

Berichte der Gruppen

Zykloiden und das Tautochronenproblem

Teilnehmende:

2 Teilnehmende des
3 Teilnehmende des
2 Teilnehmende des

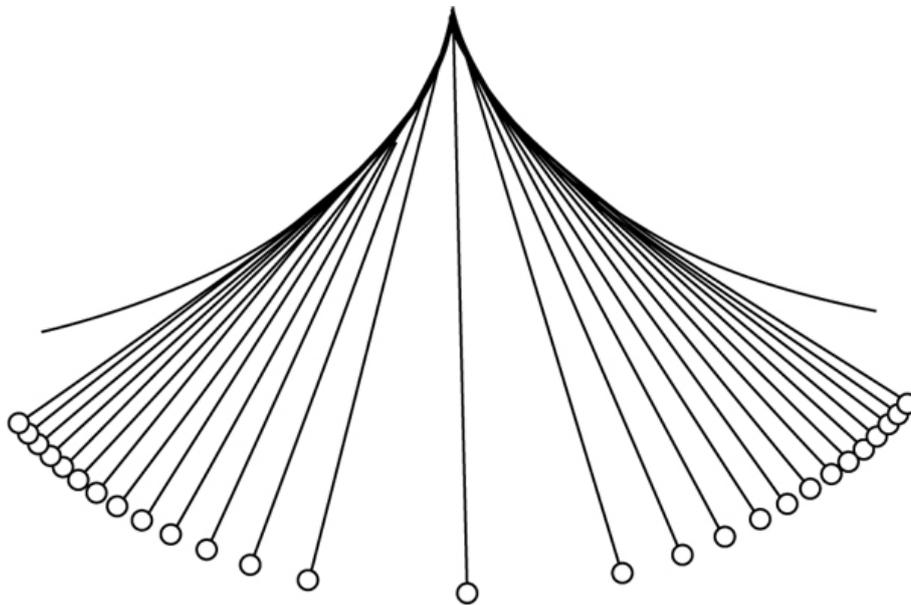
Andreas-Gymnasiums
Heinrich-Hertz-Gymnasiums
Herder-Gymnasiums

mit tatkräftiger Unterstützung durch:
Georg Garbusow

Humboldt-Universität zu Berlin

Gruppenleiter:
Luise Fehlinger

Humboldt-Universität zu Berlin, MATH+



1. Einleitung

1.1. Die Problemstellung

Jeder kennt wahrscheinlich Pendeluhren, zumindest als Standuhr bei den Großeltern. Ein Problem, auf das man jedoch stößt, wenn man mit Pendeln die Zeit messen möchte, ist, dass ihre Periodendauer nicht immer gleich ist, sondern variiert, je nachdem, wie groß die Auslenkung des Pendels ist. Um ein Pendel herzustellen, dessen Periodendauer immer gleich lang ist, muss man sich schon etwas Besonderes einfallen lassen. In unserem Projekt haben wir uns damit beschäftigt, wie ein solches Pendel aussehen könnte, welche Rolle Zykloiden dabei spielen und wie man beweisen kann, dass unsere Idee funktioniert.

Die wesentliche Eigenschaft, die unser Pendel haben soll ist die sogenannte Tautochronie.

Definition 1 (Tautochronie). Eine ebene Kurve, entlang derer sich ein nur von der Schwerkraft beschleunigter Massepunkt bewegt und unabhängig vom Ausgangspunkt stets dieselbe Zeit benötigt, um zum tiefsten Punkt zu gelangen, heißt tautochron.

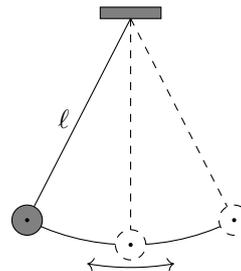
In dieser Definition stecken viele Begriffe, die wir erklären müssen. Wir beginnen zunächst damit ein sehr einfaches Pendel genauer zu betrachten.

1.2. Das mathematische Fadenpendel

Ein reales Fadenpendel besteht aus einer Masse an einem Faden, die frei schwingen kann. Dabei wirkt die Schwerkraft, um das Pendel anzutreiben. Aber in der Realität gibt es noch weitere Kräfte, wie z.B. die Reibung.

