Liouvilles Zahl

Liouvilles Zahl ist eine Zahl zwischen 0 und 1 mit der folgenden Dezimaldarstellung

$$\ell = 0.110001000000000000000001000\ldots = \sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!}$$

Es ist $\ell \in [0,1]$ und an jeder $n!$-ten Nachkommastelle steht eine 1 und sonst eine 0. Also steht wie hier zu sehen an den Stellen $1! = 1$, $2! = 2{,}3! = 6$ und $4! = 24$ eine 1. Die nächste 1 wäre an der Stelle $5! = 120$. Was ist die Besonderheit an dieser Zahl?

Eine reelle Zahl heißt *algebraisch*, wenn sie die Lösung einer *algebraischen Gleichung* ist. Eine *algebraische Gleichung* ist eine Gleichung der Form

$$a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

wobei $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Q}$.

Aufgabe 1 Wieso können wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon ausgehen, dass $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ gilt? Mit anderen Worten, wenn wir statt „$\in \mathbb{Q}$“ sogar „$\in \mathbb{Z}$“ fordern, dann verändern wir die Definition einer algebraischen Zahl nicht.

Ist eine reelle Zahl <u>nicht</u> algebraisch, dann nennen wir sie *transzendent*. Berühmte transzendente Zahlen sind π und e, jedoch sind die Beweise dieser Tatsachen sehr schwierig und nur wenige Mathematiker haben sich ernsthaft damit beschäftigt, warum sie es sind. Tatsächlich ist den wenigsten überhaupt nur eine einzige transzendente Zahl bekannt für die sie dies auch beweisen können. Woher wissen wir überhaupt, dass es transzendete Zahlen geben muss?

Aufgabe 2 Beweise, dass es transzendete Zahlen geben muss.
Tipp: Zeige, dass die Menge der algebraischen Zahlen abzählbar ist. Erinnere dich, dass $\mathbb{R}$ überabzählbar ist.

Zu wissen, dass transzendente Zahlen existieren ist schön und gut, aber es ist befriedigender eine konkrete transzendete Zahl angeben zu können. Schon allein ist es interessant zu erfahren, wie man überhaupt zeigen könnte, dass irgendeine Zahl transzendent ist. Liouvilles Zahl ℓ ist ein Beispiel für eine transzendente Zahl. Wir wollen den Beweis hier einmal durchgehen.

Jede reelle Zahl kann durch rationale Zahlen approximiert werden. Betrachten wir zum Beispiel $\sqrt{2}$, dann können wir diese Zahl mithilfe der Dezimaldarstellung annähern.

$$\begin{aligned}
\sqrt{2} &= 1.4142135623730950488016887\ldots \\
a_1 &= 1.4 \\
a_2 &= 1.41 \\
a_3 &= 1.414 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Die Zahlen a_n sind alle rational und für $n \to \infty$ konvergiert $a_n \to \sqrt{2}$. Wir müssen dabei für a_n nicht unbedingt die ersten n Nachkommastellen wählen, wir können auch mehr nehmen wenn wir wollen. Das werden wir auch tun und zwar für Liouvilles Zahl.

Wir definieren

$$\ell_n = \sum_{k=1}^{n} 10^{-k!}.$$

Beispiel hierfür sind dann

$$\begin{aligned}
\ell &= 0.110001000000000000000001000\ldots \\
\ell_1 &= 0.1 \\
\ell_2 &= 0.11 \\
\ell_3 &= 0.110001 \\
\ell_4 &= 0.110001000000000000000001 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Wir interessieren uns nun für die Potenzen von ℓ und ℓ_n, denn wir wollen ja am Ende zu Polynomen übergehen. So sehen wir für die Quadrate dieser Zahlen folgendes.

$$\begin{aligned}
\ell^2 &= 0.012100220001000000000000002200\ldots \\
\ell_1^2 &= 0.01 \\
\ell_2^2 &= 0.0121 \\
\ell_3^2 &= 0.012100220001 \\
\ell_4^2 &= 0.012100220001000000000000220002 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Interessant ist hier die Tatsache, dass die Dezimalstellen von ℓ_n^2 alle korrekt zu sein scheinen. Also alle die vorhanden sind, die Dezimalbruchentwicklung für rationale Zahlen ist ja endlich. Die Behauptung ist, dass alle Nachkommastellen von ℓ_n^2 bis zum Ende mit denen von ℓ^2 übereinstimmen. Schauen wir uns das einmal an.

