Was ist hyperbolische Geometrie? (II)

Bisherige Axiome

Das Inzidenzaxiom $\mathfrak{A}1$ Eine Geometrie $(P, \mathcal{G}, d, \angle)$ erfüllt das *Inzidenzaxiom*, wenn

(I1) jede Gerade mindestens zwei Punkte enthält,

(I2) es zu je zwei verschiedenen Punkten stets <u>genau eine</u> Gerade gibt, die durch diese beiden Punkte verläuft und

(I3) es gibt drei Punkte, die nicht auf einer Gerade liegen.

Das Abstandsaxiom $\mathfrak{A}2$ Eine Geometrie $(P, \mathcal{G}, d, \angle)$ erfüllt das *Abstandsaxiom*, wenn

(A) Für jede Gerade g gibt es eine bijektive Abbildung $\varphi : g \to \mathbb{R}$, sodass $d(A, B) = |\varphi(A) - \varphi(B)|$.

Das Trennungsaxiom $\mathfrak{A}3$

Um geometrische Konstruktionen sinnvoll durchführen zu können, müssen wir über Schnittpunkte reden können, die nicht trivial sind. Dazu führen wir mithilfe der Abstandfunktion zunächst die Begriffe *Strecke, Strahl, Inneres* und *konvex* ein.

- Für zwei Punkte $A, B \in P$ heißt
$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \{C \in P : A - C - B\} \\ &= \{C \in P : d(A, C) + d(C, B) = d(A, B) \text{ und } A, B, C \text{ kollinear}\}\end{aligned}$$
die *Strecke* von A nach B. Die Länge der Strecke ist $|\overline{AB}| = d(A, B)$.

- Für zwei Punkte $A, B \in P$ heißt
$$\overrightarrow{AB} = \{C \in P : A - C - B \text{ oder } A - B - C\}$$
der *Strahl* von A über B.

- Für zwei Punkte $A, B \in P$ heißt $\operatorname{Int}(\overline{AB}) = \overline{AB} \setminus \{A, B\}$ das *Innere* der Strecke $\overline{AB}$.

- Eine Menge von Punkten $M \subseteq P$ heißt *konvex*, wenn für je zwei Punkte $A, B \in M$ auch die Strecke dazwischen in M liegt, also $\overline{AB} \subseteq M$.

Trennungsaxiom Eine Geometrie $(P, \mathcal{G}, d, \angle)$ erfüllt das *Trennungsaxiom*, wenn es für jede Gerade $g \in \mathcal{G}$ zwei nichtleere, disjunkte und konvexe *Halbebenen* $H^+(g)$ und $H^-(g)$ gibt, sodass $P \setminus g = H^+(g) \cup H^-(g)$ (disjunkte Vereinigung). Darüber gilt für $A \in H^+(g)$ und $B \in H^-(g)$, dass $\overline{AB} \cap g \neq \varnothing$. Für einen Punkt $A \in P \setminus g$ schreiben wir $H^{+A}(g)$ für die Halbebene, die A enthält und $H^{-A}(g)$ für die andere Halbebene, die A nicht enhält.

Die Vorstellung ist, dass jede Gerade die Ebene in zwei klar voneinander abgetrennte Bereiche unterteilt. Um von der einen Seite zur andere zu gelangen, muss man über die trennende Gerade drüber. Dieses Axiom kann uns helfen, Existenz von Schnittpunkten zu beweisen.

Aufgabe 1 Sei $(P, \mathcal{G}, d, \angle)$ eine Geometrie, die $\mathfrak{A}1$ und $\mathfrak{A}3$ erfüllt. Zudem seien $A \in H^+(g)$ und $B \in H^-(g)$ für eine Gerade $g \in \mathcal{G}$. Zeige, dass $\overline{AB} \cap g = \{S\}$ für einen Schnittpunkt $S \in P$.

Aufgabe 2 Überlege dir (falls es sie gibt) eine Geometrie, die

- $\mathfrak{A}1$ und $\mathfrak{A}2$, aber nicht $\mathfrak{A}3$ erfüllt,
- $\mathfrak{A}1$ und $\mathfrak{A}3$, aber nicht $\mathfrak{A}2$ erfüllt und eine die
- $\mathfrak{A}2$ und $\mathfrak{A}3$, aber nicht $\mathfrak{A}1$ erfüllt.

Oft ist es unhandlich mit dem Trennungsaxiom direkt zu hantieren. Stattdessen können wir eine äquivalente Aussage formulieren, die über Dreiecke spricht. Generell hat die Geometrie eine Tendenz über Dreiecke zu reden.