Das mathematische Fadenpendel ist ein idealisiertes Fadenpendel – also nur ein Modell – mit den folgenden Eigenschaften:

- Es gibt keine Reibungseffekte oder andere Störungen.
- Die komplette Masse ist in einem Punkt konzentriert.
- Das Pendel bewegt sich in einer Ebene und wird nur durch die Schwerkraft angetrieben.



Ein solches mathematisches Pendel können wir also, da es sich durch den Faden auf einer Kreisbahn bewegt, durch den Auslenkungswinkel zur Nulllage beschreiben. Die Gewichtskraft zerlegt sich in die Normalkraft, die durch den Faden kompensiert wird, und die Tangentialkraft, F_t , die das Pendel bewegt. Die Tangentialkraft wirkt entgegengesetzt zur Auslenkung. Damit erhalten wir die folgende Differentialgleichung.

$$F_t(\alpha) = \sin(-\alpha) \cdot F_g = -\sin(\alpha) \cdot m \cdot g.$$

Aus der Physik ist bekannt, dass Kraft gleich Masse mal Beschleunigung ist. Folglich können wir für die Beschleunigung, also die zweifache Ableitung des Weges nach der Zeit, $a(t) = \frac{d^2}{dt^2}s(t) = \frac{d^2}{dt^2}(\ell \cdot \alpha(t))$, wobei ℓ die Länge des Pendels ist, schreiben.

$$\begin{aligned} m \cdot \alpha'' \cdot \ell &= -\sin(\alpha) \cdot g \cdot m \\ \iff \alpha'' &= -\sin(\alpha) \cdot \frac{g}{\ell} \end{aligned}$$

Wir lösen die Differentialgleichung zunächst näherungsweise mit $\sin(\alpha) \approx \alpha$. D.h.,

$$\alpha'' \approx -\alpha \cdot \frac{g}{\ell}.$$

Ein solches Verhalten kennen wir von der Sinus- und von der Kosinusfunktion.

Der Ansatz $\alpha(t) = \cos(ct + \alpha_0)$ bzw. $\alpha(t) = \sin(st + \alpha_1)$ liefert:

$$\begin{aligned} \alpha''(t) &= -\left(c^2 \cos(ct + \alpha_0)\right) \\ &\stackrel{!}{=} -\alpha \cdot \frac{g}{\ell} \\ \text{bzw} \\ \alpha''(t) &= -\left(s^2 \sin(st + \alpha_1)\right) \\ &\stackrel{!}{=} -\alpha \cdot \frac{g}{\ell}. \end{aligned}$$

Folglich muss $c^2 = s^2 = \frac{g}{\ell}$ gelten. Und alle Linearkombinationen

$$\alpha(t) = A \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t + \alpha_0\right) + B \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}t + \alpha_1\right)$$

mit $A, B \in \mathbb{R}$ erfüllen die Differentialgleichung. Somit beträgt aber die Schwingungsdauer gerade $\sqrt{\frac{\ell}{g}} \cdot 2\pi$, weil sich nach dieser Zeit das System zum ersten Mal wieder im Startzustand befindet. Demnach ist ein mathematisches Pendel näherungsweise ein tautochrones Pendel. Wie gut diese Näherung ist, haben wir nun experimentell untersucht.

Bemerkung 1 (Messung der Schwingungsdauer eines Fadenpendels). Wir haben die Dauer für zehn Schwingungen eines Fadenpendels bei verschiedenen Startauslenkungen gemessen.

Für die gewählten Startwinkel gilt $\varphi_1 < \varphi_2 < \varphi_3$.
Die gemessenen Schwingungsdauern sind $T_1 = 22,18\text{s}$ $T_2 = 23,12\text{s}$ und $T_3 = 23,17\text{s}$.

Mit wachsendem Startwinkel wächst also die Schwingungsdauer. Unser Fadenpendel ist nicht tautochron.

2. Parametrisierte Kurven

Ein wichtiges Mittel, um Wege von Massepunkten mathematisch beschreiben zu können, sind parametrisierte Kurven. Diese werden auch im weiteren Verlauf des Skripts Verwendung finden. Deshalb ist es wichtig, sich mit ihnen zu beschäftigen.

