Teleskopsummen

Diese Woche wollen wir uns mit Teleskopsummen beschäftigen. Wahrscheinlich haben die meisten schon davon gehört. Das einfachste Beispiel ist

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right) &= \left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\\ &= \frac{1}{1}+\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}\\ &= 1-\frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

Natürlich sind solche Beispiele sehr einfach und nicht sonderlich spannend. Die Kunst ist es jedoch, Summen in diese Teleskopform zu bringen. Fangen wir beispielsweise mit

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+k}$$

an, so ist nicht direkt klar, dass diese wieder auf die obige Teleskopsumme führt. Dazu bietet sich dann der folgende Ansatz an

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)-k}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$

Um den Term als Differenz zweier Terme zu schreiben, haben wir also den Nenner faktorisiert und eine nahrhafte Null im Nenner ergänzt. Die folgenden Aufgaben kann man mit einem ähnlichen Ansatz lösen.

Aufgabe 1 Berechne

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{6k+3}{k^4+2k^3+k^2}$$

Aufgabe 2 (schwer) Berechne

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)^3-(k+1)}$$

Als nächstes betrachten wir die Summe

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{k+2}-\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right)\\ &= \left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{1}\right)+\left(\frac{2}{4}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\ldots+\left(\frac{2}{n+2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)\\ &= \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-\frac{1}{1}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$

Wieder bemerken wir, dass sich Teile wegkürzen. An dieser Stelle müssen wir jedoch genau aufpassen, was an den "Rändern" der Summe, d.h. den ersten und den letzten Gliedern, noch übrig bleibt. Hier sehen wir, dass

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2}{k+2}-\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k}\right)=\frac{2}{n+2}+\frac{1}{n+1}-\frac{2}{2}-\frac{1}{1}$$

Aufgabe 3 Berechne

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{2k}{k^2(k^2-1)}$$

Wir wollen jetzt natürlich nicht nur Summen damit ausrechnen, sondern Teleskopsummen für andere Aufgaben nutzen. Dazu betrachten wir folgende Aufgabe

Es sei s die Summe der Kehrwerte der Quadrate der natürlichen Zahlen von 1 bis 2000. Beweise, dass $s < 2$ gilt.

Wir sollen also beweisen, dass $\sum_{k=1}^{2000}\frac{1}{k^2} < 2$ gilt. Der Trick für diese Aufgabe ist die Abschätzung $\frac{1}{(k-1)(k+1)} = \frac{1}{k^2-1} \geq \frac{1}{k^2}$ für $k \geq 2$. Es würde also reichen, wenn wir $1 + \sum_{k=2}^{2000}\frac{1}{(k-1)(k+1)} < 2$ zeigen könnten. Diese Summe ist jedoch eine Teleskopsumme

$$\begin{aligned}
1+\sum_{k=2}^{2000}\frac{1}{(k-1)(k+1)} &= 1+\sum_{k=2}^{2000}\frac{1}{2}\frac{(k+1)-(k-1)}{(k-1)(k+1)}\\
&= 1+\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{2000}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right)\\
&= 1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2000}-\frac{1}{2001}\right)\\
&< 1+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)=1,75<2
\end{aligned}$$

Die folgende Aufgabe lässt sich auch mit Hilfe von Teleskopsummen lösen.

Aufgabe 4 Zeige, dass

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{2009\cdot 2010\cdot 2011\cdot 2012}<\frac{1}{18}$$