zurückführung auf Integralgleichung)**.** *Eine Funktion x ist genau dann Lösung des Anfangswertproblems im Sinne obiger Definition, wenn gilt:*

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, \mathrm{d}s \ \forall t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha].$$

Beweis: „$\Leftarrow$": Gilt die Integralgleichung, folgt sofort $x(t_0) = x_0 + \int_{t_0}^{t_0} f(s, x(s))\, \mathrm{d}s = x_0$. Außerdem gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung mit der Stetigkeit von f

$$x'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) = f(t, x(t))$$

für alle $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$.
„$\Rightarrow$": Ist x Lösung des Anfangswertproblems, gilt sofort nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung mit der Stetigkeit von f

$$\int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, \mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} x'(s)\, \mathrm{d}s = x(t) - x(t_0) = x(t) - x_0.$$

□

Praktisch an dieser Aussage ist ersteinmal, dass das Anfangswertproblem, welches zunächst aus zwei Gleichungen besteht, durch eine einzige Gleichung ausgedrückt werden kann. Der aufmerksame Leser mag an dieser Stelle schon eine Fixpunktgleichung erkennen – diese Beobachtung ist richtig und ist Kern des Beweises des Existenzsatzes von Picard-Lindelöf.

Natürlich bedarf es für die Existenz einer Lösung des Anfangswertproblems einer Bedingung an die Funktion f, die eben dieses Anfangswertproblem definiert.

Definition 10. Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $f : G \to \mathbb{R},\ (t, x) \mapsto f(t, x)$. Die Funktion f genügt in G lokal einer Lipschitz-Bedingung (bzgl. x), wenn für alle $(a, b) \in G$ eine Umgebung U existiert, sodass in $G \cap U$ ein $L \geq 0$ existiert (das auch von der Umgebung abhängen darf), sodass $|f(t, x) - f(t, \tilde{x})| \leq L|x - \tilde{x}|$ für alle $(t, x), (t, \tilde{x}) \in G \cap U$.

Lemma 7. *Stetig differenzierbare Funktionen mit beschränkter Ableitung genügen einer lokalen Lipschitz-Bedingung.*

Beweis: Der Beweis ist dem aufmerksamen Leser überlassen. □

Satz 5 (Picard-Lindelöf (Existenzsatz))**.** *Es sei ein Anfangswertproblem nach obiger Definition gegeben. Ist $f : G = [t_0 - a, t_0 + a] \times [x_0 - r, x_0 + r] \to \mathbb{R}$ stetig und genügt einer lokalen Lipschitz-Bedingung im zweiten Argument, so existiert eine lokale Lösung $x : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to [x_0 - r, x_0 + r]$ des Anfangswertproblems.*

Beweis: Die Funktion f ist stetig und der Definitionsbereich abgeschlossen und beschränkt. Somit existiert $\|f\|_\infty = \sup_{(t,x) \in G} |f(t, x)| =: M$. Wegen der lokalen Lipschitz-Bedingung gibt es weiter ein $\varepsilon > 0$, ein $\delta > 0$ und ein $L > 0$, sodass

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq L|x - y|$$

für alle $(t, x), (t, y) \in [t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon] \times [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Nun sei

$$\alpha = \min\left(a, \varepsilon, \frac{\delta}{M}, \frac{1}{2L}\right).$$

Durch diese Definition wird sofort gewährleistet, dass für den Definitionsbereich der Lösung x

$$[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \subset [t_0 - a, t_0 + a]$$

gilt und die lokale Lipschitz-Bedingung im zweiten Argument von f zumindest schonmal unabhängig von $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ gilt.

Sei nun $A := \mathcal{C}([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], [x_0 - \delta, x_0 + \delta]) \subset \mathcal{C}([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \mathbb{R})$. Damit ist für alle $x \in A$ gewährleistet, dass $f(t, x(t))$ für alle $t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ wohldefiniert ist und die lokale Lipschitz-Bedingung erfüllt. Definiere nun die Abbildung

$$T : A \to A,\ x \mapsto T[x] \text{ mit } T[x](t) := x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s \text{ für } t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha].$$

Zunächst wird die Wohldefiniertheit der Abbildung T gezeigt. Es gilt

$$|T[x](t) - x_0| = \left|\int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\,\mathrm{d}s\right| \leq \left|\int_{t_0}^{t} |f(s, x(s))|\,\mathrm{d}s\right| \leq \left|\int_{t_0}^{t} M\,\mathrm{d}s\right| = M|t - t_0| \leq M\alpha \leq \delta.$$

Somit liegt der Wertebereich der Funktion $T[x]$ auf jeden Fall in $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Wegen f stetig in t und x, gilt dann insgesamt $T[x] \in A$. Das dritte Element in der Definition von α garantiert also die Wohldefiniertheit von T.