Definition 2 (Parametrisierte Kurven). Parametrisierte Kurven sind Abbildungen,

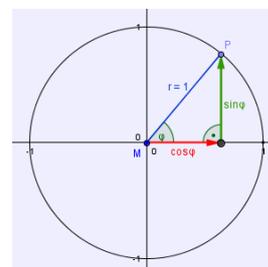
$$\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad I \subset \mathbb{R} \text{ ein Intervall,}$$

die mindestens zweimal stetig differenzierbar sind.

Beispiel 1 (Eine Parametrisierung des Einheitskreises).

Um den Einheitskreis als Spur einer Kurve darzustellen, kann man folgende Parametrisierung verwenden

$$\begin{aligned} \gamma_K : [0, 2\pi] &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \varphi &\longmapsto \left(\cos(\varphi), \sin(\varphi) \right). \end{aligned}$$



Hier ordnen wir jedem φ aus dem Intervall von $[0, 2\pi]$ einen Punkt auf dem Kreis zu.

Beispiel 2 (Weitere Parametrisierungen des Einheitskreises). Eine weitere Möglichkeit, einen Kreis zu erzeugen, ist folgende Parametrisierung.

$$\begin{aligned} \gamma_{K-} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \varphi &\longmapsto (\cos(\varphi), -\sin(\varphi)) \end{aligned}$$

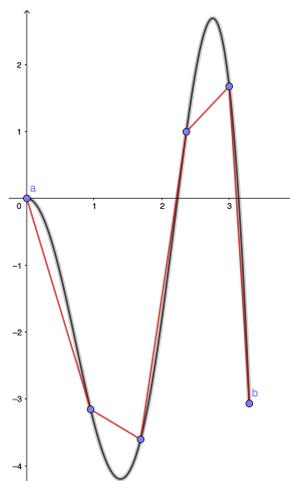
Im Gegensatz zu dem oberen Beispiel kann φ beliebig groß und klein sein, weshalb die Kreisspur unendlich oft durchlaufen wird. Außerdem wird der Kreis durch die Verwendung des $-\sin$ nun im mathematisch negativen Sinn durchlaufen.

Wir können auch die Durchlaufgeschwindigkeit ändern usw. Es gibt also unendlich viele verschiedene Parametrisierungen, um den Kreis zu zeichnen.

2.1. Die Länge einer parametrisierten Kurven

Ein auf einer parametrisierten Kurve schwingender Massepunkt soll nur durch die Schwerkraft beschleunigt werden. Diese Beschleunigung ist also der Schlüssel zur Beschreibung der Bewegung des Massepunktes. Die Beschleunigung ist die Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit und diese wiederum ist die Ableitung des zurückgelegten Weges nach der Zeit, sodass wir die Länge des Weges des Massepunktes in Abhängigkeit von der Zeit benötigen.

Die Länge einer parametrisierten Kurve approximieren wir zunächst durch ein Sehnepolygon. Es sei $\gamma : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine parametrisierte Kurve und $\mathcal{P} = \{t_0, t_1, \dots, t_{m-1}, t_m\}$ eine Zerlegung des Intervalls $I = [a; b]$, d.h. $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$.



Die Länge des Sehnepolygons ist gegeben durch

$$\begin{aligned} L(\gamma, \mathcal{P}) &= \sum_{k=1}^m \left| \overline{\gamma(t_{k-1})\gamma(t_k)} \right| \\ &= \sum_{k=1}^m \left\| \gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}) \right\|. \end{aligned}$$

Geht eine Zerlegung \mathcal{P}' aus \mathcal{P} durch Hinzunahme von Teilungspunkten hervor, so sagen wir \mathcal{P}' ist eine Verfeinerung von \mathcal{P} und schreiben $\mathcal{P}' \geq \mathcal{P}$. Dann gilt mit der Dreiecksungleichung

$$L(\gamma, \mathcal{P}) \leq L(\gamma, \mathcal{P}').$$

Definition 3 (Rektifizierbare parametrisierte Kurven). Eine parametrisierte Kurve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ heißt rektifizierbar, wenn

$$\sup \left\{ L(\gamma, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \text{ Zerlegung von } I \right\}$$

existiert.

