HU Berlin Wintersemester 2022/23

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Algebra und Funktionentheorie

Prof. Dr. Jürg Kramer

Abgabetermin: 21.11.2022 bis 09:00 Uhr auf Moodle

Bitte beachten:
Jede Aufgabe in separatem PDF abgeben.
Erste Seite in jedem PDF mit Namen und Matrikelnummern versehen.
Partnerabgabe ist erlaubt und wird empfohlen.

Serie 5 (30 Punkte)

Aufgabe 1 (10 Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle Isomorphieklassen abelscher Gruppen der Ordnung 26 000. Welche davon sind zyklisch?

(b) Es sei A eine endliche abelsche Gruppe. Zeigen Sie, dass für jeden Teiler d von $|A|$ eine Untergruppe B der Ordnung d existiert.

(c) Zeigen Sie, dass die alternierende Gruppe A_4 keine Untergruppe der Ordnung 6 hat, d. h. dass die Aussage in (b) für nicht-abelsche Gruppen im Allgemeinen falsch ist.
Hinweis: Zeigen Sie, dass jede Untergruppe $H \leq A_4$ der Ordnung 6 alle 3-Zyklen in A_4 enthalten muss, es aber mehr als sechs 3-Zyklen gibt.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Es sei B eine abelsche Gruppe der Ordnung p^r, wobei p eine Primzahl und r eine positive natürliche Zahl ist. Dann wissen wir aus der Vorlesung, dass

$$B \cong \mathbb{Z}/p^{s_1}\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}/p^{s_\ell}\mathbb{Z}$$

mit $s_1 + \ldots + s_\ell = r$ gilt, wobei $s_1 \geq s_2 \geq \ldots \geq s_\ell > 0$ ist. Beweisen Sie, dass die Folge $(s_1, \ldots, s_\ell)$, d. h. der Typ von B, eindeutig bestimmt ist.
Hinweis: Betrachten Sie die Gruppe $p \cdot B$ und wenden Sie vollständige Induktion an.

Aufgabe 3 (10 Punkte)
Es seien A eine endlich erzeugte abelsche Gruppe und $A_{\mathrm{tor}} := \{a \in A \mid \mathrm{ord}_A(a) < \infty\}$ die Menge der sogenannten Torsionselemente von A.

(a) Zeigen Sie, dass A_{tor} eine endliche abelsche Untergruppe von A ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Faktorgruppe A/A_{tor} torsionsfrei ist.

(c) Zeigen Sie, dass die additive Gruppe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ nicht endlich erzeugt ist.

(d) Beweisen Sie, dass $\mathbb{Q}/\mathbb{Z} = (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})_{\mathrm{tor}}$ gilt, d. h., dass $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ eine sogenannte *Torsionsgruppe* ist.