Graphentheorie V

Am Ende des letzten Blattes haben wir den Freundschaftssatz eingeführt. Zur Erinnerung, dieser lautet

Freundschaftssatz *Falls in einem Graphen je zwei verschiedene Knoten immer genau einen gemeinsamen Nachbarn haben, so gibt es einen Knoten, welcher mit allen anderen verbunden ist.*

Wir wollen diesen Satz nun beweisen und orientieren uns dabei an Huneke (2002). Wir starten also mit einem Graphen G, bei dem je zwei verschiedene Knoten immer genau einen gemeinsamen Nachbarn haben. Als Vorbereitung brauchen wir folgendes Lemma

Aufgabe 1 *Gegeben seien zwei nicht benachbarte Knoten U und V von G. Zeige, dass diese dann die gleiche Anzahl an Nachbarn haben.*

Tipp: Konstruiere eine injektive Abbildung von den Nachbarn von U auf die von V.

Im Folgenden werden wir Voraussetzen, dass G mindestens zwei Knoten hat, da der Fall mit nur einem Knoten trivial ist. Wir starten damit, dass wir einen beliebigen Knoten $U \in G$ wählen. Sein Grad nennen wir k.

Aufgabe 2 *Zeige, dass $k > 1$ gelten muss.*

Wir definieren nun A als die Menge aller Knoten aus G mit Grad k und die restlichen bilden die Menge B. Verwenden wir jetzt unser Lemma, so stellen wir fest, dass jeder Knoten aus B mit jedem Knoten aus A verbunden sein muss. Falls A oder B nur einen Knoten enthalten, so haben wir einen Knoten gefunden, welcher mit allen anderen verbunden ist. Wenn jedoch beide Mengen mindestens zwei Knoten A_1, A_2 bzw. B_1, B_2 enthalten, so sind B_1 und B_2 beide gemeinsame Nachbarn von A_1 und A_2, was einen Widerspruch zu unserer Voraussetzung darstellt.

Damit bleibt nur noch der Fall, dass die Menge B leer ist. Daraus folgt dann jedoch, dass alle Knoten in G den gleichen Grad haben, nämlich k. Solche Graphen nennt man auch *k-regulär*. Als nächstes überlegen wir uns, wie viele Knoten G enthält, mit Hilfe eines kombinatorischen Arguments.

Aufgabe 3 *Zähle die Anzahl der Wege der Länge 2 auf zwei verschieden Weisen, um zu zeigen, dass G genau $k(k-1)+1$ Knoten enthalten muss.*

Als nächstes betrachten wir die Kantenzüge von G. Zur Erinnerung, bei einem Kantenzug $U_0 e_0 U_1 e_1 \dots e_{n-1} U_n$ dürfen Kanten und Knoten doppelt genutzt werden. Und da wir keine doppelten Kanten erlauben, können wir auch die kürzere Schreibweise $U_0 U_1 \dots U_n$ nutzen.

Aufgabe 4 *Zeige, dass die Anzahl der geschlossenen Kantenzüge der Länge p durch p teilbar sein muss, falls p eine Primzahl ist. Beachte dabei, dass $UVWU$ und $VWUV$ verschiedene Kantenzüge sind.*

Wir fixieren nun einen Knoten $U \in G$ und bezeichnen mit $f_U(n)$ die Anzahl der geschlossenen Kantenzüge von U nach U der Länge $n \in \mathbb{N}$. Nun können wir folgende rekursive Formel zeigen

Aufgabe 5 *Beweise die Formel*

$$f_U(n) = (k-1)f_U(n-2) + k^{n-2}$$

Tipp: $f_U(n)$ ist die Anzahl der geschlossenen Kantenzüge der Form $UU_1U_2 \dots U_{n-2}U_{n-1}U$. Für wie viele davon gilt $U_{n-2} = U$?

Um den Beweis abzuschließen, müssen wir n nur als Primteiler von $k-1$ wählen. Dann gilt $f_U(n) = (k-1)f_U(n-2) + k^{n-2} \equiv 1^{n-2} = 1 \mod n$. Zählen wir also alle geschlossenen Kantenzüge der Länge n in G, so erhalten wir $\sum_{U \in G} f_U(n) \equiv \sum_{U \in G} 1 = |G| \mod n$. Erinnern wir uns jedoch daran, dass $|G| = k(k-1) + 1 \equiv 1 \mod n$, so ist dies einen Widerspruch dazu, dass die Anzahl der geschlossenen Kantenzüge der Länge n durch n teilbar sein muss.

Literatur

Huneke, Craig (2002). “The friendship theorem”. In: *The American mathematical monthly* 109.2, S. 192–194.