Dann setzen wir

$$L(\gamma) := \sup \left\{ L(\gamma, \mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \text{ Zerlegung von } I \right\}.$$

Diese Definition ist zwar recht einfach, in der Praxis aber kompliziert. Tatsächlich lässt sich die Länge einer parametrisierten Kurve mit dem *RIEMANN*-Integral berechnen. Dies werden wir als nächstes beweisen.

Satz 1. Sei $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig, dann gilt

$$\left\| \int_a^b f(x) dx \right\| \leq \int_a^b \|f(x)\| dx.$$

Beweis: Wir setzen $\int_a^b f(x) dx = v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. Damit können wir die linke Seite der zu zeigenden Ungleichung abschätzen. Dabei nutzen wir die Cauchy-Schwarze-Ungleichung.

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b f(x) dx \right\|^2 &= \|v\|^2 \\ &= v_1^2 + v_2^2 \\ &= v_1 \cdot \underbrace{\int_a^b f_1(x) dx}_{=v_1} + v_2 \cdot \underbrace{\int_a^b f_2(x) dx}_{=v_2} \\ &= \int_a^b (v_1 f_1(x) + v_2 f_2(x)) dx \\ &\stackrel{CSU}{\leq} \int_a^b \|v\| \cdot \|f(x)\| dx \\ &= \|v\| \cdot \int_a^b \|f(x)\| dx \end{aligned}$$

Ist $\|v\| = 0$, so gilt die zu zeigende Ungleichung trivialerweise. Andernfalls können wir durch $\|v\|$ teilen und erhalten das gewünschte Resultat.

$$\|v\| = \left\| \int_a^b f(x) dx \right\| \leq \int_a^b \|f(x)\| dx$$

□

Über welche Funktion soll integriert werden, um die Länge einer parametrisierten Kurve zu bestimmen?

Satz 2. Sei $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ differenzierbar. Dann ist γ rektifizierbar und es gilt

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

Beweis: Sei $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ differenzierbar. Zunächst zeigen wir, dass dieses Integral eine obere Schranke der Längen aller Sehnenpolygone ist. Damit existiert das Supremum der Längen aller Sehnenpolygone und die Kurve ist rektifizierbar.

Sei also \mathcal{P} eine beliebige Zerlegung von $[a; b]$. Wir schätzen die Länge des zugehörigen Sehnenpolynoms unter Nutzung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung ab. Zusätzlich kommt hier auch Satz 1 zum Einsatz.

$$\begin{aligned}
 L(\gamma, \mathcal{P}) &= \sum_{k=1}^m \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| \\
 &\stackrel{HS}{=} \sum_{k=1}^m \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \gamma'(t) dt \right\| \\
 &\stackrel{\text{Satz 1}}{\leq} \sum_{k=1}^m \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\gamma'(t)\| dt \\
 &= \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt
 \end{aligned}$$

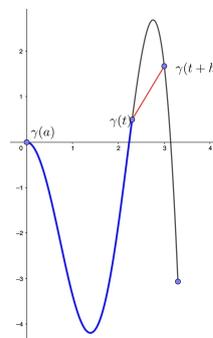
Im zweiten Beweisschritt zeigen wir die Gleichheit. Dazu nutzen wir eine Hilfsfunktion

$$\ell : [a; b] \ni t \mapsto L(\gamma|_{[a;t]}) \in [0; L(\gamma)].$$

Seien $t \in [a; b)$ und $h > 0$ mit $t + h \in [a; b]$.