Lipschitz-Stetigkeit: Wir möchten nun zeigen, dass die Abbildung T auf A Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante kleiner 1 ist. Seien $x, y \in A$, dann gilt

$$\begin{aligned}
|T[x](t) - T[y](t)| &= \left| \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\ \mathrm{d}s - \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))\ \mathrm{d}s \right| \leq \left| \int_{t_0}^{t} |f(s, x(s)) - f(s, y(s))|\ \mathrm{d}s \right| \\
&\leq \left| \int_{t_0}^{t} L|x(s) - y(s)|\ \mathrm{d}s \right| \leq \left| \int_{t_0}^{t} L\|x - y\|_\infty\ \mathrm{d}s \right| = L|t - t_0|\|x - y\|_\infty \\
&\leq L\alpha\|x - y\|_\infty \leq L\frac{1}{2L}\|x - y\|_\infty = \frac{1}{2}\|x - y\|_\infty
\end{aligned}$$

also insbesondere

$$\|T[x] - T[y]\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|x - y\|_\infty.$$

Somit ist T eine Kontraktion. Da A abgeschlossen in $\mathcal{C}([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \mathbb{R})$ liegt, ist A genau wie der Raum $C([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha], \mathbb{R})$ vollständig. Damit sind alle Voraussetzungen für den Fixpunktsatz erfüllt. Es existiert also ein eindeutiger Fixpunkt $x \in A$ der Abbildung T für den $T[x] = x$ gilt. Dieser Fixpunkt ist nach Lemma 6 die Lösung der Differentialgleichung auf dem Intervall $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$. $\square$

Sind wir schon fertig? Nein. Zunächst haben wir gezeigt, dass mit den nötigen Anforderungen ein Intervall existiert auf dem eine eindeutige Lösung existiert. Die Abschätzungen dazu sind jedoch äußerst pessimistisch. Es kann also durchaus sein, dass es Lösungen auf größeren Intervallen als $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ gibt. Das definierte α ist also auch keinesfalls geeignet, um das maximale Lösungsintervall (mit dessen Existenz man sich ebenfalls beschäftigen müsste) zu bestimmen. Was wir also nun noch zeigen möchten, ist, dass sofern eine Lösung zu dem Anfangswertproblem auf einem beliebigen Lösungsintervall gefunden wurde, diese Lösung auf diesem Intervall auch eindeutig ist. Es muss dafür allerdings weiterhin die lokale Lipschitz-Bedingung von f im zweiten Argument erfüllt sein.

Satz 6 (Picard-Lindelöf (Eindeutigkeitssatz))**.** *Es sei ein Anfangswertproblem nach unserer Definition gegeben. Also sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und $f : G \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die lokal eine Lipschitz-Bedingung erfüllt. Seien $\varphi, \psi : I \to \mathbb{R}$ zwei Lösungen der Differentialgleichung $x'(t) = f(t, x(t))$ über einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Gilt $\varphi(t_0) = \psi(t_0)$ für ein $t_0 \in I$, folgt $\varphi(t) = \psi(t)$ für alle $t \in I$.*

Beweis:

1. Eindeutigkeit im Kleinen
   Ist $\varphi(a) = \psi(a)$ für ein $a \in I$, so gibt es ein $\varepsilon > 0$, sodass $\varphi(t) = \psi(t)$ für alle $t \in I$ mit $|t - a| < \varepsilon$ gilt.
   Aus Lemma 6 folgt
   $$\varphi(t) - \psi(t) = \int_a^t f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))\,\mathrm{d}s.$$
   Da f in G lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt, gibt es $L \geq 0$ und $\delta > 0$, so dass
   $$|f(t, \varphi(t)) - f(t, \psi(t))| \leq L\,|\varphi(t) - \psi(t)|$$
   für alle $t \in I \cap [a - \delta, a + \delta] := \{t \in I : |t - a| \leq \delta\}$. Zudem sind φ, ψ auf $I \cap [a - \delta, a + \delta]$ beschränkt.
   Nun seien
   $$\varepsilon := \min\left(\delta, \frac{1}{2L}\right)$$
   und
   $$M := \sup\left\{|\varphi(t) - \psi(t)| : t \in I \cap [a - \varepsilon, a + \varepsilon]\right\}.$$
   Für alle $t \in I \cap [a - \varepsilon, a + \varepsilon]$ gilt jetzt
   $$\begin{aligned}
   |\varphi(t) - \psi(t)| &= \left| \int_a^t f(s, \varphi(s)) - f(s, \psi(s))\,\mathrm{d}s \right| \leq \left| \int_a^t L|\varphi(s) - \psi(s)|\,\mathrm{d}s \right| \leq \left| L \int_a^t M\,\mathrm{d}s \right| \\
   &= LM|t - a| = LM\varepsilon \leq \frac{1}{2}M.
   \end{aligned}$$