Für drei nicht kollineare Punkte A, B, C definieren wir

$$\begin{aligned} \triangle ABC &= \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC} \\ \blacktriangle ABC &= H^{+C}(AB) \cap H^{+A}(BC) \cap H^{+B}(AC). \end{aligned}$$

Mit $\triangle ABC$ bezeichnen wir das *Dreieck* ABC und $\blacktriangle ABC$ nennen wir die *Dreiecksfläche* des Dreiecks ABC.

Das Postulat von Pasch Sei $(P, \mathcal{G}, d, \angle)$ eine Geometrie, die $\mathfrak{A}1$ und $\mathfrak{A}2$ erfüllt. Dann ist $\mathfrak{A}3$ äquivalent zu folgender Aussage. Für ein beliebiges Dreieck $\triangle ABC$ und einer Geraden $g \in \mathcal{G}$ gilt

- $\triangle ABC \cap g = \varnothing$ **oder**
- g enthält einen Eckpunkt des Dreiecks **oder**
- g und $\triangle ABC$ haben genau 2 Schnittpunkte.

Beweis der Hinrichtung Angenommen $\mathfrak{A}3$ wäre erfüllt. Der Trick, um „Oder-Aussagen“ zu beweisen, ist normalerweise wie folgt. Wir nehmen ein beliebiges Dreieck $\triangle ABC$ und eine Gerade g, sodass die ersten beiden Aussagen **nicht** erfüllt sind. Das heißt in diesem Fall $\triangle ABC \cap g \neq \varnothing$ und g enthält keinen Eckpunkt des Dreiecks. Jetzt ist das Ziel die dritte Aussage zu folgern und dann ist der Beweis abgeschlossen.

Da $\triangle ABC \cap g \neq \varnothing$ gibt es mindestens einen Schnittpunkt $S \in \triangle ABC \cap g$. Da g keinen Eckpunkt enthält, muss S im Inneren von einer der drei Seiten des Dreiecks liegen. OBdA sei $S \in \mathrm{Int}(\overline{AB})$. Nun benutzen wir das Trennungsaxiom und zerlegen die Ebene in zwei Hälften.

$$H^+ = H^{+A}(g) \quad \text{und} \quad H^- = H^{-A}(g)$$

Nun liegt $A \in H^+$. Wo liegt B? Wäre $B \in H^+$, dann müsste auch $\overline{AB} \subseteq H^+$ sein, da H^+ konvex ist. Aber dann wäre insbesondere $S \in H^+$ und das ist unmöglich, da $S \in g$. Offenbar kann B auch nicht auf g liegen, da g keinen Eckpunkt enthält. Also bleibt nur $B \in H^-$ übrig.

Wo liegt nun C? Dafür gibt es zwei Möglichkeiten, denn C kann nicht auf g liegen. Falls $C \in H^+$, dann hat g und $\overline{BC}$ genau einen Schnittpunkt. Falls $C \in H^-$, dann hat g und $\overline{AC}$ genau einen Schnittpunkt. Insgesamt haben wir also folgendes gezeigt bisher:

- Die Gerade g schneidet zwei Seiten des Dreiecks jeweils im Inneren.

Aufgabe 3 Beende den Beweis der Hinrichtung. Was muss noch gezeigt werden?

Aufgabe 4 Beweise die Rückrichtung. Nehme eine Gerade g und einen beliebigen Punkt $A \in P \setminus g$. Jetzt definiere

$$H^+(g) = \{B \in P \setminus g : \overline{AB} \cap g = \varnothing\}$$
$$H^-(g) = \{B \in P \setminus g : \overline{AB} \cap g \neq \varnothing\}$$

Zeige, dass diese Mengen genau die gesuchten Mengen im Trennungsaxiom sind.

Hinweis: Aufgabe 4 könnte einige Fallunterscheidungen an manchen Stellen verlangen.

Ausblick

Beim nächsten Mal kommen wir dann zum Winkelmaßaxiom und zum vielleicht schon zum Kongruenzaxiom. Damit werden wir zu einer ersten Überraschung kommen für einige, denn es gibt nämlich **4 Kongruenzsätze**, obwohl man in der Schule nur 3 lernt. Das liegt daran, dass zwei der Kongruenzsätze in der euklidischen Geometrie zusammenfallen, in der hyperbolischen Geometrie allerdings unterschieden werden müssen.