Es gilt

$$\begin{aligned}
 \|\gamma(t+h) - \gamma(t)\| &\leq L(\gamma|_{[t;t+h]}) \\
 &= \ell(t+h) - \ell(t) \\
 &\stackrel{\text{Schritt 1}}{\leq} \int_t^{t+h} \|\gamma'(x)\| dx.
 \end{aligned}$$



Für den Differenzenquotienten zur Hilfsfunktion ℓ bzw. dessen einseitigen Grenzwert folgt

$$\left\| \frac{\gamma(t+h) - \gamma(t)}{h} \right\| \leq \frac{\ell(t+h) - \ell(t)}{h} \leq \frac{1}{h} \cdot \int_t^{t+h} \|\gamma'(x)\| dx$$

und damit
$$\|\gamma'(t)\| \leq \lim_{h \downarrow 0} \frac{\ell(t+h) - \ell(t)}{h} \leq \|\gamma'(t)\|.$$

Analoge Betrachtungen für $h \uparrow 0$ liefern die Behauptung

$$L(\gamma) = \ell(b) - \ell(a) = \int_a^b \ell'(t) dt = \int_a^b \|\gamma'(t)\| dt.$$

□

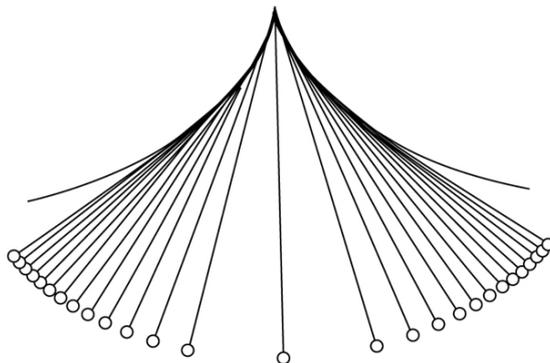
2.2. Die Evolventen einer parametrisierten Kurve

Für die Schwingungsdauer eines Fadenpendels hatten wir für kleine Winkel φ die Näherung

$$T \approx 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

Allerdings hatten wir festgestellt, dass die Schwingungsdauer tatsächlich mit der Auslenkung zunimmt. Um ein tautochrones Pendel zu konstruieren, verfolgen wir deswegen die Idee, die Fadenlänge ℓ vom Auslenkungswinkel φ abhängig zu machen.

Die Fadenlänge ℓ soll nun mit größerer Auslenkung φ kleiner werden. Das lässt sich erreichen, wenn das Pendel, wie in der Abbildung, zwischen zwei Kurvenbacken gehängt wird.



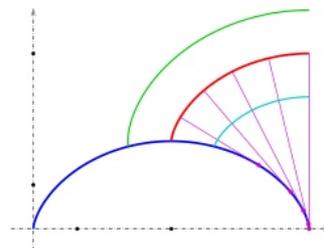
Mit diesem Aufbau, liegt der Faden abhängig von der Auslenkung an der Kurve an und wird somit verkürzt. Die Pendelbahn dieses Fadenpendels beschreibt nun eine sogenannte **Evolvente** der Kurve, an die es angelegt wurde.

Definition 4. Jeder rektifizierbaren Kurve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ wird eine Schar von Kurven als Evolventen (siehe Abb. rote, grüne und blaue Kurve) zugeordnet.

Die Evolventen entstehen durch das Abrollen der Tangenten einer Kurve und lassen sich beschreiben durch

$$e_{t_0}(t) = \gamma(t) - \frac{L(\gamma|_{[t_0,t]})}{\|\gamma'(t)\|} \cdot \gamma'(t), \quad t \in I$$

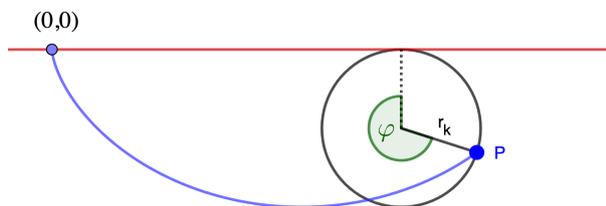
für den Startpunkt $\gamma(t_0)$ mit $t_0 \in I$.



Der Faden des Fadenpendels beschreibt in diesem Fall die abgerollten Tangenten der Kurve, die die Kurvenbacken parametrisiert. Wir werden zeigen, dass ein Fadenpendel, das an Kurvenbacken schwingt, welche durch Zykloiden beschrieben werden, tautochron ist.

3. Zykloiden

Definition 5 (Zykloide). Ein Kreis rollt gleichmäßig und ohne zu rutschen über eine Gerade. Die durch einen festen Punkt P auf dem Umfang des Kreises beschriebene Kurve ist eine Zykloide.



