# Was ist hyperbolische Geometrie? (III)

## Bisherige Axiome

**Das Inzidenzaxiom $\mathfrak{A}1$** Eine Geometrie $(P, \mathcal{G}, d, \angle)$ erfüllt das *Inzidenzaxiom*, wenn

(I1) jede Gerade mindestens zwei Punkte enthält,

(I2) es zu je zwei verschiedenen Punkten stets <u>genau eine</u> Gerade gibt, die durch diese beiden Punkte verläuft und

(I3) es gibt drei Punkte, die nicht auf einer Gerade liegen.

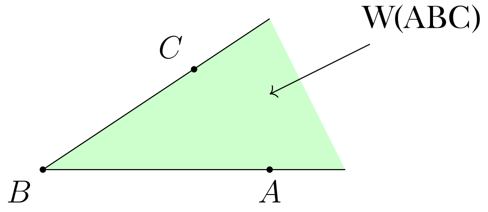
**Das Abstandsaxiom $\mathfrak{A}2$** Eine Geometrie $(P, \mathcal{G}, d, \angle)$ erfüllt das *Abstandsaxiom*, wenn

(A) Für jede Gerade $g$ gibt es eine bijektive Abbildung $\varphi : g \to \mathbb{R}$, sodass $d(A, B) = |\varphi(A) - \varphi(B)|$.

**Das Trennungsaxiom $\mathfrak{A}3$** Eine Geometrie $(P, \mathcal{G}, d, \angle)$ erfüllt das *Trennungsaxiom*, wenn es für jede Gerade $g \in \mathcal{G}$ zwei nichtleere, disjunkte und konvexe *Halbebenen* $H^+(g)$ und $H^-(g)$ gibt, sodass $P \setminus g = H^+(g) \cup H^-(g)$ (disjunkte Vereinigung). Darüber hinaus gilt für $A \in H^+(g)$ und $B \in H^-(g)$, dass $\overline{AB} \cap g \neq \emptyset$. Für einen Punkt $A \in P \setminus g$ schreiben wir $H^{+A}(g)$ für die Halbebene, die $A$ enthält und $H^{-A}(g)$ für die andere Halbebene, die $A$ nicht enhält.

## Das Winkelmaßaxiom $\mathfrak{A}4$

Für drei nicht kollineare Punkte $A, B, C$ schreiben wir $W(ABC) = H^{+A}(BC) \cap H^{+C}(AB)$ und nennen dies den eingeschlossenen Winkel von $ABC$ (vom Ausgangspunkt $B$).



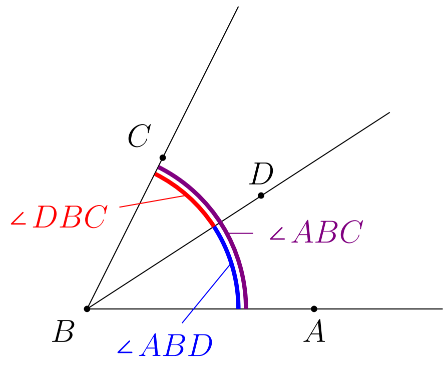

Eine Geometrie $(P, \mathcal{G}, d, \angle)$ erfüllt das *Winkelmaßaxiom*, wenn

(W1) $\angle ABC = 0$ genau dann, wenn $W(ABC) = \emptyset$ bzw. $A - C - B$ oder $B - A - C$
$\angle ABC = \pi$ genau dann, wenn $A - B - C$

(W2) Ist $H^+$ eine Seite von $AB$, dann existiert zu jedem $\alpha \in (0, \pi)$ ein Strahl $\overrightarrow{BC}$ mit $C \in H^+$ und $\angle ABD = \alpha$ für alle $D \in \overrightarrow{BC}$.

(W3) Für $A, B, C$ mit $\angle ABC \in (0, \pi)$ und $D \in W(ABC)$ gilt

$$\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC$$




**Aufgabe 1** Finde zu jeder möglichen Kombination aus Axiomen, die wir noch nicht abgedeckt haben ein Beispiel. Beachte außerdem, dass $\mathfrak{A}4$ das Axiom $\mathfrak{A}3$ benötigt, da wir in (W2) von Seiten sprechen können müssen.