$$\begin{aligned}
\ell^2 = \left(\sum_{k=1}^{\infty} 10^{-k!}\right)^2 &= \left(\sum_{k=1}^{n} 10^{-k!} + \sum_{k=n+1}^{\infty} 10^{-k!}\right)^2 \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} 10^{-k!}\right)^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n} 10^{-k!}\right)\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} 10^{-k!}\right) + \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} 10^{-k!}\right)^2 \\
&= \ell_n^2 + 2\left(\sum_{k=1}^{n} 10^{-k!}\right)\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} 10^{-k!}\right) + \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} 10^{-k!}\right)^2
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 Zeige, dass der hintere Teil (also: $2\left(\sum_{k=1}^{n} 10^{-k!}\right)\left(\sum_{k=n+1}^{\infty} 10^{-k!}\right) + \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} 10^{-k!}\right)^2$) nicht mit den Dezimalstellen von ℓ_n^2 in Berührung kommt. Mit anderen Worten, zeige dass $\ell^2 - \ell_n^2 < 3 \cdot 10^{-(n+1)!-1}$.

Aufgabe 4 Erweitere den Beweis von Aufgabe 3 mindestens zu einer Beweisskizze der Abschätzung $\ell^m - \ell_n^m < (m+1) \cdot 10^{-(m-1)-(n+1)!}$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 5 Wir viele Nachkommastellen hat ℓ_n? Nenne diese Anzahl a. Zeige anschließend, dass $\ell^m - \ell_n^m$ für beliebige $m \in \mathbb{N}$ und genügend großem $n \in \mathbb{N}$ kleiner ist als $10^{-(a+1)}$.

Wir sehen aus diesen Abschätzungen, dass unabhängig von m der Fehler $\ell^m - \ell_n^m$ für $n \to \infty$ sehr schnell sehr klein wird. Beliebig klein sogar. Intuitiv heißt das, dass die Potenzen ℓ_n^m für ein genügend großes n in allen Dezimalstellen mit ℓ übereinstimmt (bis zum Ende der terminierenden Dezimalbruchentwicklung). Wieso? Das wird an einem Beispiel anschaulich. Betrachte zwei Zahlen $r \in \mathbb{R}$ und $q \in \mathbb{Q}$, wobei q insgesamt 3 Nachkommastellen hat und $0 < r - q < 0.0001$ gelte. Schreibe $q = n.abc$ und addiere es auf beiden Seiten. Es ergibt sich $n.abc < r < n.abc1$. Die Zahl r muss also offenbar bis zur dritten Nachkommstelle mit q übereinstimmen. Das funktioniert analog mit n Nachkommastellen und einem Fehler von $< 10^{-(n+1)}$.

Es wird Zeit für Polynome. Sei $p(x)$ ein Polynom mit positiven, ganzzahligen Koeffizienten. Wir wollen $p(\ell)$ mit $p(\ell_n)$ vergleichen.

Aufgabe 6 Zeige, dass für genügend große $n \in \mathbb{N}$ alle Nachkommastellen von $p(\ell_n)$ (bis zum Ende der terminierenden Dezimalbruchentwicklung) mit denen von $p(\ell)$ übereinstimmen. Erinnerung: $p(\ell)$ bedeutet, dass wir x durch ℓ ersetzen, das ergibt dann eine reelle Zahl. Man stelle sich das Polynom als Funktion vor, in welche wir ℓ einsetzen.

Aufgabe 7 Betrachte zwei Polynome mit positiven, ganzzahligen Koeffizienten $p(x)$ und $q(x)$. Nehme an $p(\ell) = q(\ell)$. Zeige, dass für genügend große $n \in \mathbb{N}$, dann auch $p(\ell_n) = q(\ell_n)$ gelten muss.

Aufgabe 8 Zeige nun per Widerspruchsbeweis, dass ℓ *transzendent* ist.