Bemerkung 2. Zykloiden oder Rollkurven erhält man auch, wenn man statt einer Geraden einen Kreis oder andere Kurven als Leitkurve für den abrollenden Kreis nutzt. Ebenso kann der Punkt, welcher die Zykloide zeichnet auch an einem Stab durch den Mittelpunkt des Rollkreises befestigt sein. Er muss also nicht auf dem Rollkreis liegen.

Wir suchen eine Parametrisierung der Zykloiden.

Parametrisierung des Mittelpunktes Der Mittelpunkt des Kreises befindet sich in y -Richtung negativ verschoben zum Nullpunkt um genau r und verschoben in x -Richtung um genau die Strecke, die der Kreis gerollt ist.

$$M(\varphi) = (r\varphi, -r)$$

Parametrisierung von P in Abhängigkeit von M Hier kann durch das Ausklammern des Radius, der Kreis als ein Einheitskreis, rotiert um 90° , betrachtet werden.

$$M(\varphi) - P(\varphi) = r \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Zusammenführung Damit erhalten wir die Parametrisierung der von P durchlaufenen Kurve.

$$\begin{aligned} P(\varphi) &= P(\varphi) + (M(\varphi) - P(\varphi)) \\ &= (r\varphi, -r) + r \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} \\ &= r \cdot (\varphi - \sin(\varphi), \cos(\varphi) - 1) \end{aligned}$$

3.1. Die Evolvente einer Zykloide

Nun wollen wir die Evolvente einer Zykloiden berechnen, wobei wir den Startpunkt in ein lokales Minimum legen.

Unsere Ausgangskurve ist γ_z mit

$$\gamma_z(\varphi) = r \cdot (\varphi, -1) + r \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Wir benötigen als erstes den Tangentialvektor und seine Norm.

$$\begin{aligned} \gamma'_z(\varphi) &= r \cdot \begin{pmatrix} 1 - \cos(\varphi) \\ -\sin(\varphi) \end{pmatrix} \\ \text{und } \|\gamma'_z(\varphi)\|^2 &= r^2 \cdot \left((1 - \cos(\varphi))^2 + \sin^2(\varphi) \right) \\ &= r^2 \cdot \left(1 - 2\cos(\varphi) + \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi) \right) \\ &= 2r^2 \cdot (1 - \cos(\varphi)) \end{aligned}$$

Damit können wir als nächstes die Länge der Kurve für $\varphi \in [\pi, 2\pi]$ berechnen. Dabei nutzen wir, dass $\sqrt{\frac{1 - \cos(\varphi)}{2}} = \left| \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \right|$ gilt.

$$\begin{aligned}
L(\gamma_z|_{[\pi, \varphi]}) &= \int_{\pi}^{\varphi} \|\gamma'_z(t)\| dt \\
&= \int_{\pi}^{\varphi} 2r \underbrace{\left| \sin\left(\frac{t}{2}\right) \right|}_{\geq 0} dt \\
&= 4r \left[-\cos\left(\frac{t}{2}\right) \right]_{\pi}^{\varphi} \\
&= -4r \underbrace{\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)}_{\leq 0, \text{ da } \frac{\varphi}{2} \geq \frac{\pi}{2}} \geq 0
\end{aligned}$$

Wir setzen die erhaltenen Bestandteile in die Formel für die Evolvente ein.

$$\begin{aligned}
e_{\pi}(\varphi) &= \gamma_z(\varphi) - \frac{L(\gamma_z|_{[\pi, \varphi]})}{\|\gamma'_z(\varphi)\|} \cdot \gamma'_z(\varphi) \\
&= \gamma_z(\varphi) - \frac{L(\gamma_z|_{[\pi, \varphi]})}{\|\gamma'_z(\varphi)\|} \cdot \gamma'_z(\varphi) \\
&= r \cdot (\varphi, -1) + r \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} - \frac{-4r \cos(\frac{\varphi}{2})}{2r \sin(\frac{\varphi}{2})} \cdot r \cdot \begin{pmatrix} 1 - \cos(\varphi) \\ -\sin(\varphi) \end{pmatrix} \\
&= r \cdot \left((\varphi - \sin(\varphi) + 2 \frac{\cos(\frac{\varphi}{2})}{\sin(\frac{\varphi}{2})} (1 - \cos(\varphi))), -1 + \cos(\varphi) - 2 \frac{\cos(\frac{\varphi}{2})}{\sin(\frac{\varphi}{2})} \sin(\varphi) \right)
\end{aligned}$$