Hierraus folgt nach Bildung des Supremums über alle $t \in I \cap [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$, dass $M \leq \frac{1}{2}M$, woraus $M = 0$ folgt. Aus der Definition von M ergibt sich damit, dass φ und ψ auf $I \cap [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ übereinstimmen.

2. Wir zeigen jetzt, dass $\varphi(t) = \psi(t)$ für alle $t \in I$ mit $t \geq t_0$. Es sei

$$t_1 := \sup \left\{ \xi \in I : \varphi\left|_{[t_0,\xi]} = \psi\right|_{[t_0,\xi]} \right\}.$$

Falls $t_1 = \infty$ oder t_1 gleich dem rechten Intervallende ist, sind wir fertig. Andernfalls gibt es ein $\delta > 0$, so dass $[t_1, t_1 + \delta] \subset I$. Da φ, ψ stetig sind, gilt $\varphi(t_1) = \psi(t_1)$. Nach 1. gibt es dann ein $\varepsilon > 0$ mit $\varphi(t) = \psi(t)$ für alle $t \in I \cap [t_1 - \varepsilon, t_1 + \varepsilon]$. Dies steht im Widerspruch zur Definition von t_1. Daraus folgt $\varphi(t) = \psi(t)$ für alle $t \in I$ mit $t \geq t_0$.

3. Beweis für $t \leq t_0$ analog.

□

Jetzt können wir uns sicher sein, dass, wenn wir eine Lösung zu einem gegebenen Anfangswertproblem gefunden haben, diese auch **die** Lösung ist.

Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ (t, x) \mapsto 2tx$ und $t_0 = 0$ sowie $x_0 = 1$. Wir betrachten also das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} x'(t) &= f(t, x(t)) = 2tx(t) \\ x(0) &= 1. \end{aligned}$$

Wir betrachten nun die Fixpunktiteration

$$x_{n+1}(t) = T[x_n](t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x_n(s))\,\mathrm{d}s$$

mit $x_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \to x_0(t) := x_0 = 1$. Wir probieren es also mal auf ganz $\mathbb{R}$ und schauen, ob die Fixpunktiteration gegen eine Lösung konvergiert. Dass eine Lösung auf einem möglicherweise kleinen Intervall existiert, wissen wir, da f auf jedem abgeschlossenen Intervall im zweiten Argument stetig differenzierbar ist, also auch eine lokale Lipschitz-Bedingung erfüllt - der Existenzsatz ist anwendbar. Haben wir Erfolg und finden durch die Fixpunktiteration eine Lösung auf ganz $\mathbb{R}$ wissen wir nach dem Eindeutigkeitssatz, dass diese die einzige Lösung zu diesem Anfangswertproblem ist.
Wir bestimmen zunächst die ersten drei Elemente der Folge