**Aufgabe 2** Formuliere und beweise den Nebenwinkelsatz und den Scheitelwinkelsatz.

## Das Kongruenzaxiom $\mathfrak{A}5$

Wir definieren $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ (sprich: Die Dreiecke $ABC$ und $A'B'C'$ sind *kongruent*), wenn

- $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\quad \overline{AC} = \overline{A'C'}$, $\quad \overline{BC} = \overline{B'C'}$ $\qquad$ und
- $\angle ABC = \angle A'B'C'$, $\quad \angle CAB = \angle C'A'B'$, $\quad \angle BCA = \angle B'C'A'$

Eine Geometrie $(P, \mathcal{G}, d, \angle)$ erfüllt das *Kongruenzaxiom (SWS)*, wenn für zwei beliebige Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle A'B'C'$ mit

- $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\quad \overline{AC} = \overline{A'C'}$ $\qquad$ und
- $\angle CAB = \angle C'A'B'$

automatisch $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ folgt.

Dieses Axiom ist quasi einfach der Kongruenzsatz (SWS). Wir nehmen uns einen Kongruenzsatz als Voraussetzung und können nun die restlichen Kongruenzsätze folgern.

**Aufgabe 3** Formuliere und beweise mindestens einen der drei verbleibenden Kongruenzsätze (WSW), (SsW), (WWS). Beachte, dass wir noch nichts über eine Innenwinkelsumme wissen.

Von nun nehmen wir alle Kongruenzsätze als gegeben an, denn sie sind äquivalent zu $\mathfrak{A}5$.

**Aufgabe 4** Ein Dreieck $\triangle ABC$ heißt *gleichschenklig*, wenn es zwei Seiten gibt, die gleich lang sind. Diese seien hier o.B.d.A. $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$. Der Basiswinkelsatz besagt nun, dass die gegenüberliegenden Winkel dieser Seiten auch gleich groß sind. Formuliere den Basiswinkelsatz präziser und auch dessen Umkehrung. Beweise beide Richtungen jeweils in einem möglichst kurzen Beweis (eine Zeile ist möglich).

## Das Parallenaxiom $\mathfrak{A}6$

Eine Geometrie $(P, \mathcal{G}, d, \angle)$ erfüllt das *Parallelenaxiom*, wenn es für jede Gerade $g \in \mathcal{G}$ und jeden Punkt außerhalb dieser Gerade $A \in P \setminus g$ genau eine Gerade $h \in \mathcal{G}$ gibt, die parallel zu $g$ ist (wie schreiben $g \parallel h$) und $A \in h$ gilt.

Als Euklid die Geometrie definierte, so mochte er dieses Axiom nicht. Seine Formulierung war unterschiedlich zu der hier angegebenen, aber äquivalent. Er versuchte es möglichst zu vermeiden, es in Beweisen zu verwenden und arbeitete daran, es aus den anderen Axiomen zu folgern. In seine Fußstapfen traten unzählige Mathematiker, die es ebenfalls versuchten, bis im 18/19 Jahrhundert Mathematiker wie Gauss, Farkas und Lobatschevski sich nicht-euklidischen Geometrien befassten.

**Absolute, ebene Geometrie** Eine Geometrie, die $\mathfrak{A}1 - \mathfrak{A}5$ erfüllt, heißt *absolute, ebene Geometrie*. Es lässt sich zeigen (nächste Serie), dass es mindestens eine Parallele Gerade zu einer gegebenen Gerade und einem Punkt außerhalb gibt (Doppellotkonstruktion). Das **hyperbolische Axiom** $\mathfrak{A}6^*$ besagt dann, dass es mindestens zwei Parallelen durch einen gegebenen Punkt geben muss. Eine absolute, ebene Geometrie, die $\mathfrak{A}6$ erfüllt, heißt *euklidische Geometrie*. Eine absolute, ebene Geometrie, die $\mathfrak{A}6^*$ erfüllt, heißt *hyperbolische Geometrie*. Im nächsten Blatt werden wir uns mit absolute, ebene Geometrien beschäftigen, um Resultate zu entdecken, die auch in hyperbolischen Geometrie gelten.