Zeichnet man diese Evolvente der Zykloide, so liegt der Verdacht nahe, dass es sich um eine verschobene Zykloide handelt – genauer verschoben entlang der x -Achse um $r\pi$ und entlang der y -Achse um $-2r$. D.h., diese Kurve müsste mit der Kurve

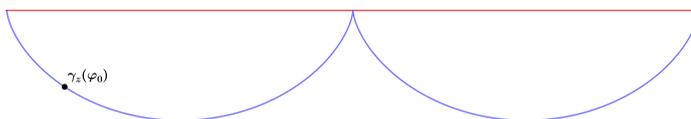
$$\gamma_z(\varphi - \pi) + \begin{pmatrix} r\pi \\ -2r \end{pmatrix} = r \cdot (\varphi + \sin(\varphi), -3 - \cos(\varphi))$$

übereinstimmen. Dies zu überprüfen überlassen wir dem geneigten Leser.

3.2. Die Tautochroneneigenschaft einer Zykloide

Beweis: Zu zeigen ist, dass der Zykloidenbogen tautochron ist. Dazu wird die Parametrisierung γ_Z eines nach oben geöffneten Zykloidenbogens – parametrisiert nach dem Abrollwinkel φ – verwendet, welcher durch einen Rollkreis mit Radius r entsteht. Dies lässt sich folgendermaßen darstellen.

$$\gamma_z(\varphi) = r(\varphi - \sin(\varphi), \cos(\varphi) - 1)$$



Der zu betrachtende Massepunkt m soll dabei zur Zeit $t_0 = 0$ an der Position $\gamma_z(\varphi_0)$ starten, wobei oBdA $\varphi_0 \in [0, \pi]$ gilt.

Zudem sei $\gamma_Z(\varphi(t))$ die Position des Massepunktes zur Zeit t mit $\varphi(t) \in [\varphi_0, \pi]$, da dies für die weitere Betrachtung genügt.

Gemäß des Energieerhaltungssatzes aus der Physik gilt

$$0 = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2}_{=E_{kin}} - \underbrace{mg(y(\varphi_0) - y(\varphi))}_{=\Delta E_{pot}}.$$

Umstellen nach der Geschwindigkeit v an der Stelle $\gamma_z(\varphi)$ liefert

$$v = \sqrt{2g(y(\varphi_0) - y(\varphi))}.$$

Sofern s der seit dem Zeitpunkt t_0 zurückgelegte Weg ist, gilt $v = \frac{ds}{dt}$ und durch Trennung der Variablen weiterhin

$$dt = \frac{1}{\sqrt{2g(y(\varphi_0) - y(\varphi))}} ds.$$

Im Folgenden erfordert die Substitution der infinitesimalen Längendifferenz ds die Ausnutzung der Abhängigkeit dieser von dem Winkel φ .

$$\begin{aligned} \frac{ds}{d\varphi}(\varphi) &= \|\gamma'_z(\varphi)\| \\ &= r\sqrt{(1 - \cos(\varphi))^2 + \sin^2(\varphi)} \\ &= r\sqrt{1 - 2\cos(\varphi) + \cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)} \\ &= r\sqrt{2 - 2\cos(\varphi)} \\ &= r\sqrt{2 - 2\cos\left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\varphi}{2}\right)} \\ &= r\sqrt{2 - 2(\cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right))} \\ &= r\sqrt{2(1 - \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)) + 2\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \\ &= r\sqrt{4\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)} \\ &= 2r\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \end{aligned}$$

Das Aufschreiben der Betragsstriche nach dem Ziehen der Wurzel ist nicht erforderlich, da $\varphi \in [\varphi_0, \pi]$ gewählt wurde, wodurch $\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \geq 0$ folgt.

