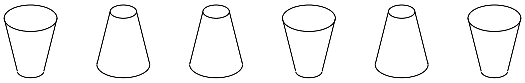
Ariane Beier
04.03.2025

Mathematische Schüler*innengesellschaft
Zirkel 7e

Was bleibt gleich, was nicht?

Aufgabe 1: Becherdrehen

Auf einem Tisch stehen sechs Becher, drei davon richtig herum und drei auf dem Kopf. In jedem Zug dürft ihr nun genau zwei Becher eurer Wahl umdrehen. Ist es möglich, durch mehrere Züge alle Becher richtig herum zu stellen? Begründe deine Antwort.



Für eine systematische Vorgehensweise sind bei Aufgaben dieses Typs oft die folgenden beiden Fragen hilfreich:

1. Was genau ändert sich bei den erlaubten Operationen?
2. **Was bleibt bei den Operationen unverändert?**

In der Mathematik ist eine **Invariante** eine Eigenschaft oder Größe eines (mathematischen) Objekts, die unter bestimmten festgelegten Operationen unverändert bleibt.

Typische Vorgehensweise für Aufgaben dieses Typs: Findet man eine Invariante, welche für die Start- und Zielsituation einen *unterschiedlichen* Wert annimmt, kann man ausschließen, dass man von der Startsituation mit den erlaubten Operationen zur Zielsituation kommen kann und umgekehrt.

In Aufgabe 1 betrachten wir die sechs Becher als ein Objekt, auf das wir bestimmte Operationen anwenden können. Bei den zugelassenen Operationen gibt es drei Fälle:

1. Drehen wir zwei kopfüber stehende Becher um, dann wird die Anzahl

   ____.

2. Drehen wir einen richtig und einen kopfüber stehenden Becher um, dann bleibt die Anzahl

   ____.

3. Drehen wir zwei richtig herum stehende Becher um, dann wird die Anzahl

   ____.

In jedem der drei Fälle ändert sich die Anzahl ______________________________

______________________________. ______________________________

____ ist also eine **Invariante**.

Da zu Beginn ____,

bleibt die Anzahl ____.

Sie kann also nie ____________________ werden.

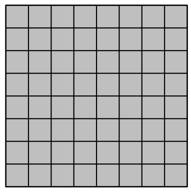
Aufgabe 2: Geheimsprache

Die Geheimsprache Emu besteht aus den drei Buchstaben E, M, U. Ist es mit den folgenden Regeln möglich, das Wort MEU in MU umzuformen? Begründe deine Antwort.

1. Endet ein Wort auf U, so darf man dieses letzte U durch ein E ersetzen.
2. Man darf den ersten und letzten Buchstaben eines Wortes vertauschen.
3. Die Kombination ME darf stets in einem Wort weggelassen oder an beliebiger Stelle eingefügt werden.

Aufgabe 3: Schokolade teilen

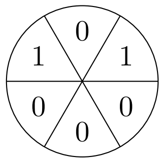
Frau Lindt hat von Herrn Ritter eine 8×8-Tafel Schokolade geschenkt bekommen und möchte nun folgendes Spiel spielen: Eine Person beginnt und bricht die Tafel entlang einer beliebigen Rille. Danach darf die andere Person eines der beiden entstandenen Stücke auf dieselbe Weise teilen. Dies wiederholen sie so lange, bis nur noch Einzelstücke vorhanden sind. Es gewinnt, wer den letzten Zug machen kann.



(a) Sollte Frau Lindt selbst anfangen oder lieber Herrn Ritter den Vortritt lassen, wenn sie gewinnen möchte? Begründe deine Antwort.
(b) Ändert sich die Strategie, wenn die beiden mit einer 4×6- oder 3×7-Tafel spielen?

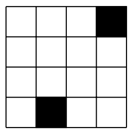
Aufgabe 4*: Kuchen dekorieren

Ein Kuchen wird in sechs Teile geteilt. Die Stücke werden reihum mit den Zahlen 1, 0, 1, 0, 0, 0 beschriftet. Nun darf man in jedem Zug zwei Zahlen auf benachbarten Stücken jeweils um 1 erhöhen.
Kann man es so schaffen, dass auf jedem Feld die gleiche Zahl steht? Falls ja, welche Zahl ist das? Begründe deine Antwort.



Aufgabe 5*: Kartenspiel

Auf einem 4×4-Feld liegen 16 Karten, die jeweils auf einer Seite schwarz und auf einer Seite weiß gefärbt sind. Zwei Karten liegen wie in der Abbildung mit der schwarzen Seite nach oben, die übrigen mit der weißen. Ist es mit den folgenden Zügen möglich, alle Karten so zu drehen, dass sie mit ihrer weißen Seite nach oben liegen? Begründe deine Antwort.



1. Drehe alle Karten in einer Zeile um.
2. Drehe alle Karten in einer Spalte um.
3. Drehe alle Karten in einer Diagonalen um (s. Abbildung, dunkelgrau).
4. Drehe alle Karten in einer der acht Nebendiagonalen um (s. Abbildung, hellgrau).