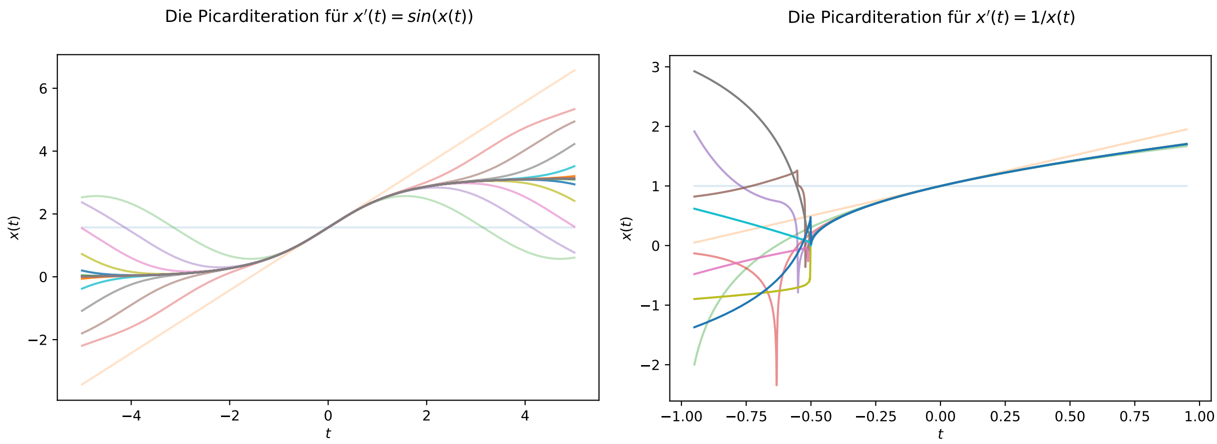
$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} 2s \cdot 1\,\mathrm{d}s = 1 + t^2 \\ x_2(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} 2s \cdot \left(1 + s^2\right)\,\mathrm{d}s = 1 + t^2 + \frac{1}{2}t^4 \\ x_3(t) &= x_0 + \int_{t_0}^{t} 2s \cdot \left(1 + s^2 + \frac{1}{2}s^4\right)\,\mathrm{d}s = 1 + t^2 + \frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{6}t^6. \end{aligned}$$

Durch Induktion lässt sich beweisen, dass

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^{2k}}{k!} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp\left(t^2\right).$$

Im letzten Schritt wurde dabei die Taylorentwicklung für die Exponentialfunktion erkannt. Tatsächlich wurde eine (also die) globale Lösung $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \exp\left(t^2\right)$ des Anfangswertproblems gefunden.

Dass sich durch Verwendung dieser Fixpunktiteration (genannt Picard-Iteration) so einfach eine analytische Lösung finden lässt, ist ein Glücksfall. Im Allgemeinen ist es jedoch immer möglich diese Iteration durch numerische Integration numerisch durchzuführen und somit die Lösung eines beliebigen Anfangswertproblems zu approximieren. Natürlich muss die Fixpunktiteration nicht global konvergieren.



Links: Picard-Iteration mit Anfangsbedingung $t_0 = 0, x_0 = \frac{\pi}{2}$. Analytische Lösung $x(t) = 2\arctan\left(e^t\right)$.
Rechts: Picard-Iteration mit Anfangsbedingung $t_0 = 0, x_0 = 1$. Analytische Lösung $x(t) = \sqrt{2t + 1^2}$.

Diese Abbildung zeigt die Picard-Iteration für zwei Anfangswertprobleme. Auf der linken Seite der Abbildung erkennt man, dass sich die numerisch erhaltenen Folgenglieder der Picard-Iteration Stück für Stück einer Lösungsfunktion anzunähern scheinen. Tatsächlich tut sie das auch global. Die Funktion f ist hier durch $f(t, x) = \sin(x)$ gegeben und erfüllt damit auch global eine lokale Lipschitz-Bedingung, weshalb wir wissen, dass diese Lösung auch eindeutig ist.

Auf der rechten Seite der Abbildung sieht dies anders aus: Mit $f(t, x) = 1/x$ fällt sofort auf, dass diese Funktion an $x = 0$ nicht definiert ist und eben auch keine lokale Lipschitz-Bedingung erfüllt. Für $x \neq 0$ ist die lokale Lipschitz-Bedingung erfüllt. Da jedoch nur zusammenhängende Intervalle betrachtet werden können, kann es keine Lösungen geben, die sowohl positive als auch negative Werte annehmen. Wählt man also einen Anfangswert $x_0 > 0$, so muss die Lösung des Anfangswertproblems $x(t) \in (0, \infty)$ für alle t im Definitionsbereich von x erfüllen. Je nach Anfangszeitpunkt t_0 ergibt sich dann ein anderer dazu passender Definitionsbereich von der Lösung x. Dass die Lösung an einer Stelle überhaupt gegen 0 streben muss, ist der Differentialgleichung zunächst nicht anzusehen. Dies wird numerisch beobachtet und durch die analytische Lösung bestätigt. Bewegen wir uns außerhalb des Intervalls auf dem eine Lösung existiert, kann die Picard-Iteration hier immer noch mit numerischer Integralberechnung durchgeführt werden. Resultat sind Funktionen, die wild umherspringen und sich keiner Grenzfunktion anzunähern scheinen. Numerisch können wir hier also insgesamt einen Kandidaten für den Definitionsbereich der Lösung sowie für die Lösung selbst feststellen.