Damit können wir ds durch $d\varphi$ substituieren.

$$ds = 2r\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) d\varphi$$

Im Folgenden wird eine Integration über die Zeit vorgenommen. Dabei werden als Integrationsgrenze die Startauslenkung und die Auslenkung am tiefsten Punkt gewählt. Das ergibt die Zeitpunkte $t_0 = 0$ und ein Viertel der gesamten Schwingungsdauer T_{φ_0} .

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}T_{\varphi_0} &= \int_0^{\frac{1}{4}T_{\varphi_0}} dt && | \text{ Subst. von } dt \text{ durch } ds \\ &= \int_{s(0)}^{s(\frac{1}{4}T_{\varphi_0})} \frac{1}{\sqrt{2g(y(\varphi_0) - y(\varphi))}} ds \end{aligned}$$

Das nun folgende Substituieren von ds durch $d\varphi$ erfordert wieder eine Anpassung der Grenzen. Die Integrationsgrenzen sind nun der Startwinkel φ_0 aus der Parametrisierung der Zykloiden und der Parameter am tiefsten Punkt, welcher π ist.

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}T_{\varphi_0} &= \int_{\varphi_0}^{\pi} \frac{2r \sin(\frac{\varphi}{2})}{\sqrt{2g(y(\varphi_0) - y(\varphi))}} d\varphi \\ &= \sqrt{\frac{2}{g}}r \int_{\varphi_0}^{\pi} \frac{\sin(\frac{\varphi}{2})}{\sqrt{y(\varphi_0) - y(\varphi)}} d\varphi\end{aligned}$$

Wir setzen die y -Koordinaten im Nenner ein.

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}T_{\varphi_0} &= \sqrt{\frac{2}{g}}r \int_{\varphi_0}^{\pi} \frac{\sin(\frac{\varphi}{2})}{\sqrt{r(1 + \cos(\varphi_0) - 1 - \cos(\varphi))}} d\varphi \\ &= \sqrt{\frac{2}{g}}r \int_{\varphi_0}^{\pi} \frac{\sin(\frac{\varphi}{2})}{\sqrt{r(1 + \cos(\frac{\varphi_0}{2} + \frac{\varphi_0}{2}) - 1 - \cos(\frac{\varphi}{2} + \frac{\varphi}{2}))}} d\varphi \\ &= \sqrt{\frac{2r}{g}} \int_{\varphi_0}^{\pi} \frac{\sin(\frac{\varphi}{2})}{\sqrt{2 \cos^2(\frac{\varphi_0}{2}) - 2 \cos^2(\frac{\varphi}{2})}} d\varphi\end{aligned}$$

Wir substituieren $z := \cos(\frac{\varphi}{2})$ mit $dz = -\frac{1}{2} \sin(\frac{\varphi}{2}) d\varphi$. Auch hier müssen wieder die Grenzen angepasst werden.

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}T_{\varphi_0} &= \sqrt{\frac{r}{g}} \int_{z_0}^0 -\frac{2}{\sqrt{z_0^2 - z^2}} dz \\ &= 2\sqrt{\frac{r}{g}} \int_0^{z_0} \frac{1}{z_0 \sqrt{1 - (\frac{z}{z_0})^2}} dz\end{aligned}$$

Nun wird die Substitution mit $u := \frac{z}{z_0}$ verwendet und damit $du = \frac{1}{z_0} dz$.

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}T_{\varphi_0} &= 2\sqrt{\frac{r}{g}} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} du \\ &= 2\sqrt{\frac{r}{g}} \left[\arcsin(u) \right]_0^1 \\ &= 2\sqrt{\frac{r}{g}} \frac{\pi}{2} \\ &= \pi \sqrt{\frac{r}{g}}\end{aligned}$$

Damit beträgt die Schwingungsdauer des Zykloidenpendels $T_{\varphi_0} = 4\pi \sqrt{\frac{r}{g}}$. Es lässt sich erkennen, dass dieser nicht vom Startwinkel φ_0 abhängt. Der Zykloidenbogen ist demnach eine Tautochrone.

□